

એકમ 12

નિયત સંબંધ (Regression)

- 12.0 નિયત સંબંધના અભ્યાસનો હેતુ
- 12.1 પ્રસ્તાવના
- 12.2 નિયત સંબંધનો અર્થ
- 12.3 નિયત સંબંધની મર્યાદાઓ
- 12.4 નિયત સંબંધ રેખાના - ગુણધર્મો
- 12.5 નિયત સંબંધ રેખાઓ
- 12.6 નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો (મોડેલો)
- 12.7 નિયત સંબંધાંકો
- 12.8 નિયત સંબંધાંકોના ગુણધર્મો
- 12.9 ઉદાહરણો
- 12.10 સ્વાધ્યાય
- 12.11 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો
- 12.12 ચાવીરૂપ શબ્દો
સંદર્ભ ગ્રંથ

12.0 નિયતસંબંધના અભ્યાસનો હેતુ

- (1) વિદ્યાર્થીઓ સ્વતંત્ર અને આધારિત ચલ અંગેની સમજૂતી મેળવી શકે છે. ઉપરાંત એક ચલની કિંમત આપેલી હોય ત્યારે બીજા ચલની કિંમતનું અનુમાન દ્વારા નિયત સંબંધ અંગે જાણકારી મેળવી શકે છે.
- (2) એક ચલની કિંમતમાં થતા એકમ ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમત ઉપર કેટલી થાય છે તે જાણી શકે છે.
- (3) બે ચલના અભ્યાસમાં સ્વતંત્ર ચલ અને આધારિત ચલની ઓળખ કરવાની ક્ષમતા કેળવી શકે છે.

12.1 પ્રસ્તાવના :

સહસંબંધ એ બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નજીક છે તે દર્શાવે છે જ્યારે નિયત સંબંધ બે ચલો વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે આ સંબંધો દર્શાવવા માટે ગાણિતીય મોડેલોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

ટૂંકમાં નિયત સંબંધ એટલે બે ચલો વચ્ચેનો ગાણિતીય વિધેયો દ્વારા નક્કી કરવામાં આવતો સંબંધ. આ સંબંધ ને જ્યારે સુરેખાના સ્વરૂપમાં રજૂ કરવામાં આવે ત્યારે તેને સુરેખ નિયત સંબંધ કહે છે. સુરેખ નિયત સંબંધની મદદથી એક ચલમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલ ઉપર કેટલી થાય છે તે જાણી શકાય છે. આ અસર જાણવા માટે એક ચલને સ્વતંત્ર ચલ અને બીજા ચલને આધારિત ચલ તરીકે લઈ નિયત સંબંધ રેખાઓ મેળવવામાં આવે છે.

નિયત સંબંધ રેખાઓ મેળવવા માટે સ્વતંત્ર ચલ ને x અને આધારિત ચલને y તરીકે લેવામાં આવે છે અને તે ઉપરથી y ની x ઉપરની રેખા મેળવવામાં આવે છે. તેવીજ રીતે y ને સ્વતંત્ર ચલ અને x ને આધારિત ચલ તરીકે લઈ તે ઉપરની x ની y ઉપરની રેખા મેળવવામાં આવે છે.

12.2 નિયત સંબંધનો અર્થ (વ્યાખ્યા) :

“જો બે ચલો પરસ્પર સંબંધિત હોય અને તે બે ચલો પૈકી એક ચલમાં ફેરફાર થાય તો આ ફેરફારની અસર બીજા ચલ ઉપર કેટલી થાય છે. તે જાણવા માટેનો અભ્યાસ એટલે નિયત સંબંધ.”

12.3 નિયત સંબંધની મર્યાદાઓ :

નિયત સંબંધના અભ્યાસ દરમ્યાન જ્યારે બે ચલનો અભ્યાસ કરવાનો હોય ત્યારે કયા ચલને સ્વતંત્ર ગણવો અને કયા ચલનો આધારિત ગણવો એ નક્કી કરવું ખૂબ અઘરું છે. તેવી જ રીતે બંને ચલો પરસ્પર આધારિત હોય ત્યારે કયા ચલને સ્વતંત્ર ગણવો અને કયા ચલને આધારિત ગણવો તે ખૂબ જ મુશ્કેલ બને છે.

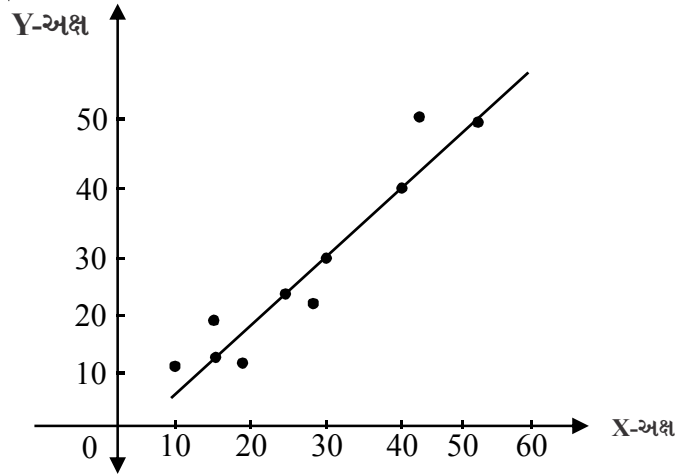
12.4 નિયત સંબંધ રેખાના ગુણ ધર્મો :

(1) જ્યારે એક ચલમાં વધારો થવાથી બીજામાં પણ સપ્રમાણ વધારો થતો હોય એટલે કે બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ હોય ત્યારે બે નિયત સંબંધ રેખાઓ એકાકાર થાય છે.

(2) નિયત સંબંધ રેખાઓ મુખ્યત્વે બે પ્રકારની છે. (x ની y ઉપરની અને y ની x ઉપરની આ બંને રેખાઓ એકબીજાને છેદતી હોય છે. અને આ છેદન બિંદુઓ \bar{x} , \bar{y} છે.

12.5 નિયત સંબંધ રેખાઓ :

નિયત સંબંધ રેખાઓ મુખ્યત્વે બે ચલો વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. તેમાં એક ચલને સ્વતંત્ર ચલ અને બીજા ચલને આધારિત ચલ ગણી સુરેખાની રચના કરવામાં આવે છે. આ રેખાઓ બે ચલો માટેની વિકીર્ણ આકૃતિની મદદથી મેળવવામાં આવે છે. જે નીચેની આકૃતિની મદદથી સમજીશું.



ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે બિંદુઓ રેખાની આજુબાજુ પડેલા છે. હવે સમસ્યા એ ઉદભવે છે કે દરેક અલગ વ્યક્તિઓ આ પ્રકારની રેખાઓ દોરે તો રેખાઓ અલગ અલગ મળશે તેથી આ બધી રેખાઓ પૈકી શ્રેષ્ઠ રેખા શોધવી પડે જેને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા કહીશું. જે ન્યૂનત્તમ વર્ગોની પદ્ધતિ”નો ઉપયોગ કરીને મેળવવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિ મુજબ જે રેખા માટે વિકર્ણ આકૃતિમાંના બિંદુઓમાંથી રેખા ઉપરનાં અંતરોના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનત્તમ થાય તે રેખા શ્રેષ્ઠ રેખા તરીકે ઓળખાય અને આ રેખાને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા અથવા નિયત સંબંધ રેખા કહીશું. આ રેખાઓ મુખ્યત્વે બે પ્રકારની છે. જેમ કે y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા. x ને સ્વતંત્ર ચલ અને y ને આધારિત ચલ ગણી તેને $Y = A + bx$ ના સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે છે. તેવી જ રીતે x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખામાં y ને સ્વતંત્ર ચલ અને x ને આધારિત ચલ ગણી તેને $x = a + by$ ના સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે છે.

12.6 નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો (મોડેલો) :

y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાને $y = A + bx$ તરીકે રજૂ કરી y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવવામાં આવે છે જ્યારે x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાને $x = a + by$ તરીકે રજૂ કરી x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવવામાં આવે છે. જે બંને સમીકરણો નીચે મુજબ છે.

$$y \text{ નું } x \text{ ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ } Y = A + B_{yx} X$$

$$\text{જ્યાં } A = \bar{y} - B_{yx} \cdot \bar{x}$$

$$B_{yx} = y \text{ નો } x \text{ પરનો નિયત સંબંધાંક}$$

$$x \text{ નું } y \text{ ઉપરનું સંબંધ સમીકરણ } X = a + B_{xy} \cdot Y$$

$$\text{જ્યાં } a = \bar{x} - B_{xy} \cdot \bar{y}$$

$$B_{xy} = x \text{ નો } y \text{ ઉપરનો નિયત સંબંધાંક}$$

12.7 નિયત સંબંધાંકો :

નિયત સંબંધના માપને નિયત સંબંધાંક તરીકે ઓળખીશું. નિયત સંબંધાંકો બે પ્રકારના હોય છે.

(1) y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક જેને b_{yx} વડે દર્શાવીશું.

(2) x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક જેને b_{xy} વડે દર્શાવીશું.

આ બંને નિયત સંબંધોની ગણતરીના સૂત્રો નીચે મુજબ છે.

