

એકમ
4

સંભાવના વિતરણો
(Probability Distribution)

- 4.0 ઉદ્દેશ
- 4.1 પ્રસ્તાવના
- 4.2 અસતત સંભાવના વિતરણનો ખ્યાલ
- 4.3 દ્વિપદી વિતરણ
 - 4.3.1 દ્વિપદી વિતરણનો અર્થ
 - 4.3.2 દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય
 - 4.3.3 દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો
 - 4.3.4 દ્વિપદી વિતરણના દાખલાઓ
 - 4.3.5 સ્વાધ્યાય
- 4.4 ચાવીરૂપ શબ્દ
 - સંદર્ભ ગ્રંથ

4.0 ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓ અસતત સંભાવના વિતરણનો અર્થ સમજી દ્વિપદી વિતરણ અને સંભાવના વિધેય અંગે જાણકારી મેળવે અને દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મોથી વાકેફ થાય.

4.1 પ્રસ્તાવના :

અસતત ચલના સંભાવના વિતરણમાં દ્વિપદી વિતરણ, પોયસન વિતરણ, અતિગુણોત્તર વિતરણ જેવાં જુદાં જુદાં સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ કરી શકાય.

આંકડાશાસ્ત્રના અન્ય અભ્યાસમાં આ સંભાવના વિતરણો ઉપયોગી તો છે જ પરંતુ વ્યવહારમાં પણ વિવિધ ક્ષેત્રે સંભાવના વિતરણોનો ઉપયોગ થાય છે જેમ કે કોઈ વસ્તુની માંગનું અનુમાન કરવા, ઉત્પાદનમાં ગુણવત્તાનો અભ્યાસ કરવા, દર્દી ઉપર દવાની અસરનો અભ્યાસ કરવા, કોઈ વિસ્તારમાં કુટુંબોની આવકના વિતરણનો અભ્યાસ કરવા તેમજ ડેટા વિતરણ જેવા આધુનિક ક્ષેત્રમાં સંભાવના વિતરણ ઉપયોગી છે.

મિત્રો, સૌપ્રથમ આપણે અસતત સંભાવના વિતરણનો અર્થ સમજીએ.

4.2 અસતત સંભાવના વિતરણનો ખ્યાલ :

યાદચ્છિક ચલ x ની જુદી જુદી શક્ય કિંમતો અને તેમને અનુરૂપ સંભાવનાની રજૂઆતને સંભાવના વિતરણ કહે છે.

અસતત યાદચ્છિક ચલ x ને અનુરૂપ સંભાવના દર્શાવતી ગોઠવણીને અસતત સંભાવના વિતરણ કહેવાય. જો અસતત યાદચ્છિક ચલ x ની કિંમતો $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ને અનુરૂપ સંભાવનાઓ અનુક્રમે $P(x_1), P(x_2), P(x_3), \dots, P(x_n)$ હોય તો અસતત સંભાવના વિતરણને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય.

| |
|--|
| $x : x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n$ |
| $P(x) : P(x_1) \ P(x_2) \ P(x_3) \ \dots \ P(x_n)$ |

દા.ત. ત્રણ સિક્કાને યાદચ્છિક રીતે ઉછાળતાં નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ મળે.

$U = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

કુલ બનાવો $n = 8$

હવે જો છાપની સંખ્યાને ચલ x ધારવામાં આવે તો અસતત યાદચ્છિક ચલ 'છાપની સંખ્યા'નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ મળે.

| છાપની સંખ્યા (x) | સંભાવના $P(x)$ |
|-------------------------|-------------------|
| 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{3}{8}$ |
| 2 | $\frac{3}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ |
| કુલ | $\frac{8}{8} = 1$ |

અહીં એ નોંધવું જોઈએ કે સંભાવના વિતરણમાં

(i) $\sum P(x) = 1$ અને

(ii) $0 \leq P(x) \leq 1$

4.3.1 દ્વિપદી વિતરણ (Binomial distribution)

દ્વિપદી વિતરણ અસતત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે. દ્વિપદી વિતરણની શરૂઆત 18 મી સદીની શરૂઆતમાં સ્વિસ ગણિતશાસ્ત્ર જેમ્સ (જેકોબ) બર્નોલીએ કરી હતી.

