એકમ–17

આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાન
STATISTICAL INFERENCE

: રૂપરેખા :

17.0 હેતુઓ

17.1 પ્રસ્તાવના

17.2 આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાનની વિભાવના

17.3 આંકડાશાસ્ત્રીય પરિમાપન

17.4 ઉત્કલ્પના પરીક્ષણની વિભાવના

17.5 નિરાકરણ ક્ષેત્રો અને ભૂલોના પ્રકારો

17.6 એક નમૂના માટે ઉત્કલ્પના પરીક્ષણ

17.7 બે નમૂનાઓ વચ્ચેના તફાવત માટે પરીક્ષણ

17.8 આસંગ સારણી

17.9 સારાંશ

17.10 તમારી પ્રગતિ ચકાસોના ઉત્તરો

17.11 ચાવીરૂપ શબ્દો

17.12 સંદર્ભો અને વિશેષ વાચન

17.0 હેતુઓ (OBJECTIVES)

◆ **આ એકમના અભ્યાસ બાદ તમે નીચેની બાબતો માટેની સ્થિતિમાં હોવા જોઈએ.**

- ઉત્કલ્પનાની વિભાવના સમજાવવી ;
- આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાનની વિભાવના સમજાવવી ;
- એક નમૂના આધારિત ઉત્કલ્પના પરીક્ષણ કરવું ; અને
- બે નમૂનાઓ વચ્ચેના તફાવતનું પરીક્ષણ કરવું.

17.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આ અભ્યાસક્રમના એકમ-6માં દર્શાવ્યા મુજબ કેટલાક અવરોધકોને કારણે આપણે કુલ નિદર્શ અવકાશને બદલે નમૂનાનો સર્વે હાથ ધરીએ છીએ. આ અવરોધકો સમય, માનવશક્તિ અને નાણાંની પ્રાપ્યતા હોઈ શકે. પ્રશ્નાવલિ, મુલાકાત અથવા અવલોકન પદ્ધતિ દ્વારા માહિતી (ડેટા) એકત્રિત કર્યા બાદ આપણે ડેટાની સારણીઓ, રજૂઆત અને ડેટાના પૃથક્કરણ જેવા કેટલાક પગથિયાં-તબક્કાને અનુસરીએ છીએ. આ બાબતની ચર્ચા આપણે અગાઉના એકમોમાં કરી ચૂક્યા છીએ. તમે જાણો છો તે મુજબ, માહિતી (ડેટા)ને સારણીઓ તથા ગ્રાફ સ્વરૂપે રજૂ કરી શકીએ છીએ. ડેટાનું વિવિધ આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ કરીને પણ મૂકી શકીએ છીએ. આ રીતે આપણે (1) મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપ જેવા કે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક, (2) પ્રસારમાનના માપ જેવા કે વિચરણ, પ્રમાણિત વિચલન અને (3) સહસંબંધાંક અને નિયત સંબંધાંક શોધી શકીએ છીએ.

યાદ રાખો કે આપણો હેતુ માત્ર નમૂનાનો નહિ પણ વસ્તી અથવા સમગ્ર સમષ્ટિની વર્તણૂંકનું પૃથક્કરણ કરવાનો હોય છે. આ બાબત શક્ય બનાવી શકાય તે માટે આપણે નમૂનાનો અભ્યાસ કરીએ છીએ. પરિણામે આપણે જે પરિણામ પ્રાપ્ત કરીએ છીએ તે નમૂના આધારિત હોય છે. સામાન્ય રીતે પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થાય કે : શું પરિણામો સમષ્ટિ માટે માન્ય છે ? બીજા શબ્દોમાં, નમૂના આધારિત પરિણામો અનુમાન કરી શકીએ છીએ ?

ચાલો આપણે આપણા દૈનિક જીવનમાંથી એક સઘન ઉદાહરણ લઈએ. તમે નોંધ્યુ હશે કે ઘણા

સમાચારપત્રો અથવા સમાચાર આપતી ચેનલ્સ દ્વારા ચૂંટણી પ્રક્રિયા શરૂ થાય તે પહેલાં અથવા ચૂંટણી પરિણામો જાહેર થાય તે પહેલાં મતગણતરીનો સર્વે હાથ ધરતા હોય છે. આનો હેતુ વાસ્તવિક પરિણામો જાહેર થાય તે પહેલાં ચૂંટણી પરિણામોનું પૂર્વાનુમાન કરવાનો હોય છે. આ તબક્કે, સર્વે કરનાર માટે ચૂંટણીમાં ઊભા રહેલ ઉમેદવારો માટે પસંદગી કરવા તમામ મતદારોને પૂછવું શક્ય નથી – સમય ઘણો ઓછો હોય છે, સંસાધનોની તંગી હોય છે, માનવશક્તિ સુપ્રાપ્ય નથી હોતી, અને ચૂંટણી પહેલાં સંપૂર્ણ વસ્તીનું મતદાન સાચી ચૂંટણીનો હેતુ નિષ્ફળ બનાવે છે !

ઉપરનું ઉદાહરણ આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાનનું છે. સર્વે કરનાર વાસ્તવિક રીતે તમામ મતદારોએ આપેલ મત ઉપરથી આવનાર પરિણામો અંગે જાણતો નથી. અહીં તમામ મતદારોનો કુલ સમષ્ટિમાં સમાવેશ થાય છે. સર્વે કરનાર સમષ્ટિના પ્રતિનિધિરૂપ એકમોમાંથી માહિતી મેળવે છે, તમામ મતદારોની માહિતી મેળવતો નથી. નમૂનામાં/નમૂનાઓમાં જે માહિતીનો સમાવેશ થયેલ છે તેને આધારે સમગ્ર સમષ્ટિ વિષે પૂર્વાનુમાન કરે છે.

17.2 આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાનની વિભાવના (CONCEPT OF STATISTICAL INFERENCE)

ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ, આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાન, સમષ્ટિ (વસ્તી)માંથી નિર્ધારિત કરેલ નમૂનામાં સમષ્ટિના જે લક્ષણો હોય તે આધારિત નિર્ણય લેવાની પ્રક્રિયા સાથે સંબંધ ધરાવે છે. ચાલો આપણે સાંબલપુર યુનિવર્સિટીના અર્થશાસ્ત્રના વિદ્યાર્થીઓની વાચન ટેવનું ઉદાહરણ યાદ કરી લઈએ. ધારો કે પ્રશ્નાવલિમાં એક પ્રશ્ન આ પ્રમાણે છે. 'તમે એક દિવસમાં કેટલા કલાક અભ્યાસ કરો છો ?' આપણે આ પ્રશ્નનો ઉત્તર નિદર્શ (નમૂના)માં સમાવેશ (100 વિદ્યાર્થીનો) થયેલ વિદ્યાર્થીઓ પાસેથી ઉત્તર મેળવીએ, તેનો મધ્યક ગણીએ અને શોધી કાઢીએ કે સાંબલપુર યુનિવર્સિટીના 'અર્થશાસ્ત્ર'ના વિદ્યાર્થીઓ સરેરાશ 9.5 કલાક અભ્યાસને સમર્પિત કરે છે. બે કારણોથી પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થાય છે :

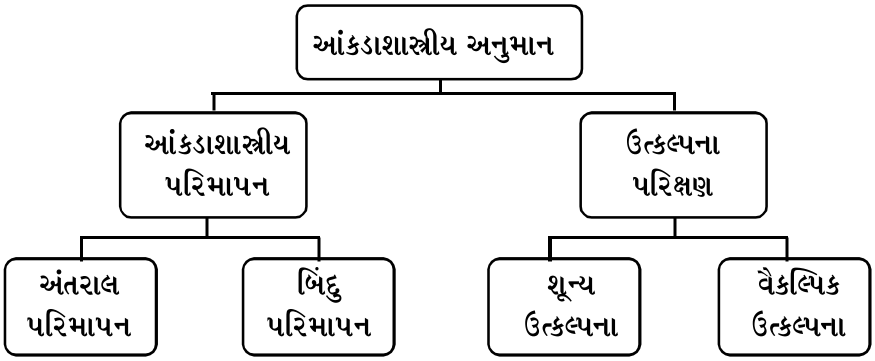
(અ) નિદર્શ (નમૂનો) એ સમષ્ટિનો ભાગ છે અને સમષ્ટિનો મધ્યક અને નિદર્શ મધ્યક સરખા હોય છે તેમ માની લેવાનું કોઈ કારણ નથી (જો હોય તો, તે જવલ્લે જ બનતો આકસ્મિક બનાવ હોય) આ સંજોગોમાં, સમષ્ટિ મધ્યક શું છે ?

(બ) સમષ્ટિમાંથી ઘણા નિદર્શ લઈ શકાય છે. ધારો કે આપણે બે સંશોધકોને સાંબલપુર યુનિવર્સિટીમાં જુદા જુદા દિવસે મોકલીએ અને દરેકને એક જ પ્રશ્ન (વાચન ટેવ અંગેનો પ્રશ્ન) 100 વિદ્યાર્થીઓના નમૂનામાંથી જવાબ એકત્રિત કરવા કહીએ. સ્વાભાવિક રીતે બંને સંશોધકો જુદા જુદા જવાબ (ધારો કે 9.25 કલાક અને 10.5 કલાક) સાથે આવશે કારણ કે નિદર્શ એકમો જુદા જુદા છે. કયું પરિણામ આપણે સાચું સ્વીકારીશું ? આપણે શું કહી શકીશું કે બંને અભ્યાસ વચ્ચેનો તફાવત અવગણ્ય છે ?

યાદ રાખો કે સમષ્ટિ મધ્યક આપણાથી અજ્ઞાત છે. આપણે ફક્ત નિદર્શ મધ્યક જાણીએ છીએ. આપણે ઉપર બે પ્રકારના પ્રશ્નો ઉપસ્થિત કર્યા છે. પ્રથમ, સમષ્ટિ મધ્યકનું મૂલ્ય (કિંમત) શું હોઈ શકે ? ઉત્તર સમષ્ટિ મધ્યક અંગે અનુમાન કરવાનું કહેવા ઉપર આધારિત છે. આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાનની આ બાબતને 'પરિમાપન' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. બીજો પ્રશ્ન સમષ્ટિ મધ્યક અંગે કોઈ ચોક્કસ દાવો કરવા સાથે સબંધિત છે. ધારો કે કોઈ એક વ્યક્તિ એવો દાવો કરે છે કે સાંબલપુર યુનિવર્સિટીમાં અર્થશાસ્ત્રના વિદ્યાર્થીઓ અભ્યાસ માટે સરેરાશ 10 કલાક સમર્પિત કરે છે. નિદર્શ માહિતીના આધારે આપણે કહી શકીએ કે સમષ્ટિ મધ્યક 10 કલાક જેટલો નથી ? આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાનની આ બાબતને ઉત્કલ્પના પરીક્ષણ તરીકે ઓળખવામા આવે છે.

આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાનની બે અગત્યની બાબતો છે : આંકડાશાસ્ત્રીય પરિમાપન અને ઉત્કલ્પના પરીક્ષણ (જુઓ આકૃતિ 17.1) પરિમાપન બે પ્રકારનાં હોઈ શકે છે : બિંદુ આકલન / બિંદુ પરિમાપન અને અંતરાલ આકલન/અંતરાલ પરિમાપન. બિંદુ આકલનમાં સમષ્ટિ પ્રાચલના (Parameter) મૂલ્ય તરીકે એક બિંદુનો અંદાજ મૂકીએ છીએ. બીજી બાજુ, અંતરાલ આકલનની બાબતમાં આપણે સમષ્ટિ મધ્યક, નિદર્શ મધ્યકની નીચલી સપાટી અને ઉપલી સપાટીની વચ્ચે હોવાનો અંદાજ મૂકીએ છીએ.