\bar{x} અને \bar{y} બંને મધ્યકોની કિંમત પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે :

y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

અથવા

$$b_{yx} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

\bar{x} અને \bar{y} બંને મધ્યકોની કિંમત જ્યારે અપૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{yx} = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \Sigma v}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$\text{જ્યાં } u = x - A$$

$$\text{જ્યાં } A = \text{ધારેલો મધ્યક}$$

$$v = Y - B$$

$$B = \text{ધારેલો મધ્યક}$$

વર્ગીકૃત માહિતી આપેલી હોય ત્યારે :-

y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{yx} = \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{n\Sigma u^2 fu - (\Sigma ufu)^2} \times \frac{i_y}{i_x}$$

જ્યાં $u = \frac{x-A}{i_x}$, $i_x = x$ ની વર્ગ લંબાઈ

$v = \frac{y-B}{i_y}$, $i_y = y$ ની વર્ગ લંબાઈ

$$\bar{x} = A + \frac{\sum ufu}{n} \times i_x$$

$$\bar{y} = B + \frac{\sum vfu}{n} \times i_y$$

સહસંબંધાંક કે પ્ર. વિ. આપેલ હોય ત્યારે

y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{yx} = r \frac{S_y}{S_x}$$

જ્યાં $S_y = y$ નું પ્રમાણિત વિચલન

$S_x = x$ નું પ્રમાણિત વિચલન

$r =$ સહસંબંધાંક

\bar{x} અને \bar{y} બંનેની કિંમતનો પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે

x નો y ઉપરનો નિયતસંબંધાંક

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

અથવા

$$\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$$

\bar{x} અને \bar{y} બંનેની કિંમતો અપૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે

x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}$$

જ્યાં $u = x - A$

જ્યાં $A =$ ધારેલો મધ્યક

અને

$v = y - B$

જ્યાં $B =$ ધારેલો મધ્યક

વર્ગીકૃત માહિતી આપેલી હોય ત્યારે

x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{n\Sigma v^2 fv - (\Sigma vfv)^2} \times \frac{i_x}{i_y}$$

જ્યાં $u = \frac{x-A}{i_x}$, $i_x = x$ ની વર્ગ લંબાઈ

$v = \frac{y-B}{i_y}$, $i_y = y$ ની વર્ગ લંબાઈ

સહ સંબંધાંક કે પ્ર. વિ. આપેલ હોય ત્યારે

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધાંક

$$b_{xy} = r \frac{S_x}{S_y}$$

જ્યાં $S_x = x$ નું પ્રમાણિત વિચલન

$S_y = y$ નું પ્રમાણિત વિચલન

$r =$ સહસંબંધાંક

12.8 નિયત સંબંધાંકોના ગુણધર્મો :

y નો x ઉપરનો અને x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંકોના ગુણધર્મો નીચે મુજબ છે.

(1) y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક અને x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંકનો ગુણાકાર સહસંબંધાંકના વર્ગ જેટલો થાય છે.

એટલે કે

$$b_{yx} \times b_{xy} = r \frac{S_y}{S_x} \times r \frac{S_x}{S_y}$$

$$b_{yx} \times b_{xy} = r^2$$

(2) સહસંબંધાંક એ બે નિયત સંબંધાંકોનો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

$$r^2 = b_{yx} \times b_{xy} \text{ (} r^2 \text{ની કિંમત 1થી વધુ ન હોઈ શકે)}$$

બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતા

$$r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

$$\therefore \text{ ગુણોત્તર મધ્યક} = \sqrt{ab}$$

(3) બે નિયત સંબંધાંકો b_{yx} અને b_{xy} તેમજ સહસંબંધાંક r એ ત્રણેના ચિહ્નો સમાન હોય છે (એટલે કે ઋણ હોય તો ઋણ અને ધન હોય તો ધન)

દા.ત. $b_{yx} = -0.5$ અને $b_{xy} = -1.5$ હોય તો r ની કિંમત પણ ઋણ જ આવે.

$$r^2 = b_{yx} \times b_{xy}$$

$$r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

$$= \sqrt{-0.5 \times -1.5}$$

$$= \sqrt{0.75} \text{ થાય પરંતુ}$$

$$r = -0.866 \text{ થાશે.}$$

ચિહ્નો સમાન હોવાનું કારણ

$$b_{yx} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{S_x^2}, \quad b_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{S_y^2}$$

$$\text{અને } r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{S_x \times S_y}$$

અહીં S_x અને S_y એ પ્રમાણિત વિચલનો છે. તેથી તે હંમેશા ધન જ આવશે તેથી જે $\text{Cov}(x, y)$ ની કિંમત ઋણ હોય તો b_{xy} ; b_{yx} ના ચિહ્નો ઋણ જ આવશે અને જો ધન હોય તો ધન જ આવે.

(4) જો બે ચલો સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ કે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ હોય એટલે કે બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધની કિંમત

± 1 થતી હોય તો બંને નિયત સંબંધાંકો એકબીજાના વ્યસ્ત થાય છે.

$$r = \pm 1$$

$$\therefore r^2 = 1$$

$$b_{yx} \times b_{xy} = 1$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{1}{b_{xy}} \text{ અથવા } b_{xy} = \frac{1}{b_{yx}}$$

(5) નિયત સંબંધોકોની કિંમત ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે. પરંતુ સ્કેલ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.

12.9 ઉદાહરણો :

ઉદા-1. નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

x	10	11	13	16	20
y	7	8	13	12	15

જવાબ : y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક = b_{yx}

	x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	10	7	-4	-4	16	16
	11	8	-3	-3	9	9
	13	13	-1	2	1	-2
	16	12	2	1	4	2
	20	15	6	4	36	24
કુલ	70	55	-	-	66	49

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\text{મધ્યક } \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{55}{5} = 11$$

\bar{x} અને \bar{y} પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તેથી

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{49}{66}$$

$$= 0.74$$

સમજૂતી :

– x અને y નો સરવાળો કરો.

– x નો સરવાળાને કુલ સંખ્યા વડે ભાગો $70 \div 5 = 14$

– x ની દરેક સંખ્યામાંથી મધ્યક 14 બાદ કરી $(x-\bar{x})$ શોધો.

– y ની દરેક સંખ્યામાંથી મધ્યક 11 બાદ કરી $(y-\bar{y})$ શોધો.

– $(x-\bar{x})$ ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરી $\Sigma(x-\bar{x})^2$ શોધો.

– $(x-\bar{x})$ અને $(y-\bar{y})$ બંને સ્તંભનો ગુણાકાર કરી $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ શોધો.

– b_{yx} ના સૂત્રમાં y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

(નોંધ : અહીં બંને મધ્યકો પૂર્ણાંક સંખ્યામાં છે. તેથી ઉપર મુજબનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો.)

ઉદા-2 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

x	9	10	12	15	19
y	12	13	18	17	20

જવાબ : x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક = b_{xy}

	x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	9	12	-4	-4	16	16
	10	13	-3	-3	9	9
	12	18	-1	2	4	-2
	15	17	2	1	1	2
	19	20	6	4	16	24
કુલ	65	80	—	—	46	49

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{65}{5} = 13$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{80}{5} = 16$$

\bar{x} અને \bar{y} બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તેથી

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

$$= \frac{49}{46}$$

$$= 1.0652$$

સમજૂતી :

– x અને y નો સરવાળો કરો.

– \bar{x} અને \bar{y} શોધો.

– x ની દરેક કિંમતમાંથી $\bar{x} = 13$ બાદ કરી $(x-\bar{x})$ મેળવો.

– y ની દરેક કિંમત માંથી $\bar{y} = 16$ બાદ કરી $(y-\bar{y})$ મેળવો.

– $(y-\bar{y})$ ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરી $(y-\bar{y})^2$ મેળવો.

– $(x-\bar{x})$ અને $(y-\bar{y})$ બંને કોલમનો ગુણાકાર કરી $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ મેળવો.

– b_{xy} નું ઉપર મુજબનું સૂત્ર મૂકી કિંમત શોધો.

ઉદા-૩ એક વસ્તુની માંગ અને તેના ભાવ અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. તે ઉપરથી માંગનો ભાવ ઉપરનો નિયત સંબંધ સમીકરણ શોધી જ્યારે ભાવ રૂ. 80 હોય ત્યારે માંગ શોધો.

માંગ (kg)	30	37	43	50	70
ભાવ (રૂ.) માં	24	30	41	48	67

જવાબ :

ધારો કે માંગ = x , ભાવ = y

માંગ = x નું ભાવ (y) ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ શોધવાનું છે એટલે કે x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ $x = a + b_{xy.y}$

x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
30	24	- 16	- 18	324	288
37	30	- 9	- 12	144	108
43	41	- 3	- 1	1	3
50	48	4	6	36	24
70	67	24	25	625	600
230	210	-	-	1130	1023

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{230}{5} = 46$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{210}{5} = 42$$

\bar{x} અને \bar{y} બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તેથી

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

$$= \frac{1023}{1130}$$

$$= 0.91$$

$$a = \bar{x} - b_{xy} \bar{y}$$

$$a = 46 - (0.91)(42)$$

$$= 46 - 38.22$$

$$= 7.78$$

$\therefore x = a + b_{xy} y$ માં a અને b_{xy} ની કિંમત મૂકતા

$$x = 7.78 + 0.91 y$$

$x =$ ભાવ અને $y =$ માંગ છે અને જ્યારે (y) ભાવ = 80 હોય ત્યારે માંગ (x) શોધવાનું છે.

$$\therefore x = 7.78 + 0.91 (80)$$

$$= 7.78 + 72.8$$

$$= 80.58 \text{ KG. માંગ હશે.}$$

સમજૂતી :

— ઉદા-2 મુજબ b_{xy} શોધો.

— $a = \bar{x} - b_{xy} \bar{y}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી a ની કિંમત શોધો.

— x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

— $x = a + b_{xy} y$ માં a અને b_{xy} ની કિંમતો મૂકી શોધો.

— મળેલ સમીકરણમાં $y = 80$ મૂકી x ની કિંમત શોધો.

ઉદા-4

નીચેના કોષ્ટકમાં પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર વર્ષમાં આપેલ છે તો તે ઉપરથી પત્નીનું પતિ ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો અને પતિની ઉંમર 78 વર્ષ હોય ત્યારે પત્નીની ઉંમર શોધો.