જ્યારે (i) યાદચ્છિક પ્રયોગમાં બે પ્રકારના પરિણામ - સફળતા અને નિષ્ફળતા જોવા મળતા હોય

(ii) પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન થતું હોય

(iii) દરેક પુનરાવર્તન એકબીજાથી નિરપેક્ષ હોય

(iv) દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p અચલ હોય ત્યારે n પ્રયત્નોમાંથી કોઈપણ x પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના દ્વિપદી વિતરણની મદદથી શોધી શકાય.

નોંધ : જે પ્રયત્નો એકબીજાથી નિરપેક્ષ હોય અને દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p અચળ હોય તો તે પ્રયત્નોને બર્નોલી પ્રયત્નો કહે છે.

4.3.2 દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય :

$$P(x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$$

જ્યાં $n =$ કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા

$x =$ સફળતાની સંખ્યા ($x = 0, 1, 2, \dots, n$)

$p =$ કોઈ એક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના

$q =$ નિષ્ફળતાની સંભાવના

આપણે જાણીએ છીએ કે $p + q = 1$ થાય

$$\therefore q = 1 - p$$

4.3.3 દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો :

- (1) દ્વિપદી વિતરણ અસતત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે.
- (2) n અને p આ વિતરણના પ્રાયલ છે.
- (3) દ્વિપદી વિતરણમાં સફળતાની સરેરાશ સંખ્યા (મધ્યક) = np
- (4) દ્વિપદી વિતરણમાં વિચરણ npq છે.

$$\therefore \text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{npq}$$

- (5) દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યકની કિંમત હમેશા વિચરણ કરતાં વધુ હોય છે.
- (6) જો $P = \frac{1}{2}$ હોય તો દ્વિપદી વિતરણ સંમિત હોય છે.

જો $P < \frac{1}{2}$ હોય તો દ્વિપદી વિતરણમાં ઘન વિષમતા અને $P > \frac{1}{9}$ હોય તો તેમાં ઋણ વિષમતા હોય છે.

- (7) જ્યારે પ્રયત્નોની સંખ્યા (n) ઘણી મોટી સંખ્યા હોય અને સફળતાની સંભાવના (p) બહુ નાની સંખ્યા ન હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ, પોયસન વિતરણને અનુલક્ષે છે.
- (8) જ્યારે (n) બહુ મોટી સંખ્યા હોય અને (p) બહુ નાની સંખ્યા ન હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુલક્ષે છે.

4.3.4 ઉદાહરણ :

1. એક સિક્કાને ચાર્ટરિસ્ટિક રીતે 7 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. તો કોઈપણ 3 વખત છાપ મળવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ: મિત્રો, અહીં સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગનું 7 વખત પુનરાવર્તન થાય છે.

$$n = 7$$

$$\text{સિક્કા પર છાપ મળવાની સંભાવના } P = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{કાંટો મેળવવાની સંભાવના} = q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{હવે, } P(x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$$

$$P(x) = {}^7 C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}$$

3 વખત છાપ મળવાની સંભાવના શોધવા $x = 3$ મૂકતાં,

$$P(3) = {}^7 C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3} \quad {}^7 C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$35 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16}$$

$$P(3) = \frac{35}{128}$$

2. એક સમઘન પાસાને 5 વખત ફેંકવામાં આવે છે. જો પાસા ઉપર 4 કે 5 નંબરનો અંક મળે તો તેને સફળતા ગણવામાં આવે, તો 5 પ્રયત્નોમાંથી (i) 4 વખત સફળતા મળે (ii) ઓછામાં ઓછી 4 વખત સફળતા મળે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

મિત્રો, અહીં પાસો ફેંકવાના પ્રયોગનું 5 વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે.

$$\therefore n = 5,$$

મિત્રો, પાસો ફેંકતા કુલ 6 શક્ય પરીણામો છે જેમાંથી 4 અને 5 અંક સફળતા માટે સાનુકુળ છે.

$$\text{પાસા ઉપર 4 કે 5 અંક મળવાની સંભાવના } p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{હવે } P(x) = {}^n C_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P(x) = {}^5 C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}$$