ઉત્કલ્પનાએ તમે જાણો છો તે મુજબ સમષ્ટિ અંગે કરેલ દાવો કે પ્રતિજ્ઞાવચન છે. તે શૂન્ય ઉત્કલ્પના સ્વરૂપે અને તેના બીજા ભાગ તરીકે, વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના હોઈ શકે. આપણે આ વિભાવનાઓ ઉદાહરણ સાથે નીચે સમજાવીશું.



આકૃતિ 17.1 આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાન

17.3 આંકડાશાસ્ત્રીય પરિમાપન (STATISTICAL ESTIMATION)

અગાઉ નોંધ્યું તે પ્રમાણે, આપણે પ્રાચલનું મૂલ્ય જાણતા ન હોય અને તેનું પૂર્વાનુમાન માટે નમૂના-નિદર્શના આંકડાનો ઉપયોગ કરવા ઇચ્છીએ છીએ. અલબત્ત, ઉત્તમ પૂર્વાનુમાન નિદર્શના આંકડાનું મૂલ્ય હશે. ઉદાહરણ તરીકે, જો આપણે સમષ્ટિ મધ્યક જાણતા ન હોઈએ તો નિદર્શ મધ્યક એ ઉત્તમ પૂર્વાનુમાન ગણાય. અહીં, આ ઉદાહરણમાં, આપણે એક જ મૂલ્યનો અથવા બિંદુનો પ્રાચલના પરિમાપન માટે ઉપયોગ કરીએ છીએ અને આ ક્રિયાને 'બિંદુ પરિમાપન' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

અંતરાલ પરિમાપન (Internal Estimation) :

બિંદુ પરિમાપન એ પ્રાચલ મૂલ્ય એ ચોક્કસ રીતે તેના જેટલું સરખું ન હોય તે અર્થમાં એ વાસ્તવિક ન હોઈ શકે. વૈકલ્પિક ક્રિયા એ રૂપે અંતરાલ આપવામાં આવે છે, જેમાં કેટલીક સંભાવના સાથે પ્રાચલ ધારણ કરેલ હોય છે. અહીં આપણે સ્પષ્ટતા કરીએ કે અધઃસીમા અને ઉર્ધ્વસીમાની અંદર પ્રાચલનું મૂલ્ય લગભગ રહેવાનું. અહીં અંતરાલને આપણે 'વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ' તરીકે ઓળખીએ છીએ. અહીં તમારા મનમાં પ્રશ્ન ઉદ્‌ભવશે કે, 'આપણે વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ કેવી રીતે શોધી કાઢીશું ?' વિશ્વાસ્યતા અંતરાલના પરિમાપન માટે આપણે 'વિશ્વાસ્યતા ગુણાંક' સ્પષ્ટ કરવો પડશે. જો વિશ્વાસ્યતા ગુણાંક 95% છે તો આપણે 95% વિશ્વાસયતા અંતરાલ મેળવીએ છીએ. જો આપણે સમષ્ટિમાંથી લીધેલ નમૂનાઓનું પુનરાવર્તન કરીએ અને 95% વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ લાગુ પાડવામાં આવે તો 100 માંથી 95 નમૂનાઓમાં સમષ્ટિ મધ્યક વિશ્વાસ્યતા અંતરાલની વચ્ચે રહેશે. તે જ રીતે 99% વિશ્વાસ્યતા ગુણાંકના નમૂનામાં જો પુનરાવર્તિત નિદર્શ લેવામાં આવે તો, સમષ્ટિ મધ્યક 100માંથી 99 નમૂનાઓમાં વિશ્વાસ્યતા અંતરાલમાં રહેશે.

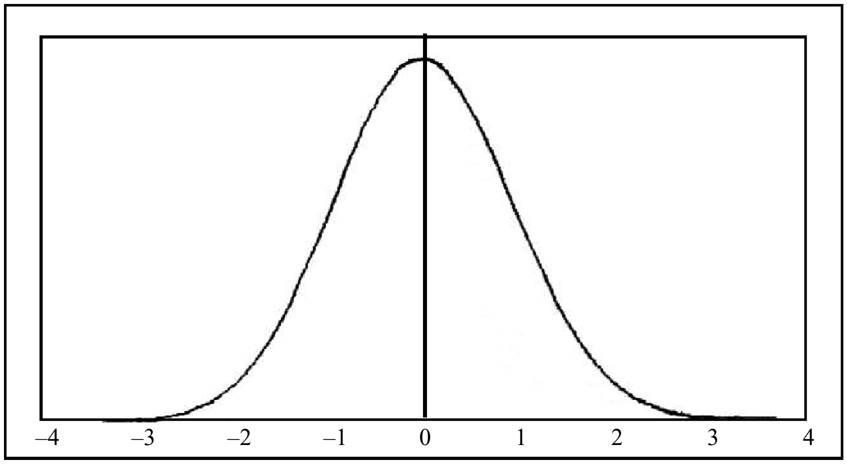
જ્યારે આપણે 95% વિશ્વાસ્યતા અંતરાલે પરિમાપન કરતા હોઈએ ત્યારે, આપણે ધારીએ છીએ કે 95% વખત સમષ્ટિ મધ્યક અંતરાલ વચ્ચે રહેશે. તે સૂચવે છે કે 5% નમૂનાઓમાં સમષ્ટિ મધ્યક અંતરાલની વચ્ચે હશે કે નહિ તે આપણે ચોક્કસ કહી ન શકીએ. આ 5% ને 'સાર્થકતાના સ્તર' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને સંકેત (α) (આલ્ફા) દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. આપણે આ વિભાવનાનો પછીથી ઉત્કલ્પના પરીક્ષણમાં ઉપયોગ કરીશું.

આંકડાશાસ્ત્રીય પશ્ચાદ્‌ભૂમિકા (Statistical Backgroung) :

ચાલો આપણે ફરીથી નિદર્શન સિદ્ધાંતની વિભાવનાનો આશ્રય લઈએ. અગાઉ જણાવ્યા મુજબ, આપણે સમષ્ટિમાંથી ઘણા નિદર્શ લઈ શકીએ છીએ. ધારો કે આપણે સમષ્ટિમાંથી શક્ય તમામ નિદર્શ લઈએ છીએ અને આ તમામ નિદર્શોમાંથી ગણતરી કરેલો નિદર્શ મધ્યક ($\overline{x}$) છે. આપણે આ નિદર્શ મધ્યકને સાપેક્ષ આવૃત્તિ વિતરણ સ્વરૂપમાં ગોઠવી શકીએ છીએ (સાપેક્ષ આવૃત્તિની ગણતરી માટે એકમ નં-7માં જુઓ) જેને 'નિદર્શ વિતરણ' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જો નિદર્શનું કદ મોટું હોય ($n>30$) હોય ત્યારે નિદર્શ વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરશે, જેનો આકાર જ્યારે ગ્રાફ પેપર ઉપર આલેખન કરવામાં આવશે ત્યારે ઘંટાકાર વક્ર જેવો દેખાશે. નિદર્શ વિતરણનો મધ્યક, સમષ્ટિ મધ્યક (μ) જેટલો જ અને પ્રમાણિત વિચલન $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ જેટલું હોય છે જ્યાં σ એ સમષ્ટિ જેમાંથી નિદર્શ લેવામાં આવેલ હોય છે. તેનું પ્રમાણિત વિચલન છે. યાદ રાખીએ કે નિદર્શન વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન એ પ્રમાણિત ભૂલ (પ્રમાણિત દોષ) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

જ્યારે નિદર્શ મધ્યકમાંથી સમષ્ટિ મધ્યક બાદ કરી તેને સમષ્ટિના પ્રમાણિત વિચલન વડે ભાગીએ ત્યારે આપણે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ z મેળવીએ છીએ. જે $(\frac{x-\mu}{\sigma})$ જેટલો હોય છે. z ચલનો ગુણધર્મ એ છે કે (અ) તે પ્રામાણ્ય રીતે વિતરિત થયેલ હોય છે (સૂચવે છે, કે તેનો આકાર ઘંટાકારવક્ર જેવો

હોય છે) (બ) વક્રનું કુલ ક્ષેત્રફળ=1 હોય છે, અને (ક) Z નો અંકગણિતિક મધ્યક=0 હોય છે. આપણે z ચલ આકૃતિ 17.2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દોરીએ છીએ.



આકૃતિ 17.2 પ્રામાણ્ય પ્રમાણિત વક્ર

અંતરાલનું પરિમાપન (Estimation of Interval) : યાદ રાખો કે z ને એવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે કે z = ($z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$) તેથી, જ્યારે નિદર્શન મધ્યક ($\overline{x}$), સમષ્ટિ મધ્યક (μ) સરખા થશે ત્યારે આપણે Z=0 મેળવીશું. જ્યારે ($\overline{x}$), (μ) કરતાં મોટો હશે ત્યારે Z નું મૂલ્ય ધન આવશે, જ્યારે કરતાં નાનો હશે ત્યારે Z નું મૂલ્ય ઋણ આવશે. આ રીતે જ્યારે Z નું મૂલ્ય વધશે, ત્યારે નિદર્શ મધ્યક ($\overline{x}$) અને સમષ્ટિ મધ્યક (μ) વચ્ચેનો તફાવત વધશે.

આકૃતિ 17.2 માં આપણે જોયું છે કે જ્યારે Z=1.96 હોય ત્યારે વક્રનું કુલ ક્ષેત્રફળ 95% હોય છે. તેથી, આપણે નિદર્શ મધ્યક($\overline{x}$) માં 1.96 ઉમેરીએ છીએ અને બાદ કરીએ છીએ અને આપણે 95% વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ મેળવીએ છીએ. સંકેતમાં અધઃસીમા અને ઊર્ધ્વસીમા આ પ્રમાણે દર્શાવાય છે

$$(\overline{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ , } \overline{x} \text{ , ₹ } 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

તે જ રીતે 99% વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ ($\overline{x}$ -2.58 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\overline{x}$ ₹2.58 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$) મેળવીએ છીએ. જ્યારે Z=2.58 હોય ત્યારે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર 99% ક્ષેત્રફળ આવરી લે છે. આપણે કેવી રીતે નિર્ણય કરવા માગીએ છીએ તે આધારિત નિદર્શનું વિશ્વાસ્યતા સ્તર 81% અથવા 97% માટે પૂછી શકીએ છીએ. તેમ છતાં, સરળતા ખાતર બે વિશ્વાસ્યતા સ્તર 95% અને 99% સામાન્ય રીતે ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે.

◆ **તમારી પ્રગતિ ચકાસો**

(1) નીચેની વિભાવનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરો :

(અ) વિશ્વાસ્યતા ગુણક

(બ) વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ

(ક) સાર્થકતાનું સ્તર

(ડ) નિદર્શ વિતરણ

(ઈ) પ્રમાણિત ભૂલ

(2) 50 કર્મચારીઓના નિદર્શમાં તેમને કાર્યાલય પહોંચવા સુધીનું અંતર ગણવા કહેવામાં આવ્યું. જો નિદર્શનો મધ્યક (સરેરાશ) 4.5 કિ.મી. હોય તો,સમષ્ટિ મધ્યક 95% વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ માટે શોધો. ધારો કે સમષ્ટિ પ્રમાણિત રીતે વિતરીત થયેલ છે અને તેનું વિચરણ 0.36 છે.