પતિની ઉંમર	25	35	42	51	67
પત્નીની ઉંમર	22	30	39	46	63

જવાબ : ધારોકે પતિની ઉંમર = x અને પત્નીની ઉંમર = y

અહીં પત્ની (y)નું પતિ (x) ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ શોધવાનું છે એટલેકે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ $Y = A + byx^x$ શોધવાનું છે.

x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
25	22	- 19	- 18	361	342
35	30	- 9	- 10	81	90
42	39	- 2	- 1	4	2
51	46	7	6	49	42
67	63	23	23	529	529
220	200	-	-	1024	1005

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{220}{5} = 44$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{200}{5} = 40$$

\bar{x} અને \bar{y} પૂર્ણાંક સંખ્યામાં છે

$$\therefore b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{1005}{1024}$$

$$= 0.98$$

$$A = \bar{y} - b_{yx} \bar{x}$$

$$= 40 - (0.98) 44$$

$$= 40 - 43.12$$

$$= - 3.12$$

પત્ની (y) નું પતિ (x) ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણમાં b_{yx} અને A ની કિંમત મુક્તિ

$$Y = A + b_{yx} x$$

$$Y = - 3.12 + (0.98) x$$

પતિ (x)ની ઉંમર = 78 હોય ત્યારે પત્નીની ઉંમર (y) કેટલા ?

$$x = 78 \text{ મુક્તિ}$$

$$y = - 3.12 + 0.98 (78)$$

$$= - 3.12 + 76.44$$

$$= 73.72$$

$$= 73 \text{ વર્ષ (લગભગ)}$$

સમજૂતી : ઉદા. -3 મુજબ b_{yx} શોધી A ની કિંમત શોધો આ બંને કિંમતો $y = A + b_{yx} x$ માં મુકી $x = 78$ લઈ જવાબ શોધો.

ઉદાહરણ : 5 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી બંને નિયત સંબંધ સમીકરણો શોધો.

x	28	31	36	40	70
y	20	28	33	39	65

જવાબ : અહીં નિયત સંબંધ સમીકરણો શોધો એવું લેખેલું છે તેથી y ની x ઉપરની અને x ની y ઉપરની એમ બંને સમીકરણો શોધીશું.

x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
28	20	- 13	- 17	169	289	221
31	28	- 10	- 13	100	169	130
36	33	- 5	- 8	25	64	40
40	39	- 1	- 2	1	4	2
70	65	29	24	841	576	696
205	185	-	-	1136	1102	1089

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{205}{5} = 41$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{185}{5} = 37$$

y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$$Y = A + b_{yx} x$$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{1089}{1136} = 0.96$$

$$A = \bar{y} - b_{yx} \bar{x}$$

$$= 37 - (0.96) 41$$

$$= 37 - 39.36$$

$$A = - 2.36$$

હવે b_{yx} અને A ની શોધેલી કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મૂકતા

$$Y = A + b_{yx} x$$

$$\therefore Y = - 2.36 + 0.96 \bar{x}$$

જે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$$x = a + b_{xy} y$$

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

$$= \frac{1089}{1102} = 0.99$$

$$\begin{aligned}
a &= \bar{x} - b_{xy} \bar{y} \\
&= 41 - (0.99) 37 \\
&= 41 - 36.63 \\
&= 4.37
\end{aligned}$$

હવે b_{xy} અને a ની કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મૂકતા

$$\begin{aligned}
\therefore x &= a + b_{xy} y \\
&= 4.37 + 0.99 y
\end{aligned}$$

જે x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ : 6 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

x	12	11	14	16	20
y	8	8	13	12	15

જવાબ :

x	y	$u = x - A$	$v = Y - B$	u^2	uv
12	8	- 3	- 3	9	9
11	8	- 4	- 3	16	12
14	13	- 1	2	1	- 2
16	12	1	1	1	1
20	15	5	4	25	20
73	56	- 2	1	52	40

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{73}{5} = 14.6 \quad \therefore A = 15$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{56}{5} = 11.2 \quad \therefore B = 11$$

અહીં \bar{x} અને \bar{y} અપૂર્ણાંક સંખ્યામાં છે. તેથી y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$\begin{aligned}
b_{yx} &= \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \\
&= \frac{5(40) - (-2)(1)}{5(52) - (-2)^2} \\
&= \frac{200 + 2}{260 - 4} \\
&= \frac{202}{256} \\
&= 0.79
\end{aligned}$$

સમજૂતી :

- x અને y નો સરવાળો કરો.
- \bar{x} અને \bar{y} (બંને મધ્યકો) શોધો.
- મધ્યકો અપૂર્ણાંકમાં આવતા હોય તો u અને v વાળું b_{yx} નું સૂત્રને ધ્યાનમાં લો.
- \bar{x} ની કિંમત 14.6 છે. તેથી તેની લગભગ કિંમત 15 છે તેને ધારેલો મધ્યક A લગભગ કિંમત કહો.
- \bar{y} ની કિંમત 11.2 છે તેથી લગભગ કિંમત 11 છે તે ધારેલો મધ્યક B કહો.
- x ના દરેક પ્રાપ્તિઓમાંથી A = 15 બાદ કરી u શોધો.
- y ના દરેક પ્રાપ્તિઓમાંથી B = 11 બાદ કરી v શોધો.
- u ના દરેક પ્રાપ્તિઓનો વર્ગ કરી u^2 મેળવો.
- u અને v ના દરેક પ્રાપ્તિઓનો ગુણાકાર કરી uv મેળવો.
- u ના સરવાળાનો Σu , v ના સરવાળાને Σv
- u^2 ના સરવાળાને Σu^2 , uv ના સરવાળાને Σuv અને $n = 5$ (પ્રાપ્તિઓની સંખ્યા) લો. સૂત્રનો ઉપયોગ કરી b_{yx} શોધો.

ઉદાહરણ : 7 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

x	11	10	13	15	20
y	10	13	16	17	19

જવાબ :

x	y	$u = x - A$	$v = y - B$	v^2	uv
11	10	-3	-5	25	15
10	13	-4	-2	4	8
13	16	-1	1	1	-1
15	17	1	2	4	2
20	19	6	4	16	24
69	75	-1	0	50	48

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{69}{5} = 13.8 \quad \therefore A = 14$$

$$\bar{y} = \frac{75}{5} = 15 \quad \therefore B = 15$$

અહીં x અપૂર્ણાંક અને \bar{y} પૂર્ણાંક છે તેથી x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \cdot \Sigma v}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}$$

$$= \frac{5(48) - (-1)(0)}{5(50) - (0)^2}$$

$$= \frac{240+1}{250}$$

$$= \frac{241}{250}$$

$$b_{xy} = 0.964$$

સમજૂતી :

- x અને y નો સરવાળો કરો.
- \bar{x} અને \bar{y} (બંને મધ્યકો) શોધો.
- \bar{x} અપૂર્ણાંક મળે છે તેને લગભગ કિંમત 14 મળે છે. તેને ધારેલો મધ્યક $A = 14$ જ્યારે \bar{y} પૂર્ણાંક મળે છે તેથી એજ કિંમતને ધારેલો મધ્યક B તરીકે લઈશું. ($B = 15$)
- x ના દરેક પ્રાપ્તોકોમાંથી $A = 14$ બાદ કરી u મેળવો.
- y ના દરેક પ્રાપ્તોકોમાંથી $B = 15$ બાદ કરી v મેળવો.
- v ના દરેક પ્રાપ્તોકોનો વર્ગ કરી v^2 મેળવો.
- u અને v નો ગુણાકાર કરી uv મેળવો.
- u ના સરવાળાને Σu , v ના સરવાળાને Σv , v^2 ના સારવાળાને Σv^2 અને uv ના સરવાળાને Σuv $n = 5$ લઈ સૂત્રમાં મૂકી b_{xy} શોધો.

ઉદાહરણ : 8 નીચેના કોષ્ટકમાં પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર આપેલ છે તો તે ઉપરથી નિયત સંબંધ સમીકરણો મેળવો અને જ્યારે પતિની ઉંમર 90 હોય ત્યારે પત્નીની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર 82 હોય ત્યારે પતિની ઉંમર શોધો.

પતિની ઉંમર	46	51	56	58	73	76	81	82
પત્નીની ઉંમર	41	42	52	55	69	72	78	80

જવાબ : ધારો કે પતિની ઉંમર = x અને પત્નીની ઉંમર = y

x	y	$u = x - A$	$v = Y - B$	u^2	v^2	uv
46	41	- 19	- 20	361	400	380
51	42	- 14	- 19	196	361	266
56	52	- 9	- 9	81	81	81
58	55	- 7	- 6	49	36	42
73	69	8	8	64	64	64
76	72	11	11	121	121	121
81	78	16	17	256	289	272
82	80	17	19	289	361	323
523	489	3	1	1417	1713	1549

$$n = 8$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{523}{8} = 65.375 \quad \therefore A = 65$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{489}{8} = 61.125 \quad \therefore B = 61$$

પરંતુ x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$$y = A + b_{yx} x$$

$$b_{yx} = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \cdot \Sigma v}{n\Sigma v^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{8(1549) - (3)(1)}{8(1417) - (3)^2}$$

$$= \frac{12,392 - 3}{11,336 - 9}$$

$$= \frac{12389}{11327}$$

$$= 1.09$$

$$\begin{aligned} A &= \bar{y} - b_{yx} \bar{x} \\ &= 61.125 - (1.09) 65.375 \\ &= 61.125 - 71.259 \\ &= -10.134 \end{aligned}$$

હવે b_{yx} અને A ની કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મુક્તા

$$\begin{aligned} Y &= A + b_{yx} x \\ &= -10.134 + 1.09 x \end{aligned}$$

જે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે એટલે કે પત્નીનું પતિ ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