(i) 4 વખત સફળતા મળવાની સંભાવના

$$P(4) = {}^5 C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4} \quad \because {}^5 C_4 = 5$$

$$= 5 \times \frac{1}{81} \times \frac{2}{3}$$

$$P(4) = \frac{10}{243}$$

(ii) ઓછામાં ઓછી 4 વખત એટલે કે 4 અથવા 5 વખત સફળતાની સંભાવના એટલે કે

$$P(4) + P(5) \text{ શોધવાનું છે, } P(4) = \frac{10}{243} \text{ છે.}$$

$$\therefore P(5) = {}^5 C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5} \quad \because {}^5 C_5 = 1, \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

$$= 1 \times \frac{1}{243} \times 1$$

$$P(5) = \frac{1}{243}$$

\therefore ઓછામાં ઓછી 4 વખત સફળતા મળવાની સંભાવના

$$P(x \geq 4) = P(4) + P(5)$$

$$= \frac{10}{243} + \frac{1}{243}$$

$$= \frac{11}{243}$$

3. એક વિસ્તારમાં સામાન્ય રીતે 25% લોકો ધુમ્રપાન કરતા જણાય છે. આ વિસ્તારમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરાયેલા 5 વ્યક્તિમાંથી

- (i) એકેય વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી ન હોય
- (ii) બધી જ વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોય
- (iii) વધુમાં વધુ 2 વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં 5 વ્યક્તિઓની નિદર્શ તપાસ કરવામાં આવતી હોવાથી,

$$n = 5,$$

કોઈ વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોવાની સંભાવના

$$P = 25\% = \frac{25}{100}$$

$$P = \frac{1}{4}$$

$$\therefore q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

હવે, $P(x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$

$$P(x) = {}^5 C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$$

(i) એકેય વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી ન હોય તેની સંભાવના એટલે કે $x = 0$

$$\begin{aligned} P(0) &= {}^5 C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-0} = 1 \times 1 \times \frac{(3)^5}{(4)^5} \quad \because \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \text{ અને } {}^5 C_0 = 1 \\ &= \frac{243}{1024} \end{aligned}$$

$$P(0) = \frac{243}{1024}$$

(ii) બધી જ એટલે કે પાંચેય વ્યક્તિઓ ધુમ્રપાન કરતી હોય તેની સંભાવના એટલે કે $x = 5$ મૂકતા

$$\begin{aligned} P(5) &= {}^5 C_5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} \quad \because {}^5 C_5 = 1, \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \\ &= 1 \times \frac{1}{1024} \times 1 \end{aligned}$$

$$P(5) = \frac{1}{1024}$$

(iii) વધુમાં વધુ 2 વ્યક્તિ એટલે કે 0, 1 અથવા 2 વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોય. તેની સંભાવના

$P(0) + P(1) + P(2)$ અને $P(2)$ શોધીએ.

$$\begin{aligned} P(1) &= {}^5 C_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{(3)^4}{(4)^4} \\ &= 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{81}{256} \end{aligned}$$

$$P(1) = \frac{405}{1024}$$

$$\begin{aligned}
P(2) &= {}^5C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2} = 10 \times \frac{(1)^2}{(4)^2} \times \frac{(3)^3}{(4)^3} \\
&= 10 \times \frac{1}{16} \times \frac{27}{64} \\
&= \frac{270}{1024}
\end{aligned}$$

હવે વધુમાં વધુ 2 વ્યક્તિ ધુમ્રપાન કરતી હોવાની સંભાવના

$$\begin{aligned}
P(x \leq 2) &= P(0) + P(1) + P(2) \\
&= \frac{243}{1024} + \frac{405}{1024} + \frac{270}{1024} \\
&= \frac{918}{1024}
\end{aligned}$$

$$\text{આમ, } P(x \leq 2) = \frac{459}{512}$$

4. એક વિમાનમાંથી એક પુલ ઉપર 4 બોમ્બ ફેંકવામાં આવે છે. કોઈપણ બોમ્બ પુલ ઉપર પડવાની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે. પુલનો નાશ કરવા બે બોમ્બ પૂરતા છે. તો (i) પુલનો સંપૂર્ણ નાશ થાય (ii) પુલનો અંશતઃ નાશ થાય અને (iii) પુલ બચી જાય તેની સંભાવના શોધો.