(3) શાળાના 25 વિદ્યાર્થીઓની સરેરાશ (મધ્યક) ઉંચાઈ 95 સેમી છે. જેનું પ્રમાણિત વિચલન 4 સેમી છે. 99% વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ શોધો.

નોંધ : (1) નીચે આપેલી જગ્યામાં તમારા ઉત્તર લખો.

(2) આ એકમને અંતે આપેલા ઉત્તરો સાથે તમારા ઉત્તર સરખાવો.

....

....

....

....

....

....

17.4 ઉત્કલ્પના પરીક્ષણની વિભાવના (CONCEPT OF HYPOTHESIS TESTING)

ઉત્કલ્પનાએ સમષ્ટિના લક્ષણો વિષેનું કામચલાઉ (હંગામી) વિધાન છે. તે નિશ્ચય કે દાવો હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે, તાજેતરના વર્ષો માટે અધિકૃત આંકડા દર્શાવે છે કે ઓરિસ્સામાં સ્ત્રીઓની સાક્ષરતા 51% છે. હવે સ્ત્રીનો સાક્ષરતા દર અંગે જે વિધાનો કરવામાં આવે કે દાવો કરવામાં આવે છે તેને ઉત્કલ્પના તરીકે સ્વીકારવામાં આવે છે.

ઉત્કલ્પના પરીક્ષણમાં ચાર અગત્યના અંગો છે : (1) શૂન્ય ઉત્કલ્પના, (2) વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના, (3) આંકડાકીય પરીક્ષણ અને (4) પરિણામોનું અર્થઘટન. આપણે આ દરેકની ચર્ચા નીચે મુજબ કરીશું.

સામાન્ય રીતે આંકડાકીય ઉત્કલ્પનાઓ અંગ્રેજી મૂળાક્ષર H વડે દર્શાવવામાં આવે છે. ઉત્કલ્પના બે પ્રકારની હોય છે : શૂન્ય ઉત્કલ્પના અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના. શૂન્ય ઉત્કલ્પના એ એવું વિધાન છે જેને આપણે સમષ્ટિ માટે સાચું સ્વીકારીએ છીએ અને તેને પરીક્ષણ માટે આંકડા દ્વારા પરીક્ષણ માટે મૂકવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે શૂન્ય ઉત્કલ્પના H_0 વડે દર્શાવાય છે. ઓરિસ્સામાં સ્ત્રીઓની સાક્ષરતા વિષેના ઉદાહરણમાં શૂન્ય ઉત્કલ્પના આ પ્રમાણે છે.

$H_0 : (\mu)=0.51$ .... (17.1)

જ્યાં (μ) એ ઓરિસ્સામાં સ્ત્રીઓની સાક્ષરતાનો પ્રાચલ છે.

વળી એ પણ શક્યતા છે કે શૂન્ય ઉત્કલ્પના કે જેનું આપણે પરીક્ષણ કરવા ઇચ્છીએ છીએ તે સાચી ન પણ હોઈ શકે અને સ્ત્રીઓની સાક્ષરતા 51% જેટલી નથી. આ રીતે ત્યાં વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પનાની જરૂરિયાત છે, જે શૂન્ય ઉત્કલ્પના ખોટી હોય ત્યારે તે સાચી હોઈ શકે. આપણે વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પનાને H_A સંકેત વડે દર્શાવીએ છીએ અને તેનું સૂત્ર નીચે મુજબ મૂકીઅ છીએ.

$H_A : \mu \neq 0.51$ .... (17.2)

આપણે ધ્યાનમા રાખવું જોઈએ કે શૂન્ય ઉત્કલ્પના અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના બંને એક સાથે સાચી ન હોઇ શકે. બીજું, ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ કે આપણે જે વિધાન કરીએ છીએ તે વિષે H_0 અને H_A સિવાય ત્રીજી કોઈ શક્યતા હોઈ ન શકે. ઉદાહરણ તરીકે, ઓરિસ્સામાં સ્ત્રીઓની સાક્ષરતાનો દર 51 ટકા છે અથવા તે 51 ટકા નથી; ત્યાં ત્રીજી કોઈ શક્યતા નથી.

મોટા ભાગના ઉદાહરણોમાં આપણે નિદર્શ મધ્યક$(\bar{x})$, અને સમષ્ટિ મધ્યક (μ) વચ્ચેનો તફાવત શોધીએ છીએ. આ તફાવત નિદર્શમાં થયેલ વધઘટને કારણે છે અથવા આ નિદર્શ અને સમષ્ટિ વચ્ચેનો તફાવત વાસ્તવિક છે આ પ્રશ્નનો જવાબ મેળવવા બંને વચ્ચેના તફાવતના આંકડાનું પરીક્ષણ કરવું પડે છે. પરીક્ષણના આંકડાઓનો ઉપયોગ કરી જે પરિણામો આવે તેનું અર્થઘટન કરવું આવશ્યક છે અને શૂન્ય ઉત્કલ્પનાનો સ્વીકાર કરવો કે અસ્વીકાર કરવો તેનો નિર્ણય લેવો જરૂરી છે.

ચાલો આપણે પણ પાછા આકૃતિ 17.1 પ્રામાણ્ય પ્રમાણિત વક્ર ઉપર જઈએ. આપણે નોંધ્યું છે કે જ્યારે z નું મૂલ્ય વધે છે નિદર્શ મધ્યક $(\bar{x})$ અને સમષ્ટિ મધ્યક (μ) વચ્ચેના તફાવત વધે છે. વધુમાં $(\bar{x})$ અને (μ) નો તફાવત વધુ હોય Z નું નિરપેક્ષ મૂલ્ય પણ વધુ હોય છે. આ રીતે Z મૂલ્ય, $(\bar{x})$ અને (μ) વચ્ચેની વિસંગતતા-તફાવત માપે છે અને તેને કારણે ઉત્કલ્પના પરીક્ષણ માટે આ આંકડાઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. અહીં નોંધો કે આપણો સંબંધ ફક્ત $(\bar{x})$ અને (μ) વચ્ચેના તફાવત સાથે છે. તેથી, Z નું ઋણ કે ધન ચિહ્ન અગત્યની બાબત નથી.

આપણું લક્ષ્ય Z નું નિરાકરણ મૂલ્ય શોધી કાઢવાનું છે જે $(\bar{x})$ અને (μ) વચ્ચેનો તફાવત સાર્થક છે. તેથી, આપણે Z નું નિરપેક્ષ મૂલ્ય લઈએ છીએ (જેને સંકેત $|z|$ વડે દર્શાવાય છે) અને જો તે નિરાકરણ

મૂલ્ય કરતાં ઓછું હોય તો શૂન્ય ઉત્કલ્પના અવગણવી ન જોઈએ. જો z નું નિરપેક્ષ મૂલ્ય નિરાકરણ મૂલ્ય કરતાં વધુ હોય તો શૂન્ય ઉત્કલ્પના અવગણવી જોઈએ અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના સ્વીકારવી જોઈએ.

તેથી, મોટા કદના ઉદાહરણમાં ઉત્કલ્પનાના પરીક્ષણ માટે z નો આંકડો પરીક્ષણ માટે સ્વીકારવામાં આવે છે જે આ પ્રમાણે છે.

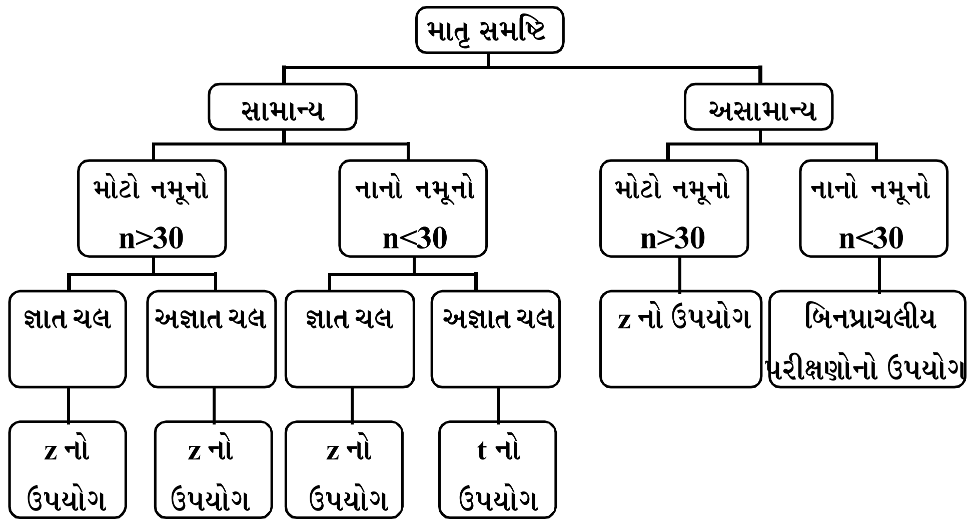
$$Z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma / \sqrt{n}} \text{ .... } (17.3)$$

ઉપરની પ્રક્રિયાને ઘણીવાર z = પરીક્ષણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સૂત્ર 17.3 માં આપેલ સમીકરણમાં નિદર્શ મૂલ્યો ઉપયોગ કરીને z નું નિરક્ષિત મૂલ્ય શોધી કાઢીએ છીએ. આપણે તેની તુલના z ના નિરાકરણ મૂલ્ય સાથે સરખામણી કરીએ છીએ. (નીચે ચર્ચા કરવામાં આવશે.)

જ્યારે નિદર્શનું કદ નાનું હોય તો, નિદર્શ વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરતું નથી તેથી આપણે z-પરીક્ષણ પ્રયોજી શકતા નથી. તેમ છતાં નાના કદના નિદર્શમાં, આપણે t - પરીક્ષણ પ્રયોજીએ છીએ, જે પણ ઘંટાકાર હોય છે. પરંતુ તેનું વિચરણ પ્રામાણ્ય વિતરણ કરતાં વધુ હોય છે. t પરીક્ષણ માટે પરીક્ષણ આંકડા આ દ્વારા આપવામાં આવે છે.

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma / \sqrt{n_1}} \text{ .... } (17.4)$$

અહીં પ્રશ્ન એ છે કે t નું નિરાકરણીય મૂલ્ય સ્વતંત્રતાની કક્ષા ઉપર આધાર રાખે છે. જેને (n-1) તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. જ્યાં n એ નિદર્શનું કદ છે. ઉદાહરણ તરીકે, નિદર્શનું કદ 20 હોય તો, સ્વતંત્રતાની કક્ષા 20-1=19 છે. આ રીતે t નું નિરાકરણીય મૂલ્ય બે પરિબળો પ્રમાણે જૂદું પડે છે: (1) સ્વતંત્રતાની કક્ષા અને (2) સાર્થકતાનું આવશ્યક સ્તર.