પતિની ઉંમર $x = 90$ મૂક્તા પત્ની ઉંમર

$$\begin{aligned} Y &= -10.134 + 1.09 (90) \\ &= -10.134 + 98.1 \\ &= 87.97 \\ &\approx 88 \text{ વર્ષ (લગભગ)} \end{aligned}$$

પરંતુ y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$$x = a + b_{xy} y$$

$$= \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \cdot \Sigma v}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}$$

$$= \frac{8(1549) - (3)(1)}{8(1713) - (1)^2}$$

$$= \frac{12392 - 3}{13704 - 1}$$

$$= \frac{12389}{13703}$$

$$= 0.90$$

$$\begin{aligned} a &= x^2 - \bar{x} - b_{xy} \bar{y} \\ &= 65.375 - (0.9) (61.125) \\ &= 65.375 - 55.013 \\ &= 10.362 \end{aligned}$$

b_{xy} અને a ની કિંમત નીચેના સમીકરણમાં મૂકતા

$$\begin{aligned} x &= a + b_{xy} y \\ &= 10.362 + 0.9 y \end{aligned}$$

જે x (પતિ) ઉંમરનું y (પત્ની) ઉંમરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

પત્ની (y) ની ઉંમર 82 મૂકતા પતિની ઉંમર

$$\begin{aligned} x &= 10.362 + 0.9 (82) \\ &= 10.362 + 73.8 = 84.162 \\ &= 84 \text{ વર્ષ (લગભગ)} \end{aligned}$$

ઉદાહરણ : 9 એક પરીક્ષાના પરિણામ ઉપરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

	અર્થશાસ્ત્રના ગુણ	આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ
સરેરાશ	38	47
પ્રમાણિત વિચલન	10.6	16.6

x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક $= 0.41$ નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

જવાબ : ધારો કે

$$\text{અર્થશાસ્ત્રના ગુણ} = x$$

$$\text{આંકડાશાસ્ત્ર ગુણ} = y$$

$$\therefore \bar{x} = 38, \bar{y} = 47, r = 0.41 \text{ નું. પ્ર.વિ. } S_x = 10.6 \text{ નું પ્ર.વિ. } S_y = 16.6$$

y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$y = A + b_{yx} x$$

$$b_{yx} = r \frac{S_y}{S_x} = (0.41) \frac{16.6}{10.6}$$

$$= \frac{6.806}{10.6}$$

$$= 0.64$$

$$\begin{aligned} A &= \bar{y} - b_{yx} \bar{x} \\ &= 47 - (0.64) 38 \\ &= 47 - 24.32 \\ &= 22.68 \end{aligned}$$

$\therefore b_{yx}$ અને A ની કિંમત સમીકરણમાં મૂકતા

$$y = 22.68 + (0.64) x$$

જે y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$x = a + b_{xy} y$$

$$b_{xy} = r \frac{S_x}{S_y} = 0.41 \times \frac{10.6}{16.6}$$

$$= \frac{4.35}{16.6}$$

$$= 0.26$$

$$\begin{aligned} a &= \bar{x} - b_{xy} \bar{y} \\ &= 38 - (0.26) 47 \\ &= 38 - 12.22 \\ &= 25.78 \end{aligned}$$

b_{xy} અને a ની કિંમત સમીકરણમાં મુકતા

$$x = 25.78 + 0.26 y$$

જે x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ : 10 બે સંબંધિત x અને y માટે મળેલા પરિણામો નીચે મુજબ છે તેના ઉપરથી x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

$$n = 10 \quad \Sigma x = 225 \quad \Sigma y = 120$$

$$\Sigma y^2 = 2202 \quad \Sigma_{xy} = 3462$$

જવાબ : x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$x = a + b_{xy} y$$

$$\begin{aligned} \therefore b_{xy} &= \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} \\ &= \frac{10(3462) - (225)(120)}{10(2202) - (120)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{34,620 - 27,000}{22,020 - 14,400}$$

$$= \frac{7,620}{7,620}$$

$$= 1$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 22.5$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{120}{10} = 12$$

$$a = \bar{x} - bxy \bar{y}$$

$$= 22.5 - 1(12)$$

$$a = 10.5$$

x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા

$$\therefore y = 10.5 + x$$

ઉદાહરણ : 11 નીચે આપેલ બે સંબંધિત શ્રેણીના નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો ઉપરથી \bar{x} , \bar{y} અને r શોધો.

$$2x - 5y + 80 = 0$$

$$10x - 9y + 80 = 0$$

જવાબ :

$$2x - 5y = -80 \quad \dots (I)$$

$$10x - 9y = -80 \quad \dots (II)$$

આમ (I) ને 5 વડે ગુણાતા

$$10x - 25y = -400$$

$$10x - 9y = -80$$

$$- \quad + \quad +$$

$$\hline -16y = -320$$

$$y = \frac{320}{16} = 20$$

$$\therefore \bar{y} = 20$$

$\bar{y} = 20$ સમી (I) મા મૂકતા

$$2x - 5(20) + 80 = 0$$

$$2x - 100 + 80 = 0$$

$$2x - 20 = 0$$

$$2x = 20$$

$$x = \frac{20}{2} = 10$$

$$\therefore \bar{x} = 10$$

$$r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા

$$2x - 5y + 80 = 0$$

$$2x + 80 = 5y$$

$$y = \frac{2x}{5} + \frac{80}{5}$$

$$\therefore y = 16 + \frac{2}{5}x \quad \left. \vphantom{\frac{2}{5}x} \right\} \Rightarrow \text{સરખાવતા } b_{yx} \text{ મા મળશે.}$$

$$y = A + b_{yx} \cdot x \quad \left. \vphantom{b_{yx} \cdot x} \right\}$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{2}{5}$$

x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા

$$10x - 9y + 80 = 0$$

$$10x = -80 + 9y \quad \left. \vphantom{-80 + 9y} \right\}$$

$$x = \frac{-80}{10} + \frac{9}{10}y \quad \left. \vphantom{\frac{9}{10}y} \right\}$$

$$x = a + b_{xy} y \quad \Rightarrow \text{સરખાવતા } b_{xy} \text{ મળશે.}$$

$$\therefore b_{xy} = \frac{9}{10}$$

$$\therefore r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{9}{10}}$$

$$r = \sqrt{\frac{18}{50}}$$

$$= \sqrt{0.36}$$

$$= 0.6$$

ઉદાહરણ : 12 $b_{yx} = -0.5$, $Sx^2 = 12$, $r^2 = 0.75$ હોય તો S_y^2 અને b_{xy} શોધો.

$$b_{yx} = r \frac{S_y}{S_x}$$

S_y^2 શોધવાનું છે તેથી બંને બાજુ વર્ગ કરતાં

$$(b_{yx})^2 = r^2 \frac{S_y^2}{S_x^2}$$

$$(-0.5)^2 = \frac{(0.75)}{12} S_y^2$$

$$-0.25 = \frac{0.75}{12} S_y^2 = \frac{-0.25 \times 12}{0.75} = S_y^2$$

$$\frac{3}{0.75} = S_y^2$$

$$\therefore 4 = S_y^2$$

$$(b_{yx})^2 = r^2 \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

$$(b_{xy})^2 = (0.75) \frac{12}{4}$$

$$(b_{xy})^2 = (0.75) \times 3$$

$$(b_{xy})^2 = 2.25$$

બંને બાજુ વર્ગમૂળ કરતા

$$b_{xy} = \sqrt{2.25}$$

$$= 1.5$$

ઉદાહરણ : 13 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

$$\bar{x} = 21, \bar{y} = 26, S_x = 4, S_y = 12 \text{ Cov}(x, y) = 43.6$$

જવાબ : y ની x પરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$$Y = A + b_{yx} x$$

$$b_{yx} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{S_x^2}$$

$$= \frac{43.6}{(4)^2}$$

$$= \frac{43.6}{16}$$

$$2.725$$

$$\begin{aligned}
a &= \bar{y} - b_{yx} \bar{x} \\
&= 26 - (2.725) (21) \\
&= 26 - 57.225 \\
&= -31.23
\end{aligned}$$

y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$$\begin{aligned}
y &= a + b_{yx} x \\
y &= -31.23 + 2.725 x
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ : 14 x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા ઉપર બિંદુઓ (21, 5) અને (22, 10) આપેલાં છે તો તે રેખાનું સમીકરણ મેળવી $y = 15$ હોય ત્યારે x ની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

જવાબ : x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા

$$x = a + b_{xy} y \text{ અને તેની ઉપરના}$$

\therefore બિંદુઓ $\begin{matrix} x & y \\ 21, & 5 \end{matrix}$ અને $\begin{matrix} x & y \\ 22, & 10 \end{matrix}$ છે તે મૂકતા

$$21 = a + b_{xy} (5) \dots\dots\dots (1)$$

$$22 = a + b_{xy} (10) \dots\dots\dots (2)$$

બંને સમીકરણોને ઉકેલતા

$$a + 5b_{xy} = 21 \dots\dots\dots (I)$$

$$a + 10b_{xy} = 22 \dots\dots\dots (II)$$

$$\frac{a + 10b_{xy} = 22}{-5b_{xy} = -1}$$

$$\therefore b_{xy} = \frac{1}{5} = 0.2$$

સમીકરણ (1) માં $b_{xy} = 0.2$ મૂકતા

$$a + 5(0.2) = 21$$

$$a = 21 - 1$$

$$= 20$$

$\therefore x$ ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$x = a + b_{xy} y$$

$$x = 20 + 0.2y$$

$$y = 15 \text{ મુકતા}$$

$$x = 20 + 0.2 (15)$$

$$= 20 + 3$$

$$= 23$$

ઉદાહરણ : 15 દ્વિ-ચલ કોષ્ટકનો દાખલો :

નીચે આપલા દ્વિ-ચલ કોષ્ટક ઉપરતી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો શોધો.