મિત્રો, વિમાનમાંથી પુલ ઉપર 4 બોમ્બ ફેંકવામાં આવે છે.

$$\therefore n = 4,$$

$$\text{બોમ્બ પુલ ઉપર પડવાની સંભાવના } P = \frac{2}{5}$$

$$\therefore q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{હવે, } P(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

$$\therefore P(x) = {}^4C_x \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{4-x}$$

- (i) જો પુલ ઉપર 2 કે તેથી વધુ એટલે કે 2, 3 અથવા 4 બોમ્બ પડે તો પુલનો સંપૂર્ણ નાશ થાય.

$$\begin{aligned}
P(2) &= {}^4C_2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-2} & {}^4C_2 &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \\
&= 6 \times \frac{4}{25} \times \frac{9}{25}
\end{aligned}$$

$$P(2) = \frac{216}{625}$$

$$P(3) = P(3) = {}^4C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-3} \quad \because {}^4C_3 = 4$$

$$= 4 \times \frac{8}{125} \times \frac{3}{5}$$

$$P(3) = \frac{96}{625}$$

$$P(4) = {}^4C_4 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-4}$$

$$= 1 \times \frac{16}{625} \times 1$$

$$P(4) = \frac{16}{625}$$

$$\therefore P(x \geq 2) = P(2) + P(3) + P(4)$$

$$= \frac{216}{625} + \frac{96}{625} + \frac{16}{625}$$

$$P(x \geq 2) = \frac{328}{625}$$

(ii) જો પુલ ઉપર 1 બોમ્બ પડે તો પુલનો અંશત: નાશ થાય એટલે કે $x = 1$ મૂકતા

$$\therefore P(1) = {}^4C_1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-1}$$

$$= 4 \times \frac{2}{5} \times \frac{27}{125}$$

$$P(1) = \frac{216}{625}$$

(iii) જો પુલ ઉપર એકેય બોમ્બ ન પડે તો પુલ બચી જાય. એટલે કે $x = 0$ મૂકતા

$$P(0) = {}^4C_0 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^{4-0}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{81}{625}$$

$$P(0) = \frac{81}{625}$$

નોંધ : પુલનો સંપૂર્ણ નાશ થવાની સંભાવના નીચે મુજબ પણ શોધી શકાય.

જો પુલ ઉપર 2 કે તેથી વધુ બોમ્બ પુલ ઉપર પડે તો પુલનો સંપૂર્ણ નાશ થાય.

$$P(x \geq 2) = P(2) + P(3) + P(4) = 1 - [P(0) + P(1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{81}{625} + \frac{216}{625} \right] = 1 - \frac{297}{625}$$

$$P(2) + P(3) + P(4) = \frac{328}{625}$$

5. પાંચ સમઘન પાસાને 96 વખત એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા ઉપર બેકી અંક મળે તેને સફળતા ગણવામાં આવે તો સફળતાની દરેક સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ શોધો.

$N = 96$, 5 પાસા ઉછાળવામાં આવતા હોવાથી $n = 5$

પાસા પર બેકી અંક મળવાની સંભાવના $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$\therefore q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

હવે, $P(x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$

$$P(x) = {}^5 C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$$

આ સંભાવના વિધેયનું નીચે મુજબ સાદું રૂપ આપી ગણતરી વધુ સરળ બનાવી શકાય.

$$\begin{aligned} P(x) &= {}^5 C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5-x} \\ &= {}^5 C_x \left(\frac{1}{2}\right)^5 \end{aligned}$$

$$P(x) = \frac{1}{32} \times {}^5 C_x$$

5 પાસા ઉછાળવામાં આવતા હોવાથી બેકી સંખ્યા 0, 1, 2, 3, 4 કે 5 પાસા ઉપર મળી શકે. સફળતાની આ દરેક સંખ્યાની સંભાવના અને અપેક્ષિત આવૃત્તિ નીચે મુજબ શોધી શકાય.