આકૃતિ 17.3 પરિકલ્પના પરીક્ષણ

આકૃતિ 17.3માં જુદી જુદી પરિસ્થિતિમાં કયાં પરીક્ષણ પ્રયોજવાં તે રજૂ કર્યા છે. આંકડા-પરીક્ષણમાં કયા આંકડાઓનો ઉપયોગ કરવો તે માટે માર્ગદર્શક પરિબળો આ પ્રમાણે છે : (1) સમષ્ટિ સામાન્ય છે કે અસામાન્ય છે, (2) નિદર્શનું કદ નાનું છે કે મોટું અને (3) સમષ્ટિનું વિચરણ (σ) આપણાથી જ્ઞાત છે કે અજ્ઞાત છે. તમને આશ્ચર્ય થશે કે સમષ્ટિનો મધ્યક જ્યાં સુધી આપણાથી અજ્ઞાત છે (આપણો હેતુ નિદર્શમાંથી તેનું પરિમાપન કરવાનો છે) તો આપણે સમષ્ટિ વિચરણ કેવી રીતે શોધીશું ! તેમ છતાં, આપણે જ્ઞાત વિચરણના સાદા ઉદાહરણથી શરૂઆત કરીશું અને ત્યારબાદ સમષ્ટિનાં વાસ્તવિક અજ્ઞાત વિચરણનો સ્વીકાર કરીશું.

17.5 નિરાકરણ ક્ષેત્રો અને ભૂલોના પ્રકારો (CRITICAL REGIONS AND TYPES OF ERRORS)

એકમ 17.3માં આપણે નોંધ્યું છે કે જ્યારે Z=1.96 હોય ત્યારે, આપણને સાર્થકતાનું સ્તર 5% હોય

છે (વિશ્વસ્યતા સ્તર 95% હોય છે). આનો સૂચિતાર્થ એ છે કે 100માંથી 95 નિર્દેશક નિદર્શો વિશ્વાસ્યતા અંતરાલની વચ્ચે હોય છે. તેથી 100માંથી 5 નિર્દેશક નિદર્શો, વિશ્વાસ્યતા અંતરાલની વચ્ચે રહેતા નથી. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રની ચરમસીમાની જમણી બાજુ અને ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ આ 5% ટકાનું હોય છે (જુઓ 17.2 આકૃતિ). વક્રનો આ વિસ્તાર 'નિરાકરણ ક્ષેત્ર' (વિસ્તાર) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. અને z નું આ મૂલ્યથી વધુ જ્યાંથી નિરાકરણ ક્ષેત્ર શરૂ થાય છે તેને ક્રાંતિક મૂલ્ય તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

z નું ક્રાંતિક મૂલ્ય સાર્થકતાના સ્તર ઉપર આધારિત હોય છે. સારણી નં. 17.1 માં પ્રામાણ્ય વિતરણની ધારણના આધારે હાથ ધરેલ પરીક્ષણ માટે કેટલાક સ્પષ્ટ કરેલ સાર્થકતાના સ્તર (α) માટે આપવામાં આવેલ છે.

સારણી નં. 17.1 : z આંકડા પરીક્ષણ માટે ક્રાંતિક મૂલ્યો

સાર્થકતા સ્તર(α)	**0.10**	**0.05**	**0.01**
z નું ક્રાંતિક મૂલ્ય	1.65	1.96	2.58

પ્રકાર-1 અને પ્રકાર-2 પ્રકારની ભૂલો (Type I and Type II Errors) : ઉત્કલ્પના પરીક્ષણમાં આપણે વિશ્વાસ્યતાના ચોક્કસ સ્તરે ઉત્કલ્પના અવગણીએ છીએ અથવા અવગણતા નથી. ઉપર નોંધ્યુ તે પ્રમાણે, 95% વિશ્વાસ્યતા સ્તરનો સૂચિતાર્થ છે કે 100 માંથી 95 નિર્દેશકો નિદર્શો સ્વીકાર્ય ક્ષેત્રમાં રહે છે અને 5% નમૂનાના નિર્દેશકો અસ્વીકાર્ય ક્ષેત્રમાં રહે છે. આ રીતે 5% નમૂનાઓ સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલ હોય છે. પરંતુ તે સમષ્ટિ મધ્યકથી ઘણા દૂર હોય છે. આ પ્રકારના ઉદાહરણોમાં નિદર્શ સમષ્ટિનો જ હોય છે પરંતુ આપણી પરીક્ષણ પદ્ધતિ તેને રદ કરે છે. અલબત્ત આપણે H_0 સાચુ છે પરંતુ અવગણના પ્રાપ્ત થાય છે. આ બાબતને ભૂલ પ્રકાર-1 તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તે જ રીતે H_0 સાચું ન હોય તેવી પણ પરિસ્થિતિ પણ હોઈ શકે, પરંતુ નિદર્શની માહિતી પ્રમાણે તેને રદ કરતા નથી. નિર્ણય કરવામાં આ પ્રકારની ભૂલને ભૂલ પ્રકાર-2 તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. (જૂઓ સારણી નં. 17.2)

નોંધો કે ભૂલ પ્રકાર-1 સ્પષ્ટ કરે છે કે આપણે કેટલી ભૂલ ક્ષમ્ય કરી શકીએ છીએ. ભૂલ પ્રકાર-1 સાર્થકતાના સ્તર જેટલી હોય છે અને તેને સંકેત (α) તરીકે દર્શાવાય છે. આ રીતે (α) = 0.05 નો સૂચિતાર્થ છે કે નિર્ણય કરવામાં આપણે 5% ભૂલો ક્ષમ્ય ગણીએ છીએ. યાદ રાખો કે વિશ્વાસ્યતા સ્તર (1-α) જેટલુ છે.

સારણી નં. 17.2 : ભૂલોના પ્રકાર

	H_0 સાચું હોય	H_0 સાચું ન હોય
H_0 ને રદ કરો	ભૂલ પ્રકાર-1	સાચો નિર્ણય
H_0 ને રદ ના કરો	સાચો નિર્ણય	ભૂલ પ્રકાર-2

નાના કદના નમૂનામાં આપણે, t પરીક્ષણનો ઉપયોગ કરવો પડે છે અને આ રીતે નિરાકરણીય મૂલ્ય t વિતરણના આધારે નક્કી કરવું જરૂરી હોય છે. t પરીક્ષણ એ બે આધારવાળી જટિલ પ્રયોજિતતા છે કારણ કે આપણે (1) સ્વતંત્રતાની માત્રા, અને (2) સાર્થકતાના સ્તર બંનેમાં જોવું પડે છે.

આપણે આ પછીના વિભાગમાં z પરીક્ષણ અને t પરીક્ષણ આધારિત કેટલાક દાખલાઓ ગણીશું.

અગાઉ નોંધ્યું તે પ્રમાણે સાર્થકતાના સ્તર માટે 5% અથવા 1% સર્વસંમતિથી પ્રયોજિત કરવામાં આવે છે. આ એકમના અંતે સારણી નં. 17.3 સાર્થકતાના આ બે સ્તર માટે જુદી જુદી સ્વતંત્રતાની માત્રા માટે t વિતરણના નિરાકરણીય મૂલ્ય રજૂ કરેલ છે.

- **તમારી પ્રગતિ ચકાસો**

(4) નીચેનાનો તફાવત સમજાવો.

(અ) શૂન્ય પરિકલ્પના અને વૈકલ્પિક પરિકલ્પના

(બ) વિશ્વાસ્યતા સ્તર અને સાર્થકતા સ્તર

(ક) ભૂલ પ્રકાર-1 અને ભૂલ પ્રકાર-2

(5) ધારો કે 100 વિદ્યાર્થીઓના નિદર્શની સરેરાશ ઉંમર 12.5 વર્ષ છે. નિદર્શ મધ્યક સમષ્ટિ

મધ્યક જેટલો છે તે પરિકલ્પના પરીક્ષણ માટે 5% સાર્થકતાના સ્તરે નિરાકરણીય ક્ષેત્ર આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો. ધારો કે સમષ્ટિ મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 વર્ષ અને 2 વર્ષ છે.

નોંધ : (1) તમારા ઉત્તરો નીચે આપેલી જગ્યામાં લખો.

(2) આ એકમને અંતે આપવામાં આવેલ ઉત્તરો સાથે તમારા ઉત્તર ચકાસો.

....

....

....

....

....

....

17.6 એક નિદર્શ માટે પરિકલ્પના પરીક્ષણ (TESTING OF HYPOTHESIS FOR SINGLE SAMPLE)

આપણે શૂન્ય પરિકલ્પના અને વૈકલ્પિક પરિકલ્પના અંગે સમજાવેલ છે. આપણે એ પણ શીખ્યા છીએ કે મોટા કદના નિદર્શોમાં z પરીક્ષણ અને નાના કદના નિદર્શમાં t પરિક્ષણો આપણે પ્રયોજિત કરીએ છીએ. ઘણીક પરિસ્થિતિમાં આપણને નક્કી કરવાનો પ્રશ્ન થાય છે કે નમૂનો આપેલ સમષ્ટિથી નોંધપાત્ર રીતે જુદો પડે છે ? ઉદાહરણ તરીકે, ધારીએ કે આપણે છત્તીસગઢ રાજ્યના રાયપુર જિલ્લાના 400 ગૃહસ્થીના નિદર્શનો સર્વે કરીએ અને આ ગૃહસ્થીઓની માથાદીઠ આવકની ગણતરી કરીએ. આનુસંગીક રીતે, આપણું લક્ષ નિદર્શની ગણતરી કરેલ માથાદીઠ આવક જિલ્લાની માથાદીઠ આવક કરતાં જૂદી પડે છે ? તે ઉત્કલ્પનાનું પરીક્ષણ કરવાનું છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણી પાસે બે જૂદી જૂદી પરિસ્થિતિ હોઈ શકે : (1) સમષ્ટિનું (આ ઉદાહરણમાં જિલ્લાના તમામ ગૃહસ્થીઓ) વિચરણ જ્ઞાત છે, (2) સમષ્ટિનું વિચરણથી આપણે અજ્ઞાત છીએ. દરેક પરિસ્થિતિમાં (બંને પરિસ્થિતિમાં) અનુસરવાના તબક્કા નીચે સમજાવ્યા છે.

17.6.1 સમષ્ટિનું વિચરણ જ્ઞાત હોય (Population Variance is Known)

તબક્કા આ પ્રમાણે હોવા જોઈએ :

(1) શૂન્ય ઉત્કલ્પના સ્પષ્ટ કરો.

(2) શોધી કાઢો કે તે માટે એક પૃચ્છીય કસોટી કે દ્વિપૃચ્છીય કસોટી જરૂરી છે. તે અનુસાર નિરાકરણીય ક્ષેત્ર ઓળખો. આ બાબત તમને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના સ્પષ્ટ કરવામાં મદદ કરશે.

(3) z પરીક્ષણ સૂત્રમાં નિદર્શ મૂલ્યો પ્રયોજિત કરો.

(4) સારણીમાંથી સાર્થકતાના સ્તર અનુસાર નિરાકરણીય મૂલ્ય શોધી કાઢો.

(5) જો સારણીના મૂલ્ય કરતા ઓછું મૂલ્ય મળ્યું હોય તો શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ ન કરો.

(6) જો મેળવેલ મૂલ્ય સારણીના મૂલ્ય કરતાં વધુ હોય તો શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરો અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના સ્વીકારો.