$x \rightarrow$ $y \downarrow$			
	10-15	15-20	20-25
14-18	11	16	—
18-22	8	12	5
22-26	—	—	8

જવાબ :

x y	10-15	15-20	20-25	કુલ fv	મ. કિં y	$v =$ $\frac{Y-B}{i_y}$	$v f v$	$v^2 f v$	fuv
14-18	⑪ 11	⑩ 16	—	27	16	- 1	- 27	27	11
18-20	⑧ 8	⑩ 12	⑤ 5	25	20	0	0	0	0
22-26	—	—	⑧ 8	8	24	1	8	8	8
કુલ = fu	19	28	13	$60 = n$	—	—	- 19	35	19
મ.કિ. x	12.5	17.5	22.5	—	—				
$u = \frac{x-A}{i_x}$	- 1	0	1	—	—				
ufu	- 19	0	13	- 6	—				
$u^2 fu$	19	0	13	32	—				
fuv	11	0	8	19	—				

ધારો કે $A = 17.5$ $B = 20$ (ધારેલા મધ્યકો છે)

$i_x = 5$ અને $i_y = 4$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum u f u}{n} \times i_x$$

$$= 17.5 + \frac{(-6)}{60} \times 5$$

$$= 17.5 - 0.5$$

$$= 17$$

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= B + \frac{\sum v f_v}{n} \times i_y \\
&= 20 + \frac{(-19)}{60} \times 4 \\
&= 20 - \frac{76}{60} \\
&= 20 - 1.27 \\
&= 18.73
\end{aligned}$$

y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$\begin{aligned}
y &= A + b_{yx} x \\
b_{yx} &= \frac{n(\sum fuv) - (\sum ufu)(\sum vfv)}{n(\sum u^2 fu) - (\sum ufu)^2} \times \frac{i_y}{i_x} \\
&= \frac{60(19) - (-6)(-19)}{60(32) - (-6)^2} \times \frac{4}{5} \\
&= \frac{1140 - 114}{1920 - 36} \times \frac{4}{5} \\
&= \frac{1026 \times 4}{1884 \times 5} \\
&= \frac{4104}{9420}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{yx} &= 0.44 \\
A &= \bar{y} - b_{yx} \bar{x} \\
&= 18.73 - (0.44) 17 \\
&= 18.73 - 7.48 \\
&= 11.25
\end{aligned}$$

∴ $y = 11.25 + 0.44 x$ જે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$\begin{aligned}
x &= a + b_{xy} y \\
b_{xy} &= \frac{n(\sum fuv) - (\sum ufu)(\sum vfv)}{n(\sum v^2 fv) - (\sum vfv)^2} \times \frac{i_x}{i_y}
\end{aligned}$$

$$= \frac{60(19) - (-6)(-19)}{60(35) - (-19)^2} \times \frac{5}{4}$$

$$= \frac{1140 - 114}{2100 - 361} \times \frac{5}{4}$$

$$= \frac{1026 \times 5}{1739 \times 4}$$

$$= \frac{5130}{6956}$$

$$b_{xy} = 0.74$$

$$\begin{aligned} a &= \bar{x} - b_{xy} \bar{y} \\ &= 17 - (0.74)(18.73) \\ &= 17 - 13.86 \end{aligned}$$

$$a = 3.14$$

$$x = 3.14 + 0.74 y$$

જે x નું y ઉપરનું નિયતસંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

સમજૂતી : અહીં

$$x \rightarrow (\text{સ્તંભ})$$

↓

y આપેલ છે.

(હાર)

- ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ $x \rightarrow$ (સ્તંભ) અને $y \downarrow$ (હાર) આપેલા હોય ત્યારે દરેક સ્તંભનો સરવાળો કરો અને તેને fu વડે દર્શાવો અને દરેક હારનો સરવાળો કરો અને તેને fv વડે દર્શાવો.
- બંને ઊભા અને આડા સરવાળાનો સરવાળો કરો અને તે n વડે દર્શાવો ($n = 60$)
- x ની મધ્યકિત શોધો તેને x વડે દર્શાવો.

$$\left(\frac{10+15}{2} = \frac{25}{2} = 12.5, \frac{15+20}{2} = 17.5, \frac{20+25}{2} = 22.5 \right)$$

- y ની મધ્ય કિંમત શોધો તેને y વડે દર્શાવો.

$$\left(\frac{14+18}{2} = 16 = \frac{18+22}{2} = 20, \frac{22+26}{2} = 24 \right)$$

- મ. કિ. x ની વચ્ચેની કિંમત ને ધારેલો મધ્યક A કહો. ($A = 17.5$)
- મ. કિ. y ની વચ્ચેની કિંમતને ધારેલો મધ્યક B કહો. ($B = 20$)

- $u = \frac{x-A}{i_x}$ સૂત્ર લઈને u શોધો.

x ની દરેક કિંમત માંથી ધારેલો મધ્યક 17.5 બાદ કરી x ની વર્ગ લંબાઈ $i_x = 5$ ($15 - 10 = 5$, $20 - 15 = 5$, $25 - 20 = 5$) વડે ભાગો.

$$v = \frac{y-B}{i_y} \text{ સૂત્ર લઈને } v \text{ શોધો.}$$

y ની દરેક કિંમતમાંથી ધારેલો મધ્યક 20 બાદ કરી y ની વર્ગ લંબાઈ $i_y = 4$ ($18 - 14 = 4$, $22 - 18 = 4$, $26 - 22 = 4$) વડે ભાગો.

- u અને fu બંને હારના દરેક ઘટકોનો ગુણાકાર કરી ufu મેળવો.
- v અને fv બંને સ્તંભના દરેક ઘટકોનો ગુણાકાર કરી $vf v$ મેળવો.
- u અને ufv બંને હારના દરેક ઘટકોનો ગુણાકાર કરી u^2fu મેળવો.
- v અને $vf v$ બંને સ્તંભના દરેક ઘટકોનો ગુણાકાર કરી v^2fv મેળવો.
- (આપેલ આવૃત્તિ) f , (આવૃત્તિની સામે નીચેની બાજુ ↓) u અને આવૃત્તિની સામે સીધી બાજુ →) v એમ ત્રણેનો ગુણાકાર કરી fuv મેળવી જેને આવૃત્તિની ડાબી બાજુ વર્તુળમાં લખો.

$$f \quad x \quad u \quad x \quad v \quad = \quad fuv$$

$$11 \quad x \quad -1 \quad x \quad -1 \quad = \quad \textcircled{11} \quad \text{તેવી જ રીતે અન્ય}$$

નોંધ :- u અને v ની કિંમતોમાં 0 આવતુ હોય ત્યાં હાર અને સ્તંભમાં fuv ની કિંમત 0 જ આવશે તેથી સૌ પ્રથમ $u = 0$ હોય ત્યાં ઊભા સ્તંભમાં તમામ આવૃત્તિની બાજુમાં 0 વર્તુળમાં શૂન્ય લખો તેવી જ રીતે $v = 0$ હોય ત્યાં આડી હારમાં તમામ આવૃત્તિની બાજુમાં 0 વર્તુળમાં શૂન્ય લખો. ત્યારબાદ બાકીની આવૃત્તિની કિંમત માટે (fuv) શોધો.

- કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા મુજબ ufu , u^2fu , fuv ત્રણેનો આડી હારમાં સરવાળો કરી Σufu , Σu^2fu અને Σfuv મેળવો.

$$\Sigma ufu = -6, \quad \Sigma u^2fu = 32, \quad \Sigma fuv = 19$$

તેવી જ રીતે $vf v$, v^2v , fuv ત્રણેનો ઊભા સ્તંભમાં સરવાળો કરી $\Sigma vf v$, Σv^2fv અને Σfuv શોધો.

$$\Sigma vf v = -19 \quad \Sigma v^2fv = 35, \quad \Sigma fuv = 19$$

- દાખલામાં બતાવ્યા મુજબ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને \bar{x} અને \bar{y} ની કિંમત શોધો.

$$\bar{x} = 17, \quad \bar{y} = 18, \quad 73$$

- y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$Y = A + b_{yx} x$ લો. તેમાંથી b_{yx} અને A ની કિંમત દાખલામાં બતાવ્યા મુજબ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શોધો.

($b_{yx} = 0.44$, $A = 11.25$) આ બંને કિંમતો ઉપરના સમીકરણમાં મુકી y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો.

$$y = 11.25 + 0.44 x$$

- તેવી જ રીતે x ને બદલે y અને y ને બદલે x મુકી x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ લો.

$$x = a + b_{xy} y$$

હવે b_{xy} અને a ની કિંમત શોધો.

$$(b_{xy} = 0.74, a = 3.14)$$

x નું y ઉપરનું સંબંધ સમીકરણ મેળવો.

$$x = 3.14 + 0.74 y$$

ખાસ નોંધ : જો દાખલામાં

x	y	\rightarrow	સ્તંભ	આપેલ હોય.
\downarrow				
(હાર)				

f_{uv} = x માટેની ગણતરીનું કોષ્ટક ઊલટી રીતે ગણાશે. એટલે કે x માટે $\rightarrow f_u, x, u, u^2f_u, f_{uv}$ શોધાશે. જ્યારે ચલ y માટેની ગણતરી.

y માટે
\downarrow
f_v
y
v
$v f_v$
$v^2 f_v$
f_{uv}

જે નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજી શકાશે.