| સફળતાની સંખ્યા (x) | $P(x) = \frac{1}{32} \times {}^5 C_x$ | અપેક્ષિત આવૃત્તિ $N \times P(x)$ |
|------------------------|--|----------------------------------|
| 0 | $\frac{1}{32} \times {}^5 C_0 = \frac{1}{32}$ | $96 \times \frac{1}{32} = 3$ |
| 1 | $\frac{1}{32} \times {}^5 C_1 = \frac{5}{32}$ | $96 \times \frac{5}{32} = 15$ |
| 2 | $\frac{1}{32} \times {}^5 C_2 = \frac{10}{32}$ | $96 \times \frac{10}{32} = 30$ |
| 3 | $\frac{1}{32} \times {}^5 C_3 = \frac{10}{32}$ | $96 \times \frac{10}{32} = 30$ |
| 4 | $\frac{1}{32} \times {}^5 C_4 = \frac{5}{32}$ | $96 \times \frac{5}{32} = 15$ |
| 5 | $\frac{1}{32} \times {}^5 C_5 = \frac{1}{32}$ | $96 \times \frac{1}{32} = 3$ |
| | કુલ $= \frac{32}{32} = 1$ | $N = 96$ |

નોંધ : આ ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે $P = \frac{1}{2}$ હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ સંમિત વિતરણ હોય છે.

6. એક પરીક્ષામાં સામાન્ય રીતે 20% વિદ્યાર્થીઓ પરીક્ષામાં નાપાસ થાય છે. આ વર્ગમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા 5 વિદ્યાર્થીમાંથી 3 વિદ્યાર્થી પાસ થવાની સંભાવના શોધો.

$$n = 5 \text{ કોઈ વિદ્યાર્થી નાપાસ થવાની સંભાવના (નિષ્ફળતાની સંભાવના) } q = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{હવે } P(x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$$

$$P(x) = {}^5 C_x \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x}$$

3 વિદ્યાર્થી પાસ થવાની સંભાવના

$$P(3) = {}^5 C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^{5-3} \quad {}^5 C_3 = {}^5 C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$= 10 \times \frac{64}{125} \times \frac{1}{25}$$

$$P(3) = \frac{128}{625}$$

7. સામાન્ય રીતે મુસાફરીએ નીકળેલા 10 વહાણથી 9 વહાણ બંદર પર સહીસલામત પાછા ફરે છે. તો મુસાફરીએ નીકળેલા 400 વહાણમાંથી બંદર પર સહીસલામત પાછા ફરતા વહાણોની સરેરાશ સંખ્યા અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

$$n = 400, \text{ કોઈ વહાણ બંદર પર સહીસલામત પાછું ફરે તેની સંભાવના } p = \frac{9}{10}$$

$$\therefore q = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\text{સરેરાશ (મધ્યક)} = np$$

$$= 400 \times \frac{9}{10}$$

$$\text{મધ્યક} = 360$$

$$\text{પ્ર.વિ.} = \sqrt{npq}$$

$$= \sqrt{400 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$\text{પ્ર. વિ.} = 6$$

8. પ્રચલિત સંકેત અનુસાર એક દ્વિપદી ચલ માટે $n = 6$ અને $q \cdot p(x = 4) = p(x = 2)$ હોય તો p ની કિંમત શોધો.

$$P(x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$$

$$n = 6 \text{ મૂકતાં}$$

$$P(x) = {}^6 C_x p^x q^{6-x}$$

$$\text{હવે } q \cdot p(x = 4) = p(x = 2)$$

$$\therefore q \cdot {}^6 C_4 p^4 q^{6-4} = {}^6 C_2 p^2 q^{6-2}$$

$$\therefore 9 \times 15 p^4 q^2 = 15 p^2 q^4$$

$$\therefore 9 p^4 q^2 = p^2 q^4$$

$$\therefore \frac{9p^4}{p^2} = \frac{q^4}{q^2}$$

$$\therefore 9p^2 = q^2$$

$$\text{બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં, } \sqrt{9p^2} = \sqrt{q^2}$$

$$3p = q$$

$$\therefore 3p = 1 - p \quad (q = 1 - p \text{ મૂકતાં})$$

$$\therefore 3p + p = 1$$

$$\therefore 4p = 1$$

$$\therefore p = \frac{1}{4}$$

9. એક દ્વિપદી વિતરણમાં $n = 6$ અને $P(3) : P(4) = 8 : 3$ હોય તો $P(x \geq 1)$ ની કિંમત શોધો.