ઉદાહરણ-1

ચાલો આપણે સ્વીકારી એ કે છત્તીસગઢ રાજ્યના રાયપુર જિલ્લાની માથાદીઠ આવક તથા તેનું વિચરણ આપણે જાણીએ છીએ. ધારો કે અધિકૃત માહિતી પ્રમાણે રાયગઢ જિલ્લાની માથાદીઠ આવક રૂા. 10,000 છે અને પ્રમાણિત વિચલન રૂા. 1500 છે. તેમ છતાં, આપણે 400 ગૃહસ્થીઓનો નિદર્શ લઈ શોધી કાઢ્યું કે માથાદીઠ આવક રૂા. 10,500 છે. શું આપણે અધિકૃત માહિતી (ડેટા) સ્વીકારીશું ?

આ ઉદાહરણમાં (μ) = રૂા. 10,000

σ = રૂા. 1500

$\bar{x}$ =રૂા. 10,500

$n = 400$

નિદર્શનું કદ મોટુ છે અને સમષ્ટિનું વિચરણ જ્ઞાત છે. આકૃતિ 17.3 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપણે z પરીક્ષણ પ્રયોજિત કરીશું.

આ ઉદાહરણમાં આપણી શૂન્ય ઉત્કલ્પના આ પ્રમાણે છે :

$H_0 : \bar{x} = \mu$

શૂન્ય ઉત્કલ્પના સૂચવે છે કે નિદર્શ મધ્યક અને સમષ્ટિ મધ્યક સરખા છે. બીજા શબ્દોમાં નિદર્શ લઈ શોધેલ માથાદીઠ આવક અધિકૃત આંકડામાંથી મળતી માથાદીઠ આવક જેટલી જ છે.

આપણી વૈકલ્પિક પરિકલ્પના આ પ્રમાણે છે.

$H_A : \bar{x} \neq \mu$

સૂત્રમાં ઉપરોક્ત કિંમતો મૂકતાં આપણે નીચે મુજબ Z મેળવીશું.

$$z = \frac{|10500 - 10000|}{1500/\sqrt{400}} = \frac{500}{1500/20} = \frac{500}{75} = 6.67$$

ઉપરના ઉદાહરણ જ્યારે $z = 6.67$ છે. નમૂનો નિરાકરણીય ક્ષેત્રમાં રહેવા પામે છે અને આપણે શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીએ છીએ. આ રીતે નિદર્શમાંથી મેળવેલ માથાદીઠ આવક અધિકૃત આંકડાઓમાંથી મેળવેલ માથાદીઠ આવક કરતાં નોંધપાત્ર રીતે જૂદી પડે છે.

ઉદાહરણ-2

ધારો કે એક નામવાળી બેટરી દ્વારા ઉત્પન્ન થતી વીજ શક્તિના વોલ્ટેજ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. (પ્રામાણ્ય રીતે વિતરીત છે) યદચ્છ રીતે પસંદ કરેલ 100 નિદર્શ એકમોનું પરીક્ષણ કરવામાં આવ્યુ અને શોધી કાઢ્યું કે સરેરાશ વોલ્ટેજ 1.4 વોલ્ટ છે. 0.01ની સાર્થકતા એ આ બેટરીઓ દ્વારા ઉત્પન્ન થતા વોલ્ટેજ 1.5 વોલ્ટથી જૂદા પડે છે ધારો કે સમષ્ટિનું પ્રમાણિત વિચલન 0.21 વોલ્ટ છે.

અહીં $H_0 =(\mu)=1.5$

જ્યારે નિદર્શના સરેરાશ વોલ્ટેજ, સમષ્ટિના સરેરાશ વોલ્ટેજ કરતાં જૂદા પડે છે તેથી તે 1.5 વોલ્ટ કરતાં ઓછા પણ હોઈ શકે અથવા વધુ પણ હોઈ શકે. આપણે પ્રામાણ્ય વક્રની બંને બાજુ રદ કરવાના ક્ષેત્ર છે. આ રીતે દ્વિપૃચ્છીય કસોટીનું ઉદાહરણ છે અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના આ પ્રમાણે છે.

$H_1 : \mu = 1.5$

જ્યારે સમષ્ટિનું પ્રમાણિત વિચલન જ્ઞાત છે. જ્યારે પરીક્ષણ આ પ્રમાણે થશે.

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|1.4 - 1.5|}{\frac{0.21}{\sqrt{100}}} = 4.8$$

સારણી નં. 17.2 માંથી 1 ટકાની સાર્થકતાના સ્તરે નિરાકરણીય મૂલ્ય 2.58 મળે છે. જ્યારે z નું વાસ્તવિક મૂલ્ય 2.58 કરતાં વધુ છે. આપણે 1% ની સાર્થકતાના સ્તરે શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીશું અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના સ્વીકારીશું કે જે બેટરીનું સરેરાશ આયુષ્ય 1.5 વોલ્ટ કરતાં જુદુ પડે છે.

17.6.2 સમષ્ટિનું વિચરણ અજ્ઞાત હોય (Population Variance not Known)

ધારો કે સમષ્ટિનું પ્રમાણિત વિચલન (σ) આપણે જાણીએ છીએ તે અવાસ્તવિક છે, કારણ કે આપણે સમષ્ટિનો મધ્યક જાણતા નથી. જ્યારે σ અજ્ઞાત હોય ત્યારે આપણે તેનું પરિમાપન નિદર્શના પ્રમાણિત વિચલન (S) દ્વારા કરવું પડશે. આ પરિસ્થિતિમાં નિદર્શના કદ આધારિત બે શક્યતાઓ છે. જો નિદર્શનું કદ મોટું ($n>30$) હોય તો આપણે z પરીક્ષણ પ્રયોજીએ, તે આ પ્રમાણે છે.

$$z = \frac{|\overline{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}} \quad ....17.5$$

જો નિદર્શનું કદ નાનું હોય (n<30) આપણે t પરીક્ષણ, n-1 જેટલી સ્વતંત્રતાની માત્રા લઈ પ્રયોજીએ છીએ. પરીક્ષણ સૂત્ર આ પ્રમાણે છે.

$$t = \frac{|\overline{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}} \quad ....17.6$$

નીચેના તબક્કાને અનુસરવું :

(1) શૂન્ય અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના સ્પષ્ટ કરો.

(2) નિદર્શનું કદ મોટું છે (n>30) અથવા નાનું છે ($n \leq 30$) તે ચકાસો.

(3) જો n>30 હોય, z પરીક્ષણ પ્રયોજો (17.5)

(4) સાર્થકતાના સ્તર (α) પ્રમાણે z સારણીમાંથી નિરાકરણીય મૂલ્ય શોધી કાઢો.

(5) જો $n \leq 30$, t પરીક્ષણ પ્રયોગ (17.6)

(6) સાર્થકતાના સ્તર (α) અને n-1 ની સ્વતંત્રતાની માત્રા માટે t સારણીમાંથી નિરાકરણીય મૂલ્ય શોધી કાઢો.

(7) જો સારણીમાં આપેલ મૂલ્ય કરતાં શોધેલ મૂલ્ય નાનું મળે તો શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ્ ન કરો.

(8) જો સારણીમાં આપેલ મૂલ્ય કરતાં શોધેલ મૂલ્ય મોટું મળે શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરો અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પનાનો સ્વીકાર કરો.

ઉદાહરણ નં-3

એક દવાની ગોળી સરેરાશ 10.0 મી.ગ્રા. એસ્પીરીન ધરાવે છે તેમ માનવામાં આવે છે. યદચ્છ નિદર્શના 100 ગોળીમાં સરેરાશ 10.2 મી.ગ્રા. એસ્પીરીન જોવા મળેલ છે. જેનું પ્રમાણિત વિચલન 1.4 મી.ગ્રા. છે. 0.05ના સાર્થકતા સ્તરે કહી શકશો કે ગોળીઓમાં એસ્પીરીન 10.0 મી.ગ્રા. વાસ્તવિક છે ?

અહીં શૂન્ય ઉત્કલ્પના $H_0 : (\mu) = 10$

રદ કરવા માટેનું ક્ષેત્ર 10 મી.ગ્રા.ની બંને બાજુએ છે આ રીતે તે માટે દ્વિપૃચ્છીય કસોટી જરૂરી છે અને

HA : $\mu \neq 10$

નિદર્શ મધ્યક $\overline{x}$ =10.2 અને નિદર્શ કદ n=100 છે, જ્યારે સમષ્ટિનું પ્રમાણિત વિચલન અજ્ઞાત છે. આપણે તેની પરિગણના નિદર્શના પ્રમાણિત વિચલન S દ્વારા કરીશું અને પરીક્ષણ સૂત્ર $z = \frac{|\overline{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}}$ છે. નિદર્શમાંથી પ્રાપ્ત થયેલ સુસંગત મૂલ્યો પ્રયોજીને આપણે Z નું મૂલ્ય નીચે મેળવીએ.

$$z = \frac{|\overline{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}} = \frac{|10.2 - 10|}{\frac{1.4}{\sqrt{100}}} = \frac{0.2}{\frac{1.4}{10}} = \frac{0.2}{0.14} = 1.43$$

5%ના સાર્થકતા સ્તરે z નું નિરાકરણીય મૂલ્ય 1.96 છે. જ્યારે z નું શોધેલ મૂલ્ય 1.96 કરતાં ઓછું છે. તેથી આપણે શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીશું નહિ. તેથી, ગોળીમાં સરેરાશ એસ્પીરીન 10 મી.ગ્રા. છે.

ઉદાહરણ નં. 4

હરિપુરા જિલ્લાની વસ્તીનું સરેરાશ આયુષ્ય 60 વર્ષ છે. આ જિલ્લાએ આરોગ્ય વિષયક ઉપાયો હાથ ધરેલ છે. તેને અનુગામી 25 વ્યક્તિઓના નિદર્શનું સરેરાશ આયુષ્ય 60.5 વર્ષ માલૂમ પડે છે. જેનું પ્રમાણિત વિચલન 2 વર્ષ જોવા મળેલ છે. આપણે 0.05 સાર્થકતા સ્તરે નક્કી કરી શકીએ કે આ જિલ્લાનું સરેરાશ આયુષ્ય તે જ રહેવા પામેલ છે ?

અહીં $H_0 : \mu = 60$

આપણે અહીં આયુષ્યમાં વધારો થયો છે કે કેમ ? તે નક્કી કરવાનું છે. આ રીતે એક પૃચ્છીય કસોટી થશે અને પ્રામાણ્ય વક્રની જમણી બાજુ ક્ષેત્ર રદ કરવાનું થશે.

તેથી આપણી વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના

H1 : $\mu \neq 60$

અહીં સમષ્ટિનું પ્રમાણિત વિચલન અજ્ઞાત છે અને આપણે તેનું પરિમાપન નિદર્શના પ્રમાણિત વિચલન s દ્વારા કરીએ છીએ. અહીં નિદર્શનું કદ નાનું છે તેથી આપણે t પરીક્ષણ (17.6)માં આપેલ છે તેને પ્રયોજીશું.

$$t = \frac{|\bar{x}-\mu|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{|6.50-60|}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = \frac{0.5}{2/5} = \frac{0.5}{0.4} = 1.25$$

જ્યારે નિદર્શ કદ 25 છે. સ્વતંત્રતાની માત્રા 25-1=24 છે. t સારણીમાંથી સ્વતંત્રતાની માત્રા-24 અને સાર્થકતાનું સ્તર 5% પ્રમાણે t નું મૂલ્ય 1.71 છે.

અહીં ઉપર મુજબ મેળવેલ મૂલ્ય ટેબલ મૂલ્ય કરતાં ઓછું છે. તેથી આપણે ઉત્કલ્પના રદ કરતા નથી. તેથી, આપણે વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના કે આરોગ્યની કાળજીના ઉપાયો લેવા છતાં આયુષ્યમાં ફેરફાર થયો નથી.