ઉદાહરણ : 16 નીચે આપેલી દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની મદદથી y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો અને $x = 60$ હોય ત્યારે y ની કિંમતનું આગલાન કરો.

	y			
x	25	30	35	40
15-25	8	3	—	—
25-35	2	5	2	2
35-45	—	2	9	6
45-55	—	—	5	6

$x \ y \rightarrow$					કુલ	મ.કે.	$u =$			
\downarrow	25	30	35	40	fu	x	$\frac{x-A}{i_x}$	ufu	u^2fu	fuv
15-25	①68	③	-	-	11	20	-1	-11	11	19
25-35	①2	①5	①2	①2	11	30	0	0	0	0
35-45	-	-②2	①9	①6	17	40	1	17	17	4
45-55	-	-	①5	①26	11	45	2	22	44	12
કુલ fv	10	10	16	14	50 = n	-	-	28	72	35
મ.કે. y	25	30	35	40						
$v = \frac{y-B}{i_y}$	-2	-1	0	1	-					
vf v	-20	-10	0	14	-16					
v^2fv	40	10	0	14	64					
fuv	16	1	0	18	35					

$A = 30, i_x = 10$ (સમજૂતી 20, 30, 40, 50..... અંતર = 10)

$B = 35, i_y = 5$ (25, 30, 35, 40.....) અંતર = 5

$n = 50$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma ufu}{n} \times i_x$$

$$= 30 + \frac{28}{50} \times 10$$

$$= 30 + 5.6$$

$$= 35.6$$

$$\bar{y} = B + \frac{\Sigma vfv}{n} \times i_y$$

$$= 35 + \frac{-16}{50} \times 5$$

$$= 35 - 1.6$$

$$= 33.4$$

y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$y = A + b_{yx} x$$

$$b_{yx} = \frac{n(\Sigma fuv) - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{n\Sigma u^2 fu - (\Sigma ufu)^2} \times \frac{i_y}{i_x}$$

$$= \frac{50(35) - (28)(-16)}{50(72) - (28)^2} \times \frac{5}{10}$$

$$= \frac{1750 + 448}{3600 - 784} \times \frac{5}{10}$$

$$= \frac{2198 \times 5}{2816 \times 10}$$

$$= \frac{10990}{28160}$$

$$= 0.39$$

$$\begin{aligned} A &= \bar{y} - b_{yx} \bar{x} \\ &= 33.4 - 0.39 (35.6) \\ &= 33.4 - 13.88 \\ &= 19.52 \end{aligned}$$

$\therefore y = 19.52 + 0.39 x$ જે y નું x ઉપરનું નિયત સમીકરણ $x = 60$ મુક્ત

$$y = 19.52 + 0.39 (60)$$

$$y = 19.52 + 23.4$$

$$= 42.92$$

ઉદાહરણ : 17 એક દ્વિ.ચલ કોષ્ટકમાં $b_{yx} = 2.61$, $b_{xy} = 0.29$ અને $a = 5.62$ પરિણામો મળે છે. તો તે ઉપરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\begin{aligned} \text{સહસંબંધાંક } r &= \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}} \\ &= \sqrt{2.61 \times 0.29} \\ &= \sqrt{0.7569} \\ &= 0.87 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ : 18 એક દ્વિચલ કોષ્ટકમાં $r = 0.76$ અને $b_{yx} = 0.76$ હોય તો $b_{xy} = ?$

$$\text{જવાબ : } r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

$$0.76 = \sqrt{0.76 \times b_{xy}}$$

બંને બાજુ વર્ગ લેતા

$$(0.76)^2 = 0.76 \times b_{xy}$$

$$\frac{0.76 \times 0.76}{0.76} = b_{xy}$$

$$\therefore b_{xy} = 0.76$$

ઉદાહરણ : 19 બે સંબંધિત ચલ x અને y માટે નીચેના પરિણામો મળ્યા હતા.

$n = 20$, $\Sigma x = 100$, $\Sigma y = 80$, $\Sigma x^2 = 600$, $\Sigma y^2 = 550$, $\Sigma xy = 500$ પાછળથી એવું જાણવા મળ્યું કે માહિતીમાં બે જોડકાં (6, 8) અને (8, 12) ને બદલે (8, 6) અને (6, 14) લેવાય ગયા છે. તો બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સાચા સમીકરણો મેળવો અને સહસંબંધાંક પણ શોધો.

જવાબ : અહીં માહિતીમાં ભૂલ છે તેથી બે જોડકા (6, 8) અને (8, 12) ને બદલે (8, 6) અને (6, 14) લેવાય ગયા છે. તેથી

સાચા જોડકા ઉમેરાશે જે $\begin{matrix} x & y \\ 6 & 8 \end{matrix}$ અને $\begin{matrix} x & y \\ 8 & 12 \end{matrix}$ છે.

ખોટા જોડકા બાદ થશે જે $\begin{matrix} x & y \\ 8 & 6 \end{matrix}$ અને $\begin{matrix} x & y \\ 6 & 14 \end{matrix}$ છે.

તેથી દાખલામાં આપેલ તમામ પરિણામો સુધારી સાચા પરિણામો મેળવીશું.

સુધારેલો $\Sigma x =$ ખોટો $\Sigma x + x$ ની સાચી કિંમત $- x$ ની ખોટી કિંમત

$$= 100 + \begin{matrix} x & x & x & x \\ 6 & + & 8 & - & 8 & + & 6 \end{matrix}$$

$$= 100 + 14 - 14$$

$$= 100$$

સુધારેલો $\Sigma y =$ ખોટો $\Sigma y + y$ ની સાચી કિંમત $- y$ ની ખોટી કિંમત

$$= 80 + (8 + 12) - (6 + 14)$$

$$= 80 + 20 - 20$$

$$= 80$$

સુધારેલો $\Sigma x^2 =$ ખોટો $\Sigma x^2 + x^2$ ની સાચી કિંમત $- x^2$ ની ખોટી કિંમત

$$= 600 + (6^2 + 8^2) - (8^2 + 6^2)$$

$$= 600 + (36 + 64) - (64 + 36)$$

$$= 600 + 100 - 100$$

$$= 600$$

સુધારેલો $\Sigma y^2 =$ ખોટો $\Sigma y^2 + y^2$ ની સાચી કિંમત $- y^2$ ની ખોટી કિંમત

$$= 550 + (8^2 + 12^2) - (6^2 + 14^2)$$

$$= 550 + (64 + 144) - (36 + 196)$$

$$= 550 + 208 - 232$$

$$= 526$$

સુધારેલો $\Sigma xy =$ ખોટો $\Sigma xy +$ ખોટો Σxy ની સાચી કિંમત $- xy$ ની ખોટી કિંમત

$$= 500 + [(6 \times 8) - [(8 \times 12)] - [(8 \times 6) (8 \times 14)]$$

$$= 500 + [48 + 96] - [48 + 84]$$

$$= 500 + 144 - 132$$

$$= 512$$

y નું x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$Y = A + b_{yx} x$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{20(512) - (100)(80)}{20(600) - (100)^2}$$

$$= \frac{10,240 - 8,000}{12,000 - 10,000}$$

$$= \frac{2240}{2000}$$

$$b_{yx} = 1.12$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{80}{20} = 4$$

$$A = \bar{y} - b_{yx} \bar{x}$$

$$= 4 - (1.12)(4)$$

$$= 4 - 4.48$$

$$= -0.48$$

$y = -0.48 + 1.12 x$ જે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$$x = a + b_{xy} \cdot y$$

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$$

$$= \frac{20(512) - (100)(80)}{20(526) - (80)^2}$$

$$= \frac{10,240 - 8,000}{10,520 - 6,400}$$

$$= \frac{2240}{4120}$$

$$b_{xy} = 0.54$$

$$\begin{aligned} a &= \bar{x} - b_{xy} \bar{y} \\ &= 5 - (0.54) 4 \\ &= 5 - 2.16 \\ &= 2.84 \end{aligned}$$

$\therefore x = 2.84 + 0.54 y$ જે x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

$$\begin{aligned} \text{સહસંબંધાંક } r &= \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}} \\ &= \sqrt{1.12 \times 0.54} \\ &= \sqrt{0.6048} \\ &= 0.78 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ : 20 એક દ્વિ-ચલ નિદર્શ માટે નીચેની માહિતી મળેલ છે તે ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો શોધો.

$$n = 10 \quad x \text{નો ધારેલો મધ્યક} = 40$$

$$y \text{નો ધારેલો મધ્યક} = 30$$

$$x \text{ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો} = -168$$

$$y \text{ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો} = -19$$

$$x \text{ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો} = 8200$$

$$y \text{ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો} = 2300$$

$$x \text{ અને } y \text{ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો} = 3420$$

જવાબ :

$$\begin{aligned} n = 10, A = 40, B = 30, \Sigma u = \Sigma(x - A) = -168 \quad \Sigma v = \Sigma(y - B) = -19, \Sigma u^2 = \Sigma \\ (x - A)^2 = 8200, \Sigma v^2 = \Sigma(y - B)^2 = 2300, \Sigma uv = \Sigma(x - A)(y - B) = 3420 \end{aligned}$$

y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$y = A + b_{yx} x$$

$$b_{yx} = \frac{n \Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n \Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{10(3420) - (-168)(-19)}{10(8200) - (-168)^2}$$

$$= \frac{34,200 - 3,192}{82000 - 28,224}$$

$$= \frac{31,008}{53,776}$$

$$= 0.58$$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma u}{n}$$

$$= 40 + \frac{-168}{10}$$

$$= 40 - 16.8$$

$$= 23.2$$

$$\bar{y} = B + \frac{\Sigma v}{n}$$

$$= 30 + \frac{-19}{10}$$

$$= 30 - 1.9$$

$$= 28.1$$

$$A = \bar{y} - b_{yx} \bar{x}$$

$$= 28.1 - (0.58) 23.2$$

$$28.1 - 13.456$$

$$= 14.644$$

$$y = 14.644 + (0.58) x$$

જે y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ છે.