$$P(x) = {}^n C_x p^x q^{n-x}$$

$$n = 6 \text{ મૂકતાં } \boxed{P(x) = {}^6 C_x p^x q^{6-x}}$$

હવે $P(3) : P(4) = 8 : 3$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{P(3)}{P(4)} = \frac{8}{3}$$

$P(x)$ માં અંશમાં $x = 3$ અને છેદમાં $x = 4$ મૂકતાં,

$$\therefore \frac{{}^6 C_3 p^3 q^{6-3}}{{}^6 C_4 p^4 q^{6-4}} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \frac{20 p^3 q^3}{15 p^4 q^2} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \frac{4}{3} \times \frac{q}{p} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \frac{q}{p} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{q}{p} = 2$$

$$\therefore q = 2p$$

$$\therefore 1 - p = 2p \quad \dots\dots\dots q = 1 - p \text{ મૂકતાં,}$$

$$\therefore 1 = 2p + p$$

$$\therefore 1 = 3p$$

$$\therefore p = \frac{1}{3}$$

$$\text{હવે } Q = 1 - \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{2}{3}$$

હવે, સંભાવના વિધેય $P(x) = {}^6C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$ થાય

$$\text{તો } P(x \geq 1) = 1 - p(0)$$

$$= 1 - \left[{}^6C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{6-0} \right]$$

$$= 1 - \left[1 \times 1 \times \frac{64}{729} \right]$$

$$= 1 - \frac{64}{729}$$

$$\therefore P(x \geq 1) = \frac{665}{729}$$

10. એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક 4 અને વિચરણ 2.4 છે. તો તેના પ્રાયલ શોધો.

$$\text{મધ્યક} = 4 \quad \text{વિચરણ} = 2.4$$

$$np = 4 \quad npq = 2.4$$

$$4 \times q = 2.4 \dots\dots\dots np = 4 \text{ મૂકતાં}$$

$$q = \frac{2.4}{4}$$

$$\boxed{q = 0.6}$$

$$\text{હવે } P = 1 - 0.6$$

$$\boxed{P = 0.4}$$

$$\text{હવે, } np = 4$$

$$n \times 0.4 = 4$$

$$n = \frac{4}{0.4}$$

$$\therefore \text{પ્રાયલ } (n, p) = (10, 0.4)$$

$$n = 10$$

11. એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક 6 અને પ્રમાણિત વિચલન $\frac{3}{2}$ છે. તો તેની વિષમતા વિશે શું કહી શકાય ?

મિત્રો દ્વિપદી વિતરણમાં વિષમતાનો અભ્યાસ કરવા p ની કિંમત શોધાય.

$$\text{મધ્યક} = np = 6$$

$$\text{પ્ર.વિ.} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{વિચરણ} &= \frac{9}{4} \\ npq &= \frac{9}{4} \\ 6 \times q &= \frac{9}{4} \\ q &= \frac{9}{6 \times 4} \\ q &= \frac{3}{8} \\ p &= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \\ p &= 0.625 \end{aligned}$$

આમ, $p > \frac{1}{2}$ હોવાથી આ વિતરણમાં ઋણ વિષમતા છે એમ કહી શકાય.

12. “એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક = 20 અને પ્રમાણિત વિચલન = 5 છે” આ વિધાનની સત્યાર્થતા તપાસો.

$$\begin{aligned} \text{મધ્યક} = 20 & \quad \text{પ્ર. વિ.} = 5 \\ \therefore \text{વિચરણ} &= 25 \text{ થાય} \end{aligned}$$

પરંતુ દ્વિપદી વિચરણમાં હંમેશા મધ્યકની કિંમત વિચરણ કરતાં વધુ હોય છે. તેથી આપેલું વિધાન ખોટું છે.

4.3.5 સ્વાધ્યાય :

(A) યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ લખો.