◆ **તમારી પ્રગતિ ચકાસો (Self Check Exercise)**

(6) એક અહેવાલ દાવો કરે છે કે 'શાળાંત પરીક્ષા'માં ગણિતશાસ્ત્ર વિષયમાં સરેરાશ માર્કસ 78 હતા. જેનું પ્રમાણિત વિચલન 16 હતું. યદચ્છ રીતે પસંદ કરેલ 37 જેટલા વિદ્યાર્થીઓને (નમૂના) ગણિતશાસ્ત્રમાં સરેરાશ 84 માર્કસ જોવા મળેલ છે.આ પૂરાવા સંદર્ભમાં, આપણે કહી શકીએ કે સરાસરી ગુણ બદલાયેલ નથી ? 0.05 ના સાર્થકતા સ્તરનો ઉપયોગ કરો.

(7) પેસેન્જર કાર બનાવતી એક કંપનીનો દાવો છે કે કારની કાર્ય ક્ષમતા પ્રતિ લીટર પેટ્રોલ 35 કિ.મી. છે. યદચ્છ રીતે પસંદ કરેલ 50 કારમાં પ્રતિ લીટર પેટ્રોલ 32 કિ.મી. કાર્યક્ષમતા છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન 1.2 કિ.મી. છે. આ પૂરાવો પેસેન્જર કાર કંપનીનો દાવો 0.01 સાર્થકતા સ્તરે ખોટો પાડી શકે છે ?

(8) નાળેયેર તેલના ડબ્બાના યદચ્છ પસંદ કરેલ 200 ડબ્બાના નમૂનાનું સરેરાશ વજન 4.95 કિ.ગ્રા. છે. જેનું પ્રમાણિત વિચલન 0.21 કિ.ગ્રા. છે. 0.01 ની સાર્થકતાના સ્તરે આપણે 'ડબ્બાનું ચોક્કસ વજન 5 કિ.ગ્રા. છે' તેવી ઉત્કલ્પના સ્વીકારીશું ?

(9) એક અહેવાલ પ્રમાણે, સરકારી કર્મચારીઓની નજીકના વર્ષ દરમ્યાન રાષ્ટ્રીય સરાસરી વાર્ષિક આવક રૂા. 24,632 હતી. જેનું પ્રમાણિત વિચલન રૂા. 1827 હતું. તે જ વર્ષ દરમ્યાન યદચ્છ પસંદ કરેલ 49 સરકારી કર્મચારીઓની સરાસરી વાર્ષિક આવક રૂા. 25,415 જોવા મળેલ. આ નિદર્શના પુરાવાને 0.05 સાર્થકતાના સ્તરે, આપણે નિર્ણય કરી શકીએ કે, સરકારી કર્મચારીઓની રાષ્ટ્રીય સરાસરી આવક રૂા. 24632 વાસ્તવમાં હતી ?

નોંધ : (1) તમારા ઉત્તર નીચે આપેલી જગ્યામાં લખો.

(2) આ એકમના અંતે આપેલા ઉત્તરો સાથે તમારા ઉત્તરો ચકાસો.

....
....
....
....
....
....

17.7 બે નમૂનાઓ (નિદર્શો) વચ્ચેના તફાવત માટેનું પરીક્ષણ (TEST FOR DIFFERENCE BETWEEN TWO SAMPLES)

ઘણીવાર બે નમૂનાઓ વચ્ચેના તફાવતનું પરીક્ષણ જરૂરી હોય છે. તેનો હેતુ બંને નિદર્શ એક જ સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવેલ છે કે કેમ તે નક્કી કરવાનો અથવા કોઈ એક ખાસ લક્ષણ બે સમષ્ટિમાં છે કે કેમ તે ચકાસવાનો હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે એક ઉત્કલ્પના નિર્ધારિત કરીએ કે પ્લાન્ટ 'એ'માં કામદાર દીઠ થતું ઉત્પાદન, પ્લાન્ટ 'બી'માં કામદાર દીઠ થતા ઉત્પાદન જેટલું જ છે. આ પ્રકારની ઉત્કલ્પનાના પરીક્ષણ માટેની ચર્ચા આપણે નીચે મુજબ કરીએ.

અહીં આપણે ફરીથી બે જુદી જુદી પરિસ્થિતિ સાથે સંપર્ક કરીશું. બંને સમષ્ટિનું વિચરણ જ્ઞાત છે કે

કેમ ? બીજી સ્વીકાર્ય બાબત નિદર્શના કદની છે : ગુરુનિદર્શ અથવા લઘુનિદર્શ.

શૂન્ય ઉત્કલ્પનાનું વિધાન છે કે બંને સમષ્ટિના સમષ્ટિ મધ્યક એક જ સરખા છે. સંકેતમાં

$Ho : \mu_1 = \mu_2$ 17.7

વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પનાનું વિધાન છે કે બંને સમષ્ટિના મધ્યક જુદા જુદા છે સંકેતમાં

$H_A : \mu_1 \neq \mu_2$ 17.8

સમષ્ટિનું વિચરણ જ્ઞાત હોય (Populatin Variance is Known)

જ્યારે બંને સમષ્ટિનું પ્રમાણિત વિચલન (વિચરણનું ઘન વર્ગમૂળ) જ્ઞાત હોય ત્યારે આપણે Z પરીક્ષણ જે નીચે પ્રમાણે સ્પષ્ટ કરેલ છે તેને પ્રયોજિત કરીશું :

$$z = \frac{\left|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)\right|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}} \qquad ....17.9$$

ઉપર 17.8માં પાદાંક 1 પ્રથમ નિદર્શ અને પાદાંક 2 બીજા નિદર્શનો સંદર્ભ આપે છે. સૂત્ર 17.9માં યોગ્ય સંગત આંકડા પ્રયોજીત કરીને આપણે Z નું વાસ્તવિક મૂલ્ય મેળવીએ છીએ અને તેને મૂલ્ય નક્કી કરેલ સાર્થકતાના સ્તર મુજબ સારણી મૂલ્ય સાથે સરખાવીએ છીએ.

ઉદાહરણ નં.5

એક બેંક તેના દિલ્હી અને કલકત્તાના ગ્રાહકોની સરેરાશ બચત અંગે જાણવા ઇચ્છે છે. દિલ્હીમાં 250 ખાતાનો નિદર્શ દર્શાવે છે કે સરાસરી બચત રૂા. 22,500 છે, જ્યારે કલકત્તામાં 200 ખાતાનો નિદર્શ દર્શાવે છે કે સરાસરી બચત રૂા. 22,400 છે. દિલ્હીમાં બચતનું પ્રમાણિત વિચલન રૂા. 150 અને કલકત્તામાં બચતનું પ્રમાણિત વિચલન રૂા. 200 છે. આપણે સાર્થકતાના 1% સ્તરે નક્કી કરી શકીએ કે દિલ્હી અને કલકત્તાના ગ્રાહકોની બચતની રીતભાત સરખી છે ?

શૂન્ય ઉત્કલ્પના સંદર્ભમાં આ ઉદાહરણ $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$

આપણને આ પ્રમાણે માહિતી આપવામાં આવી છે કે

$(\bar{x}_1)$ = Rs. 22,500 σ_1 = Rs. 150

$(\bar{x}_2)$ = Rs. 22,400 σ_2 = Rs. 200

$n_1 = 250$ $n_2 = 200$

જ્યારે σ_1 અને σ_2 જ્ઞાત છે ત્યારે આપણે z-પરીક્ષણ પ્રયોજીશું.

પરીક્ષણ સૂત્ર

$$z = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| - \left|(\mu_1 - \mu_2)\right|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}}$$

આપેલ માહિતીને ઉપરના સૂત્રમાં મૂકતાં આપણે મેળવીશું.

$$z = \frac{\left|22500 - 22400\right|}{\sqrt{\frac{150^2}{250} + \frac{200^2}{200}}} = \frac{100}{\sqrt{90 + 200}} = \frac{100}{\sqrt{290}} = 5.87$$

સારણી નં.17.1માંથી આપણે 1%ના સાર્થકતા સ્તરે નિરાકરણીય મૂલ્ય 2.58 મેળવીએ છીએ.

જ્યારે વાસ્તવિક મૂલ્ય સારણીમાં દર્શાવેલ મૂલ્ય કરતાં વધુ છે, તેથી શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીશું અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પનાનો સ્વીકાર કરીશું. આ રીતે દિલ્હી અને કલકત્તામાં બેંક ગ્રાહકની બચતની રીતભાત જુદી જુદી છે.

સમષ્ટિનું વિચરણ અજ્ઞાત હોય (Population Variance is not Known)

જ્યારે સમષ્ટિનું વિચરણ (σ^2) અજ્ઞાત હોય ત્યારે આપણે તેનું પરિમાપન નિદર્શ વિચરણ (s^2) દ્વારા કરીએ છીએ. જો બંને નિદર્શ ગુરુ નિદર્શ કદના હોય ($n>30$) ત્યારે આપણે z પરીક્ષણ નીચે પ્રમાણે પ્રયોજીએ છીએ :

$$z = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)| - |(\mu_1 - \mu_2)|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad \text{.............(17.10)}$$

બીજી તરફ, જો નિદર્શનું કદ નાનુ હોય લઘુ નિદર્શ ($n \leq 30$) ત્યારે આપણે t-પરીક્ષણ નીચે મુજબ પ્રયોજિત કરીએ છીએ :

$$t = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)| - |(\mu_1 - \mu_2)|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad \text{.............(17.11)}$$

t પરીક્ષણ માટે સ્વતંત્રતાની માત્રા = $(n_1-1)+(n_2-1)=n_1+n_2-2$

ઉદાહરણ નં.6

ગણિતશાસ્ત્રની એક શિક્ષિકા ધોરણ-10ના બે વિભાગના વિદ્યાર્થીઓનો દેખાવ સરખાવવા ઈચ્છે છે. તેણીની 25 પ્રશ્નો એક જ સેટ વિભાગ અ ના 25 વિદ્યાર્થીઓ અને વિભાગ બ ના 20 વિદ્યાર્થીઓમાં પ્રયોજિત કરે છે. તેણીની શોધી કાઢે છે કે વિભાગ અ ના વિદ્યાર્થીઓના સરેરાશ ગુણ 78 છે જેનું પ્રમાણિત વિચલન 4 ગુણ છે. જ્યારે વિભાગ બ ના સરેરાશ ગુણ 75 છે જેનું પ્રમાણિત વિચલન 5 ગુણ છે. 1% ના સાર્થકતા સ્તરે બંને વિભાગના વિદ્યાર્થીઓનો દેખાવ જૂદો છે ?

આ ઉદાહરણમાં શૂન્ય ઉત્કલ્પના $H_0 : \mu_1=\mu_2$

અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$

આપણે નીચે મુજબ માહિતી આપવામાં આવેલ છે કે

$\bar{x}_1 = 78 \qquad S_1=4$

$\bar{x}_2 = 75 \qquad S_2=5$

$n_1= 25 \qquad n_2=20$

જ્યારે 6_1 અને 6_2 અજ્ઞાત છે અને નમૂનો લઘુ નિદર્શ કદનો છે. તેથી આપણે આ t-પરીક્ષણ પ્રયોજીશું.

$$t = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)| - |(\mu_1 - \mu_2)|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{|78-75|}{\sqrt{\frac{4^2}{25} + \frac{5^2}{20}}} = \frac{3}{1.37} = 2.18$$

સ્વતંત્રતાની માત્રા આ ઉદાહરણમાં 25 ₹ 20 - 2 = 43 છે.