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$$x = a + b_{xy} y$$

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{10(3420) - (-168)(-19)}{10(2300) - (-19)^2}$$

$$= \frac{34,200 - 3,192}{23,000 - 361}$$

$$= \frac{31,008}{22,639} = 1.37$$

$$\begin{aligned}
a &= \bar{x} - b_{xy} \bar{y} \\
&= 23.2 - (1.37) (28.1) \\
&= 23.2 - 38.497 \\
&= -15.297
\end{aligned}$$

$x = -15.297 + 1.37 y$ જે x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ : 21 જો $b_{yx} = -0.375$ અને $S_y : S_x = 1:2$ હોય તો r અને b_{xy} શોધો.

જવાબ :

$$b_{yx} = r \frac{S_y}{S_x}$$

$$-0.375 = r \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
r &= (-0.375) \times 2 \\
&= -0.75
\end{aligned}$$

$$b_{xy} = r \frac{S_x}{S_y}$$

$$= (-0.75) \frac{2}{1}$$

$$= -1.5$$

12.10 સ્વાધ્યાય

* પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

1. નિયત સંબંધ એટલે શું ?
2. નિયત સંબંધ રેખા કેટલી હોય છે કઈ કઈ ?
3. નિયત સંબંધાંક એટલે શું ?
4. નિયત સંબંધ સમીકરણો કયાં કયા છે તે લખો.
5. નિયત સંબંધની મર્યાદાઓ લખો.
6. નિયત સંબંધ રેખાના ગુણધર્મો લખો.
7. નિયત સંબંધાંકોના પ્રકાર લખો.
8. નિયત સંબંધાંકોના સૂત્રો લખો.
9. y ની x ઉપરની રેખાનું નિયત સંબંધ સમીકરણ લખી b_{yx} અને A નું સૂત્ર લખો.
10. x ની y ઉપરની રેખાનું નિયત સંબંધ સમીકરણ લખી b_{xy} અને a નું સૂત્ર લખો.

(B) નીચે આપેલા દાખલાઓ ગણો.

(1) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંકો શોધો.

x	13	12	15	17	23
y	10	10	13	12	15

(જવાબ : $b_{yx} = 0.45$)

(2) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક શોધો.

x	26	24	20	37	23
y	22	24	20	26	18

(જવાબ : $b_{xy} = 1.6$)

(3) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી બંને નિયત સંબંધાંકો શોધો.

x	65	60	65	60	50	65	60	50	55	55
y	15	14	15	13	13	16	16	11	13	14

(જવાબ : $b_{yx} = 0.22$, $b_{xy} = 2.96$)

(4) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી બંને નિયત સંબંધાંકો શોધો.

x	43	41	45	46	42	44	40
y	39	37	41	40	38	36	35

(જવાબ : $b_{yx} = b_{xy} = 0.75$)

(5) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

માંગ	10	20	30	40	50
કિંમત રૂ. માં	25	30	20	10	15

(જવાબ : y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ

$$y = 32 - 0.4x$$

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ $x = 62 - 1.6y$)

(6) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો શોધો.

x	28	33	35	33	32	38	46	36	40	41
y	30	26	30	31	31	34	28	26	31	34

(જવાબ : $A = 36$, $B = 30$, $b_{yx} = 0.07$, $b_{xy} = 0.24$, $n = 10$)

y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ = $y = 27.6 + 0.07x$

x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ = $x = 29.07 + 0.24y$)

(7) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો અને $x = 78$ હોય ત્યારે y ની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

x	75	75	71	69	72	74	70	71
y	70	71	69	69	72	76	67	68

(જવાબ : $y = 17.9 + 0.73x$, $y = 74.8$)

(8) નીચે આપેલી માહિતી પરથી y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો. અને $x = 15$ હોય ત્યારે x ની કિંમત શોધો.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	2	4	5	6	3	8	7

(જવાબ : $y = -1 + 0.75x$, $y = 10.25$)

(9) એક પરીક્ષાના પરિણામ ઉપરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

	ભુગોળના ગુણ	ઈતિહાસના ગુણ
સરેરાશ	25	40
પ્રમાણિત વિચલન	3	6

સહસંબંધક = 0.8

નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

(સંકેત : y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$y = 0 + 1.6 x$, x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $x = 9 + 0.4 y$)

(10) બે સંબંધિત ચલ x અને y માટે મળેલા પરિણામો નીચે મુજબ છે. તેના ઉપરથી y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવી. $x = 60$ હોય ત્યારે y ની કિંમતનું અનુમાન કરો.

$n = 10, \Sigma u = 580, \Sigma v = 370, \Sigma u^2 = 41650, \Sigma v^2 = 30860, \Sigma uv = 11490$

(જવાબ : y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = 109.21 - 1.25 x$, $y = 34.21$)

(11) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

$n = 10, \Sigma x = 100, \Sigma y = 205, \Sigma x^2 = 2000, \Sigma y^2 = 1750, \Sigma xy = 3202$

(જવાબ : $y = 9.5 + 1.1 x$)

(12) નીચે આપેલ દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની મદદથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

$x \backslash y$	20-30	30-40	40-50	50-60	કુલ
20-30	20	26	—	—	46
30-40	8	14	37	—	59
40-50	—	4	18	3	25
50-60	—	—	4	6	10
કુલ	28	44	59	9	—

(જવાબ : $y = 3.37 + (0.72) x$, $x = 12.72 + 0.694 \bar{x}$, $\bar{x} = 29.9$, $\bar{y} = 24.9$)

(13) નીચેના દ્વિચલ કોષ્ટકમાં આપેલી માહિતીની મદદથી y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ શોધો અને $x = 25$ હોય ત્યારે y ની કિંમતનું અનુમાન કરો.

y_1	x		
	5-10	10-15	15-20
16	9	14	—
20	6	11	3
24	—	—	7

(જવાબ : $i_x = 5, i_y = 4, \bar{x} = 27, \bar{y} = 20.72, y = 8.03 + 0.47x, \hat{y} = 19.78$)

(14) જો $b_{xy} = -1.5$ અને $\frac{S_y}{S_x} = \frac{1}{2}$ હોય તો b_{xy} અને સહસંબંધકની કિંમત શોધો.

(જવાબ : $b_{yx} = -0.375$, $r = -0.75$)

(15) નીચે આપેલા બે સંબંધિત શ્રેણીના નિયત સંબંધ રેખાના સીકરણો ઉપરથી \bar{x} , \bar{y} અને r શોધો.

$$16x - 4y = -160$$

$$15x - 2y = 95$$

(જવાબ : $\bar{x} = 25$, $\bar{y} = 140$, $r = 0.72$)

(16) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો અને $y = 26$ હોય ત્યારે x ની કિંમતનું અનુમાન કરો અને $x = 12$ હોય ત્યારે y ની કિંમતનું અનુમાન કરો.

$$\bar{x} = 25.5, \bar{y} = 40, S_x = 2.4, S_y^2 = 36 \text{ અને } \text{Cov}(x, y) (\text{સહવિચરણ } x, y) = 11.52$$

(જવાબ : y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = -11 + 2x \Rightarrow x = 12$ ત્યારે $y = 13$)

$$x = 12.7 + 0.32y \Rightarrow y = 26 \text{ ત્યારે } x = 21.02$$

(17) x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $4y - 5x = 8$ અને y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $2x - 3y = -4$ હોય તો બે નિયત સંબંધોનો શોધો અને જો x નું વિચરણ 9 હોય તો y નું પ્ર.વિ. શોધો.

(જવાબ : $b_{xy} = 0.8$, $b_{yx} = 0.67$, $S_y = 2.74$)

(18) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા ઉપર બિંદુઓ (8, 24) અને (12, 25) આપેલા છે. તો તે રેખાનું સમીકરણ મેળવી $x = 12$ હોય ત્યારે y ની કિંમતનું અનુમાન કરો.

(જવાબ : $b_{yx} = 0.25$, $y = 22 + 0.25x$ ($x = 12$ ત્યારે $y = 25$))

(19) એક દ્વિ-ચલ કોષ્ટક માટે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે. તે ઉપરથી નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો મેળવો.

$$n = 10$$

$$x\text{નો ધારેલો મધ્યક} = 25$$

$$y\text{નો ધારેલો મધ્યક} = 23$$

$$x\text{ના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોનો સરવાળો} = 5$$

$$y\text{ના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોનો સરવાળો} = 0$$

$$x\text{ના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો} = 85$$

$$y\text{ના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો} = 144$$

$$x \text{ અને } y\text{ના ધારેલા મધ્યકોમાંથી વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો} = 105$$

(જવાબ : $\bar{x} = 25.5$, $\bar{y} = 23$, $y = -9.39 + 1.27x$, $x = 8.71 + 0.73y$)

(20) બે સંબંધિત ચલ x અને y માટે નીચેના પરિણામો મળ્યા છે.

$n = 30$, $\Sigma x = 130$, $\Sigma y = 100$, $\Sigma x^2 = 300$, $\Sigma y^2 = 620$, $\Sigma xy = 360$ છે. પાછળથી એવું માલૂમ પડ્યું કે પ્રાપ્તકોના બે જોડકાં (8, 12) અને (10, 8) ને બદલે (8, 10) અને (12, 7) લીધેલાં હતા તો y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા શોધો.

(જવાબ : $\Sigma x = 128$, $\bar{x} = 4.27$, $\Sigma y = 103$, $\bar{y} = 3.43$, $\Sigma x^2 = 359$, $\Sigma y^2 = 576$, $\Sigma xy = 372$, $b_{yx} = 0.36$, $y = 4.97 + 0.36x$)

12.11 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો :

(1) નિયત સંબંધ રેખાઓની સંખ્યા હોય છે.