- (1) દ્વિપદી વિતરણ કઈ ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે ?
(a) અસતત ચલ (b) સતત ચલ (c) બંને ચલ
- (2) દ્વિપદી વિતરણની શોધ કોણે કરી હતી ?
(a) કાર્લ પિયર્સન (b) સ્પિયરમેન (c) જેકોબ બર્નોલી
- (3) દ્વિપદી વિતરણના પ્રાયલ કયા છે ?
(a) p અને q (b) n અને p (c) np અને npq
- (4) એક દ્વિપદી વિતરણમાં $q = \frac{1}{3}$ છે, તેમાં કેવી વિષમતા હોય ?
(a) ઘન (b) ઋણ (c) શૂન્ય
- (5) એક દ્વિપદી વિતરણમાં $n = 6$ અને $q = \frac{2}{3}$ હોય તો મધ્યકની કિંમત શું થાય ?
(a) 2 (b) 3 (c) 6

(B) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

- (1) કઈ શરતો હેઠળ અસતત ચલની સંભાવના શોધવા દ્વિપદી વિતરણ ઉપયોગી છે ?
- (2) બર્નોલી પ્રયત્નો એટલે શું ?
- (3) દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય લખો.
- (4) દ્વિપદી વિતરણ માટે સંમિતતા અને વિષમતાની શરતો જણાવો.
- (5) દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણની કિંમત વચ્ચેનો સંબંધ જણાવો.

(6) દ્વિપદી વિતરણના બે ઉપયોગો જણાવો.

જવાબ (1) સાંખ્યકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણના અભ્યાસમાં નિયંત્રણ સીમા શોધવા.

(2) ગુરુ નિદર્શન પરીક્ષણમાં પરીકલ્પના પરીક્ષણમાં દ્વિપદી વિતરણ ઉપયોગી છે.

(C) ગણતરી કરો.

(1) નોકીયા કંપનીએ બનાવેલ જથ્થામાં સામાન્ય રીતે 20% મોબાઈલ ખામીયુક્ત જણાય છે. તો કંપનીએ બનાવેલ જથ્થામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ 6 મોબાઈલના નિદર્શમાં (i) બધા જ મોબાઈલ સારા હોય (ii) 2 મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના શોધો.

(2) છોકરા અને છોકરીની સંભાવના સરખી ગણતાં, દરેક કુટુંબમાં 5 બાળકો હોય તેવા 800 કુટુંબોમાંથી કેટલા કુટુંબમાં (i) 3 છોકરા (ii) 2 અથવા 3 છોકરા (iii) 5 છોકરી હશે ?

(3) એક હેતુલક્ષી કસોટીમાં દરેક પ્રશ્નના 3 વૈકલ્પિક ઉત્તરો છે, જેમાંથી કોઈ એક ઉત્તર સાચો હોય છે. એક વિદ્યાર્થીને એકેય પ્રશ્નનો સાચો ઉત્તર ખબર નથી, તેથી તે ગમે તે એક ઉત્તર સામે ખરાનું ચિહ્ન કરે છે. તો તેણે આપેલા 6 પ્રશ્નના ઉત્તરમાંથી (i) તેના બધા ઉત્તર સાચા હોય (ii) તેના બધા જ ઉત્તર ખોટા હોય અને (iii) તેના વધુમાં વધુ બે ઉત્તર સાચા હોવાની સંભાવના શોધો.

(4) ચોમાસાની ઋતુમાં સામાન્ય રીતે 30 દિવસમાંથી 10 દિવસ વરસાદ પડે છે. તો કોઈ અઠવાડીયામાં ઓછામાં 3 દિવસ વરસાદ પડવાની સંભાવના શોધો.

(5) 4 સિક્કાને યાદચ્છિક રીતે એકસાથે 64 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. સિક્કા પર છાપ મળે તેને સફળતા ગણવામાં આવે તો સફળતાની દરેક સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ શોધો.

[Hint : $N = 64$, $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$]

(6) (A) તીરંદાજ અર્જુન સામાન્ય રીતે 9 પ્રયત્નોમાંથી 8 પ્રયત્નોમાં નિશાન વીંધે છે. તો ત્રણ પ્રયત્નોમાંથી તે એક પ્રયત્નમાં નિશાન ચૂકી જાય તેની સંભાવના શોધો.

(B) ભારત અને પાકિસ્તાન 5 મેચની એક ક્રિકેટ શ્રેણી રમે છે, જેમાં ભારતની કોઈ મેચ જીતવાની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. તો આ શ્રેણીમાં ભારત (i) 2 કે 3 મેચ જીતે (ii) 4 કે તેથી વધુ મેચ જીતે તેની સંભાવના શોધો.

(7) એક દ્વિપદી વિતરણમાં $n = 5$ તેમજ $P(2) = 0.0512$ અને $P(3) = 0.2048$ હોય તો P ની કિંમત શોધો.