સારણી નં. 17.3 સાર્થકતાની 1% કક્ષાએ સ્વતંત્રતાની માત્રા 43 એ t નું મૂલ્ય 2.69 મળે છે.

જ્યારે t નું સારણીમાંથી મૂલ્ય વાસ્તવિક મૂલ્ય કરતાં ઓછું છે તેથી શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીશું. તેથી , વિભાગ ‘અ’ અને વિભાગ ‘બ’ ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણિતશાસ્ત્રમાં આ સંદર્ભમાં દેખાવ જુદો જુદો છે.

17.8 આસંગ સારણી (CONTINGENCY TABLE)

સંખ્યાકીય બાબતો સંદર્ભમાં આપણે વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ અને ઉત્કલ્પના પરીક્ષણની વિભાવનાની ચર્ચા આપણે કરી. ગુણાત્મક માહિતીના ઉદાહરણમાં, આપણે આ પ્રકારના પરીક્ષણનો ઉપયોગ કરી ન શકીએ કારણ કે આપણી પાસે પ્રાચલો નથી. તેથી ગુણાત્મક માહિતી માટે, આપણે બિનપ્રાચલીય પરીક્ષણો વિકસાવવાની જરૂરિયાત રહે છે.

આપણી જરૂરિયાત અનુસાર બિનપ્રાચલીય પરીક્ષણો ઘણા પ્રકારના છે. તેમ છતાં, (આપણી જાતને) આપણે એક સામાન્ય પ્રક્રિયા પૂરતી મર્યાદિત રાખીશું તે છે X^2 પરીક્ષણ (ઉચ્ચાર કાય-સ્કેયર) જે ચલો વચ્ચેની સ્વતંત્રતા પરીક્ષણ માટે છે. યાદ કરો કે ગુણાત્મક માહિતી કક્ષા પ્રમાણે ગોઠવી શકાય છે (જૂઓ એકમ નં.6) અને તેને દ્વિમાર્ગી સારણીમાં ગોઠવી શકાય છે.

કાયસ્કેયર પરીક્ષણની પ્રયોજિતતા સમજાવવા માટે ચાલો આપણે એક સઘન ઉદાહરણ લઈએ. ધારો કે આપણે ઉત્કલ્પના પરીક્ષણ કરવા ઈચ્છીએ છીએ કે કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા તેમના પિતાના વ્યવસાયથી સ્વતંત્ર છે. આપણે પિતાનો વ્યવસાય પાંચ કક્ષામાં વહેંચીએ છીએ. (i) બેકાર, (બિન રોજગાર) (ii) બિનકૌશલ્ય મજૂર (iii) કૌશલ્ય મજૂર, (iv) સ્વરોજગાર, અને (v) વ્યાવસાયિક. તે જ રીતે કુટુંબોને બાળકોની સંખ્યા આધારિત પાંચ કક્ષામાં વહેંચીએ છીએ. (i) શૂન્ય બાળક, (ii) એક બાળક, (iii) બે બાળક, (iv) ત્રણ બાળક, (v) ત્રણ કરતાં વધુ બાળક. 650 કુટુંબોના નિદર્શમાંથી મેળવેલ માહિતી સારણી નં. 17.3માં રજૂ કરવામાં આવી છે.

17.3 પિતાનો વ્યવસાય અને બાળકોની સંખ્યા

બાળકોની સંખ્યા	વ્યવસાય					કુલ
	બેરોજગાર (1)	બિનકૌશલ્ય (2) મજૂર	કૌશલ્ય (3) મજૂર	સ્વરોજગાર (4)	વ્યાવસાયિક (5)	
0	10	15	10	12	11	58
1	35	25	17	18	25	120
2	22	33	45	40	43	183
3	11	40	48	58	30	187
≥ 4	11	33	30	19	09	102
કુલ	89	146	150	147	118	650

સારણી નં. 17.3, આસંગ સારણી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે કારણ કે આપણે શોધવા પ્રયત્ન કરીએ છીએ કે બાળકોની સંખ્યા પિતાના વ્યવસાય ઉપર આધારિત છે કે કેમ.

આપણો હેતુ બાળકોની સંખ્યા અને પિતાના વ્યવસાય વચ્ચે શક્ય સંબંધનું પરીક્ષણ કરવાનો છે. શૂન્ય ઉત્કલ્પના આ રીતે સ્પષ્ટ કરીશું :

H_0 : બાળકોની સંખ્યા અને પિતાનો વ્યવસાય બંને સ્વતંત્ર છે આની સામે વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના

H_A : બાળકોની સંખ્યા અને પિતના વ્યવસાય ઉપર આધારિત છે.

અપેક્ષિત આવૃત્તિ (Expected Frequency) :

આપણે સારણી નં. 17.3માં દરેક ખાનામાં નિરક્ષિત આવૃત્તિ રજૂ કરી છે. જ્યારે સ્વીકારવામાં આવેલ ચલ વચ્ચે સંબંધ ન હોય ત્યારે અપેક્ષિત આવૃત્તિ શું હોઈ શકે ? આપણે આ પ્રશ્નનો જવાબ નીચે આપીશું.

અપેક્ષિત આવૃત્તિની ગણતરી બાળકોની સંખ્યા અને પિતાના વ્યવસાય વચ્ચે સંબંધ નથી તેવી ધારણા નીચે કરવામાં આવે છે. સારણી નં. 17.3માં દરેક ખાનાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ નીચેના સૂત્ર દ્વારા મેળવવામાં આવે છે.

$$E_{ij} = \frac{(\text{i પંક્તિનો કુલ સરવાળો})\ (\text{j સ્તંભનો કુલ સરવાળો})}{\text{નિદર્શનું કદ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 17.12$$

જ્યાં Eij એ i મી પંક્તિ અને j માં સ્તંભની અપેક્ષિત આવૃત્તિ છે. દા.ત. 2જી પંક્તિ અને 2જા સ્તંભની અપેક્ષિત આવૃત્તિ

$$E_{22} = \frac{\text{2જી પંક્તિનો કુલ સરવાળો} \times \text{2જા સ્તંભનો કુલ સરવાળો}}{\text{નિદર્શનું કદ}}$$

સારણી નં. 17.3 માં આપેલ પંક્તિ અને સ્તંભનો કુલ સરવાળો અને દરેક ખાનાની પરિગણના કરેલ અપેક્ષિત આવૃત્તિ શોધી કાઢીશું. આ આવૃત્તિએ સારણી નં. 17.4 માં આપવામાં આવેલ છે.

સારણી નં. 17.4 દરેક ખાનાની અપેક્ષિત આવૃત્તિની ગણતરી

બાળકોની સંખ્યા	વ્યવસાય					કુલ
	બેરોજગાર	બિનકૌશલ્ય મજૂર	કૌશલ્ય મજૂર	સ્વરોજગાર	વ્યાવસાયિક	
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
0 r_1	7.94	13.03	13.38	13.12	10.53	58.00
1 r_2	16.43	26.95	27.69	27.14	21.78	120.00
2 r_3	25.06	41.10	42.23	41.39	33.22	183.00
3 r_4	25.60	42.00	43.15	42.29	33.95	187.00
≥ 4 r_5	13.97	22.91	23.54	23.07	18.52	102.00
કુલ	89.00	146.00	150.00	147.00	118.00	650.00

બીજું પગથિયું નિરક્ષિત આવૃત્તિ અને અપેક્ષિત આવૃત્તિની સાથે તુલના કરવાનું છે. નિરક્ષિત આવૃત્તિની અપેક્ષિત આવૃત્તિ સાથે તુલના કરવા આપણે કાયસ્કેયર પરીક્ષણ સૂત્રની રચના કરીશું, જે અહીં આપવામાં આવેલ છે.

$$x^2 = \Sigma \frac{(Oi - Ei)^2}{Ei} \quad \text{.................. 17.13}$$

જ્યાં O નિરક્ષિત આવૃત્તિ અને E અપેક્ષિત આવૃત્તિનો સંદર્ભ આપે છે. કાયસ્કેયર પરીક્ષણને સ્વતંત્રતાની માત્રા (r-1) (c-1) હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો 3 પંક્તિ અને 4 સ્તંભ હોય તો, સ્વતંત્રતાની માત્રા (3-1) (4-1)=6.

ચાલો આપણે કાય સ્કેયર પરીક્ષણમાં અનુસરવા માટે તબક્કાને ટૂંકમાં રજૂ કરીએ :

(1) શૂન્ય અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના સ્પષ્ટ કરો.

(2) 17.12 સૂત્રનો ઉપયોગ કરી દરેક ખાનાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ શોધો.

(3) 17.13 સૂત્રનો ઉપયોગ કરી કાયસ્કેયર X^2 નું નિરક્ષિત મૂલ્ય શોધો.

(4) સ્વતંત્રતાની માત્રા (r-1) (c-1) નો ઉપયોગ કરી નક્કી કરો.

(5) સાર્થકતાનું સ્તર (α) ચકાસો.

(6) સાર્થકતાના સ્તર (α) અને સ્વતંત્રતાની માત્રા અનુસાર X^2 નું નિરાકરણીય મૂલ્ય શોધી કાઢો.

(7) X^2 ના નિરક્ષિત મૂલ્યને અપેક્ષિત X^2 ના મૂલ્યની સાથે સરખામણી કરો.

(8) જો નિરક્ષિત મૂલ્ય, અપેક્ષિત મૂલ્ય કરતાં ઓછું હોય તો, શૂન્ય ઉત્કલ્પના H_0 રદ કરો.

(9) જો નિરક્ષિત મૂલ્ય, અપેક્ષિત મૂલ્ય કરતાં વધુ હોય તો, શૂન્ય ઉત્કલ્પના H_0 રદ કરો અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના H_A સ્વીકારો.

સારણી નં. 17.4 માં આપેલ આંકડાકીય માહિતી માટે ચાલો આપણે X^2 નું નિરક્ષિત મૂલ્ય શોધી કાઢીએ.

સારણી નં. 17.5 : $\frac{(Oi - Ei)^2}{Ei}$ ની દરેક ખાના માટેની ગણતરી

બાળકોની સંખ્યા	વ્યવસાય					કુલ
	બેરોજગાર	બિનકૌશલ્ય મજૂર	કૌશલ્ય મજૂર	સ્વરોજગાર	વ્યાવસાયિક	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
0	0.53	0.30	0.86	0.10	0.02	1.80
1	20.99	0.14	4.13	3.08	0.47	28.81
2	0.37	1.60	0.18	0.05	2.88	5.08
3	8.33	0.10	0.54	5.84	0.46	15.26
$\geq$4	0.63	4.44	1.77	0.72	4.89	12.46
કુલ	30.85	6.58	7.48	9.7	8.72	63.41

જ્યારે પંક્તિ સંખ્યા 5 અને સ્તંભની સંખ્યા 5 છે ત્યારે, સ્વતંત્રતાની માત્રા (5-1)(5-1)=16 છે. X^2 નું 5% અને 1% ની સાર્થકતાએ જુદી જુદી સ્વતંત્રતાની માત્રા માટેના મૂલ્ય આ એકમને અંતે સારણી નં. 17.7 માં આપેલ છે. આપણે આ સારણીમાંથી સ્વતંત્રતાની માત્રા 16 અને 5% ની સાર્થકતાએ X^2 નું નિરાકરણીય મૂલ્ય 26.30 શોધીશું. X^2 નું નિરક્ષિત મૂલ્ય 63.41, જ્યારે નિરક્ષિત મૂલ્ય નિરાકરણીય મૂલ્ય કરતાં વધુ છે ત્યારે આપણે શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીએ છીએ અને વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના સ્વીકારીએ છીએ. તેથી, આપણે નિર્ણય કરીએ છીએ કે 'બાળકોની સંખ્યા' અને 'પિતાનો વ્યવસાય ચલો' સ્વતંત્ર નથી.