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) એક પણ નહીં

- (2) બે નિયત સંબંધ રેખાઓ એકબીજાને અને માં છેદ છે.
 (A) S_x, S_y (B) \bar{x}, \bar{y} (C) a, β (D) A, a
- (3) બે નિયત સંબંધોકોના ગુણાકાર =
 (A) r (B) r^2 (C) b_{yx} (D) b_{xy}
- (4) સહસંબંધાંક નિયત સંબંધોકોનો મધ્યક છે.
 (A) સમાંતર (B) હરાત્મક (C) ગુણોત્તર (D) એકપણ નહીં
- (5) y નો x ઉપરનો નિયત સંબંધાંક $b_{yx} = \frac{?}{S_x^2}$
 (A) વિચરણ (x, y) (B) સહ વિચરણ (x, y)
 (C) પ્ર.વિ. (x, y) (D) એક પણ નહીં
- (6) x નો y ઉપરનો નિયત સંબંધાંક
 $b_{xy} =$ સહ વિચરણ $(x, y) \div ?$
 (A) S_x^2 (B) S_y^2 (C) S_x (D) S_y
- (7) જો $r = 0.65$ અને $\frac{S_y}{S_x} = \frac{1}{2}$ હોય તો $b_{yx} = \dots\dots\dots$ અને $b_{xy} = \dots\dots\dots$
 (A) 3.25, 1.3 (B) 1.3, 0.325 (C) 0.325, 1.3 (D) એકપણ નહીં
- (8) જો $r = 0.72$ હોય તો $b_{yx} = \dots\dots\dots$ અને $b_{xy} = \dots\dots\dots$
 (A) 0.72, 0.52 (B) 0.52, 0.84
 (C) 0.52, 0.72 (D) 0.72, 0.72
- (9) જો $n = 9, \Sigma u = 7, \Sigma v = 0, \Sigma u^2 = 80, \Sigma v^2 = 140, \Sigma uv = 110$ હોય તો $b_{yx} = \dots\dots\dots$
 (A) 0.67 (B) 0.79 (C) 1.48 (D) 1.27
- (10) જો $n = 9, \Sigma u = 7, v = 0, \Sigma u^2 = 80, \Sigma v^2 = 140, \Sigma uv = 110$ હોય તો $b_{xy} = \dots\dots\dots$
 (A) 0.67 (B) 0.79 (C) 1.48 (D) 1.27
- (11) જો $A = 92, a = 32, b_{yx} = -0.43, b_{xy} = 0.78$ હોય તો y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ
 $= \dots\dots\dots$
 (A) $y = 92 + 0.43 x$ (B) $y = 92 - 0.43 x$
 (C) $x = 32 + 0.78 y$ (D) $y = 32 - 0.43 x$
- (12) જો $A = 92, a = 32, b_{yx} = -0.43, b_{xy} = 0.78$ હોય તો x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધ સમીકરણ
 $= \dots\dots\dots$
 (A) $x = 92 + 0.43 y$ (B) $x = 92 - 0.43 x$
 (C) $y = 32 - 0.43 x$ (D) $y = 32 + 0.78 x$
- (13) એક દ્વિચલ કોષ્ટક માટે $n = 100, \Sigma f_{uv} = 98, \Sigma u f_{uv} = (-8), \Sigma v f_{uv} = -9, \Sigma u^2 f_{uv} = 122, i_x = i_y = 10$ હોય તો $b_{yx} = \dots\dots\dots$
 (A) 0.8 (B) 1.25 (C) 1.47 (D) એકપણ નહીં

(14) એક દ્વિચલ કોષ્ટક માટે $n = 100$, $\Sigma fuv = 99$, $\Sigma ufu = -8$, $\Sigma vfv = -9$, $\Sigma v^2fv = 120$, $i_x = i_y = 10$ હોય તો $b_{xy} = \dots\dots\dots$

- (A) 0.82 (B) 1.23 (C) 1.25 (D) એકપણ નહીં

(15) જો b_{yx} , b_{xy} ની કિંમત ધન કિંમતો હોય તો સહસંબંધકની કિંમત $\dots\dots\dots$ જ્યારે b_{xy} , b_{yx} ની કિંમતો ઋણ કિંમત હોય તો સહસંબંધકની કિંમત = $\dots\dots\dots$

- (A) +, + (B) -, - (C) +, - (D) -, +

(16) y નો x ઉપરના નિયત સંબંધક ને $\dots\dots\dots$ વડે અને x ના y ઉપરના નિયત સંબંધકને $\dots\dots\dots$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

- (A) b_{xy} , b_{yx} (B) b_{yx} , b_{xy} (C) r_{xy} , r_{yx} (D) r_x , r_y

(17) y નું x ઉપરનું નિયત સંબંધક $b_{yx} = \frac{\text{--નું પ્ર. વિ}}{\text{--નું પ્ર. વિ}} \times \text{સહસંબંધક}$

- (A) y , x (B) x , y (C) B, A (D) એક પણ નહીં

(18) x નું y ઉપરનું નિયત સંબંધક $b_{xy} = \frac{\text{--નું પ્ર. વિ}}{\text{--નું પ્ર. વિ}} \times \text{સહસંબંધક}$

- (A) y , x (B) x , y (C) A, a (D) એકપણ નહીં

(19) બે શ્રેણીના નિયત સંબંધકો 0.6 અને 0.4 છે તો તે બે વચ્ચેનો સહસંબંધક $\dots\dots\dots$

- (A) 0.49 (B) 0.24 (C) 0.34 (D) એક પણ નહીં

(20) જો $r = 1$, $b_{yx} = 0.5$ હોય તો $b_{xy} = \dots\dots\dots$

- (A) 0.5 (B) 1 (C) 2 (D) 2.5

(21) બે ચલ x અને y માટે નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણો $6y = 5x + 90$ અને $10x = By + 90$ છે. જો $\bar{x} = 18$ હોય તો $\bar{y} = \dots\dots\dots$ અને $B = \dots\dots\dots$

- (A) 15, 5 (B) 30, 3 (C) 18, 3 (D) એકપણ નહીં

(સમજૂતી : $\bar{x} = 18$ છે. $\therefore x = 18$, $6y = 5x + 90$ માં મૂકતા $6y = 5(18) + 90$

$\therefore y = \frac{180}{6} = 30 \therefore \bar{y} = 30$ હવે $x = 18$ અને $y = 30$, $10x = BY + 90$ માં મૂકતાં $10(18)$

$$10 = B(30) + 90, \frac{180 - 90}{30} = B, B = 3)$$

(22) b_{yx} , b_{xy} અને r ના ચિહ્નોનો આધાર $\dots\dots\dots$ ઉપર છે.

- (A) વિચરણ (B) પ્રમાણિત વિચલન (C) સહ વિચરણ (D) એકપણ નહીં

(23) x જો y પરની નિયત સંબંધક શોધવા જ્યારે \bar{x} અને \bar{y} પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવતુ હોય ત્યારે $b_{xy} = \dots\dots\dots$ સૂત્ર લેવુ વધુ હિતાવહ છે.

(A) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$ (B) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

(C) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$ (D) $\frac{\Sigma(x-A)(y-B)}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$

(24) y ને x પરની નિયત સંબંધાંક શોધવા જ્યારે \bar{x} અને \bar{y} પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે $b_{yx} = \dots\dots\dots$ સૂત્ર લેવું વધુ હિતાવહ છે.

- (A) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$ (B) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$
 (C) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$ (D) $\frac{\Sigma(x-A)(y-B)}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$

(25) x નો y પરનો નિયત સંબંધાંક શોધવા જ્યારે \bar{x} અને \bar{y} પૂર્ણાંક સંખ્યામાં ન આવે ત્યારે $b_{xy} = \dots\dots\dots$ સૂત્ર લેવું વધુ હિતાવહ છે.

- (A) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$ (B) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$
 (C) $\frac{n\Sigma uv - \Sigma u \cdot \Sigma v}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$ (D) $\frac{n\Sigma uv - \Sigma u \cdot \Sigma v}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}$

(26) y નો x પરનો નિયત સંબંધાંક શોધવા જ્યારે \bar{x} અને \bar{y} પૂર્ણાંક સંખ્યામાં ન આવે ત્યારે $b_{xy} = \dots\dots\dots$

- (A) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$ (B) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$
 (C) $\frac{n\Sigma uv - \Sigma u \cdot \Sigma v}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$ (D) $\frac{n\Sigma uv - \Sigma u \cdot \Sigma v}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}$

જવાબ :

- (1) A (2) B (3) B (4) C (5) B (6) B (7) C (8) D (9) C (10) B (11) B (12) D (13) A
 (14) A (15) C (16) B (17) A (18) B (19) A (20) C (21) B (22) C (23) A (24) B
 (25) D (26) C

12.12 ચાવીરૂપ શબ્દો :

- નિયત સંબંધ – બે ચલ પૈકી એક ચલના ફેરફારથી બીજા ચલ પર પડતી અસર જાણવા માટેની રીત.
 નિયત સંબંધોક : નિયત સંબંધનું માપ
 શ્રેષ્ઠ અન્યવાયોજીત રેખા – શ્રેષ્ઠ રેખા
 મોડેલો – સમીકરણો

સંદર્ભ ગ્રંથ

- ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ મૈસુરીયા એન્ડ પટેલ અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ, 2019
- “આંકડા શાસ્ત્ર જોષી પંચોળી, કરકર” * સી જમનાદાસ (પ્રકાશન) અમદાવાદ - 1998-99
- “Business Statistics” sachdeva, Laxminarayan Agrwal, 2005
- “આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ” પટેલ, જોશી, કાસુન્દ્રા સી. જમનાદાસ કંપની (પ્રકાશન) અમદાવાદ-2003
- ‘Statistics’ “sancheti & Kapoor” Sultan Chand & Sons, New Delhi – 2007.

* * *