(8) એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક 20 અને પ્રમાણિત વિચલન 2 છે. તો તેના પ્રાયલો શોધો અને સંભાવના વિધેય લખો.

(9) સામાન્ય રીતે દરેક કુટુંબમાં 25% બાળકો દૃષ્ટિની ખામીવાળા જણાય છે. તો 400 કુટુંબોની નિદર્શ તપાસમાં દૃષ્ટિની ખામીવાળા કુટુંબોની સરેરાશ સંખ્યા અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(10) એક દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 5 અને વિચરણ 2.5 છે. તો $P(x \geq 1)$ ની કિંમત શોધો.

(11) એક દ્વિપદી ચલ માટે $n = 4$ અને $P = 0.3$ છે. આ પરથી $P(O)$ અને $P(1)$ શોધો.

(12) એક દ્વિપદી વિતરણમાં $P = \frac{1}{3}$ અને પ્ર.વિ. = 2 છે. તો n ની કિંમત શોધો.

(13) એક દ્વિપદી ચલ માટે મધ્યક : વિચરણ = 5 : 4 હોય તો સફળતાની સંભાવના P ની કિંમત શોધો.

(14) એક દ્વિપદી ચલ માટે $P = 39$ હોય તો તેની વિષમતા વિશે જણાવો.

જવાબો :

(A) (1) a (2) c (3) b (4) b (5) a

(B) પ્રકરણમાંથી આ પ્રશ્નોના જવાબ મળી રહેશે.

(C) (1) (i) $\frac{4096}{15625}$ (ii) $\frac{768}{3125}$

(2) (i) 250 (ii) 500 (iii) 25

(3) (i) $\frac{1}{729}$ (ii) $\frac{64}{729}$ (iii) $\frac{496}{729}$

(4) $\frac{313}{729}$

| | | | | | |
|--------------------|---|----|----|----|---|
| (5) x : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| અપેક્ષિત આવૃત્તિ : | 4 | 16 | 24 | 16 | 4 |

(6) (A) $\frac{16}{243}$ (B) $\frac{40}{81}$, $\frac{112}{243}$

(7) $\frac{4}{5}$

(8) $n = 25$, $p = \frac{4}{5}$, $p(x) = {}^{25}C_x \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{25-x}$

(9) મધ્યક = 100 ; પ્ર.વિ. = $\sqrt{75} = 8.66$

(10) $\frac{1023}{1024}$

(11) $P(0) = 0.2401$, $P(1) = 0.4116$

(12) $n = 18$

(13) $P = \frac{1}{5}$

(14) $P = \frac{3}{4} \therefore$ ઋણ વિષમતા $\left(P > \frac{1}{2}\right)$

4.4 ચાવીરૂપ શબ્દો :

- સંભાવના : કોઈ ઘટના બને કે ન બને તેની શક્યતાને સંખ્યામાં દર્શાવવા માટેનું માપ
- સંભાવના વિતરણ : સંભાવનાની વહેંચણી
- પ્રાયલ : સમષ્ટિના બધા અવલોકનો પરથી શોધવામાં આવતું કોઈપણ આંકડાકીય માપ
- અસતત સંભાવના વિતરણ : અસતત ચલ x ની શક્ય કિંમતો અને તેમને અનુરૂપ સંભાવનાની ગોઠવણી.
- યાદચ્છિક : ભેદભાવ વિના, પૂર્વગ્રહ વિના
- સંમિત આવૃત્તિ વિતરણ : જે આવૃત્તિ વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિની બંને બાજુ આવૃત્તિઓ સમાન રીતે વહેંચાયેલી હોય.
- અસતત ચલ : જે ચલ તેના અંતરાલમાંથી નિશ્ચિત (પરિમિત) કિંમત ધારણ કરી શકે તેમ હોય તેને અસતત ચલ કહે છે.

— સંદર્ભ ગ્રંથ :

1. ગાણિતિક આંકડાશાસ્ત્ર - એચ. ડી. શાહ (યુનિ. ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ), 2007
2. આંકડાશાસ્ત્ર (ધોરણ-12) - ગુજરાત રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 2021
3. Mathematical Statistic - Gupta and Kapoor (Sultan chand Prakashan), 2011

* * *