- **તમારી પ્રગતિ ચકાસો**

(10) નીચેની વિભાવનાઓ સમજાવો.

(અ) અપેક્ષિત આવૃત્તિ

(બ) X^2 નું નિરાકરણીય મૂલ્ય

(11) એક કંપની દ્વારા ત્રણ જાતના ઠંડા પીણા (ઓરેન્જ, કોલા અને લેમન) ઉત્પાદિત કરવામાં આવે છે. 160 વ્યક્તિઓનો બે રાજ્યો (એક ઉત્તરમાંથી પંજાબ અને બીજુ દક્ષિણમાંથી તામિલનાડુ)માં કરેલ સર્વે નીચેની માહિતી પૂરી પાડે છે.

	ઓરેન્જ	કોલા	લેમન
પંજાબ	33	26	31
તામિલનાડુ	17	24	29

ઉત્કલ્પનાનું પરીક્ષણ કરો કે બંને રાજ્યોમાં ઠંડા પીણાની કોઈ ખાસ જાત માટે કોઈ પસંદગી નથી. $(\alpha)=0.05$)

નોંધ : (1) નીચે આપેલ જગ્યામાં તમારો ઉત્તર લખો.

(2) આ એકમને અંતે આપવામાં આવેલ ઉત્તરો સાથે તમારા જવાબ સરખાવો.

....

....

....

....

....

....

17.9 સારાંશ (SUMMARY)

નિદર્શની માહિતીના આધારે સમષ્ટિ વિષે નિર્ણય લેવાની પ્રક્રિયાને આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. અહીં આપણે મૂળભૂત રીતે બે બાબતો કરવાની રહે છે : આંકડાશાસ્ત્રીય પરિમાપન અને ઉત્કલ્પના પરીક્ષણ.

અજ્ઞાત પ્રાચલનું પરિમાપન બિંદુ અથવા અંતરાલ બેમાંથી એક હોઈ શકે. સમષ્ટિ મધ્યક તરીકે સામાન્ય રીતે નિદર્શ મધ્યકને બિંદુ પરિમાપન તરીકે લેવામાં આવે છે. બીજી બાજુ, અંતરાલ પરિમાપનમાં આપણે નિદર્શ મધ્યકની આસપાસ બે સીમાઓ (ઉર્ધ્વ અને અધઃસીમાઓ)ની રચના કરીએ છીએ. આપણે નિર્ધારિત કરેલ વિશ્વાસ્યતાના સ્તર સાથે કહી શકીશું કે સમષ્ટિ મધ્યક, જે આપણે જાણતા નથી, તે લગભગ વિશ્વાસ્યતા અંતરાલની વચ્ચે રહેવા પામશે. વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ નક્કી કરવા માટે આપણે સમષ્ટિનું વિચરણ અથવા તેનું પરિમાપન જાણવું જરૂરી છે. જ્યારે આપણે સમષ્ટિનં વિચરણ જાણતા હોઈએ ત્યારે, આપણે વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ નક્કી કરવા પ્રામાણ્ય વિતરણને પ્રયોજિત કરીએ છીએ. જ્યાં સમષ્ટિ વિતરણ અજ્ઞાત હોય (જાણતા ન હોઈએ), તેવા ઉદાહરણોમાં આપણે ઉપરના હેતુ માટે t વિતરણનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. યાદ રાખો કે જ્યારે નિદર્શનું કદ મોટું હોય (ગુરુ નિદર્શ હોય) $(n>30)$ ત્યારે t-વિતરણ લગભગ પ્રામાણ્ય વિતરણ જેટલું હોય છે. આ રીતે ગુરુ નિદર્શમાં, સમષ્ટિ વિચરણ જાણતા ન હોઈએ તો પણ, નિદર્શ મધ્યક અને નિદર્શ વિચરણના આધારે વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ માટે પ્રામાણ્ય વિતરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

આનુષંગિક આપણે ઉત્કલ્પના પરીક્ષણ પદ્ધતિઓ અને સમષ્ટિ વિષે નિર્ણય લેવાની પ્રક્રિયાની ચર્ચા કરી છે. ઉત્કલ્પનાએ પ્રાચલો દ્વારા અનુમાનિત મૂલ્ય વિષેનું સાદુ વિધાન (દ્દઢ નિર્ણય કે દાવો) છે. નિદર્શ વિષે પ્રાપ્ય માહિતીને આધારે આપણે ઉત્કલ્પનાનું પરીક્ષણ કરીએ છીએ. આ એકમમાં આપણે બે પરિસ્થિતિઓ (1) એક જ નિદર્શનું વર્ણન અને (2) બે નિદર્શોની તુલના સ્વીકારેલ છે.

ગુણાત્મક માહિતીના નમૂનાઓમાં આપણી પાસે પ્રાચલના મૂલ્યો હોતા નથી અને ઉત્કલ્પનાનું પરીક્ષણ z પરીક્ષણ અને t પરીક્ષણ સૂત્રોના આધારે કરી ન શકીએ. આ પરિસ્થિતિમાં કાયસ્કેયર પરીક્ષણ પ્રયોજવામાં આવે છે. કાયસ્કેયર પરીક્ષણ એ બિનપ્રાચલીય પરીક્ષણ છે, જેમાં સમષ્ટિ અંગે કોઈ ધારણા કરવી જરૂરી નથી. કાયસ્કેયર ઉપરાંત બીજી ઘણી પદ્ધતિઓ બિનપ્રાચલીય પરીક્ષણો માટે ઉપલબ્ધ છે. ઉપરાંત કાયસ્કેયરને ઘણી પરિસ્થિતિમાં પ્રયોજી શકાય છે. આપણે ખાસ કરીને આસંગ સારણીની પ્રયોજિતતા કાયસ્કેયર પરીક્ષણમાં અભ્યાસ કર્યો. આસંગ સારણીમાં આપણે શૂન્ય ઉત્કલ્પના કે જેમાં સ્વીકારવામાં આવેલ ચલ સ્વતંત્ર છે, તેની વિરુદ્ધ વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના કે જેમાં સ્વીકારવામાં આવેલ ચલ સંબંધ ધરાવે છે તેનું પરીક્ષણ કરીએ છીએ. આપણે અપેક્ષિત આવૃત્તિ અને અવલોકિત આવૃત્તિની તુલના કરીએ છીએ અને કાયસ્કેયર પરીક્ષણની રચના કરીએ છીએ. જો કાયસ્કેયરની નિરક્ષિત આવૃત્તિ અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ કરતાં વધુ હોય તો આપણે શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીએ છીએ.

17.10 તમારી પ્રગતિ ચકાસોના ઉત્તરો (ANSWERS TO SELF CHECK EXERCISES)

(1) પાઠ વાંચો અને આ પદોને વ્યાખ્યાયિત કરો.

(2) જ્યારે તે ગુરુ નિદર્શ છે તો આપણે z -પરીક્ષણ પ્રયોજીશું. વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ $4.40 \leq \overline{\mu} \geq 4.60$ છે.

(3) જ્યારે તે લઘુ નિદર્શ છે અને સમષ્ટિનું વિચરણ આપવામાં આવેલ નથી. આપણે સ્વતંત્રતાની માત્રા 24 સાથે t પરીક્ષણ પ્રયોજીશું. t નું 99% વિશ્વાસ્યતાના સ્તરે સારણી મૂલ્ય 2.49 છે. વિશ્વાસ્યતા અંતરાલ $93.01 \leq \mu \leq 96.99$ છે.

(4) પાઠ વાંચો અને આ પદોને વ્યાખ્યાયિત કરો.

(5) તે ગુરુ નિદર્શ છે અને σ અજ્ઞાત છે. રદ કરવાનું ક્ષેત્ર દર્શાવવા માટે આપણે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રનો ઉપયોગ કરીશું. તે પ્રમાણે આકૃતિ દોરો.

(6) જ્યારે તેનું વિચરણ જ્ઞાત છે અને ગુરુ નિદર્શ છે, આપણે z પરીક્ષણ પ્રયોજીશું. વૈકલ્પિક ઉત્કલ્પના $\mu \neq 78$ છે. z નિરક્ષિત મૂલ્ય 2.28 છે અને z નું નિરાકરણીય મૂલ્ય 5% ના વિશ્વાસ્યતાના સ્તરે 1.96 છે. તેથી નિરક્ષિત મૂલ્ય, નિરાકરણીય મૂલ્ય કરતાં વધુ છે તેથી આપણે શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીશું. તેથી આપણે નિર્ણય કરીએ છીએ કે સરેરાશ ગુણ 78 કરતાં જુદા છે.

(7) તે ગુરુ નિદર્શ છે જેનું વિચરણ અજ્ઞાત છે. તે માટે દ્વિપૂચ્છીય કસોટી જરૂરી છે. Z નું નિરક્ષિત મૂલ્ય 17.68 અને નિરાકરણીય મૂલ્ય 1% ની સાર્થકતાના સ્તરે 2.58 છે. અહીં નિરક્ષિત મૂલ્ય નિરાકરણીય મૂલ્ય કરતાં વધુ છે, તેથી શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીશું.

(8) આ અજ્ઞાત વિચરણ સાથેનો ગુરુ નિદર્શ છે. આપણે z પરીક્ષણ સાથે શૂન્ય ઉત્કલ્પનાનું પરીક્ષણ કરીશું. z નું નિરક્ષિત મૂલ્ય 3.37 છે. શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીશું.

(9) આ ગુરુ નિદર્શ છે, જેનું પ્રમાણિત વિચલન જ્ઞાત છે આપણે z પરીક્ષણ પ્રયોજીશું. z નું નિરક્ષિત મૂલ્ય 3.00 છે. z નું નિરાકરણીય મૂલ્ય 5% ની સાર્થકતાના સ્તરે 2.58 છે. શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરવામાં આવે છે. તેથી, સરકારી કર્મચારીઓની રાષ્ટ્રીય સરાસરી વાર્ષિક આવક રૂા. 24632 કરતાં જુદી છે.

(10) પાઠ વાંચો અને આ પદો વ્યાખ્યાયિત કરો.

(11) અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ આ પ્રમાણે છે.

	ઓરેન્જ	કોલા	લેમન
પંજાબ	28.13	28.13	33.75
તામિલનાડુ	21.88	21.88	26.25

કાય-સ્કેયર પરીક્ષણનું નિરક્ષિત મૂલ્ય 2.98 છે. સ્વતંત્રતાની માત્રા 2 છે. 5% ની સાર્થકતાના સ્તરે અને 2 માત્રાએ કાયદેસરનું નિરાકરણીય મૂલ્ય 5.99 છે. તેથી શૂન્ય ઉત્કલ્પના રદ કરીશું નહિ અને ઠંડા પીણાંનો વપરાશ પ્રદેશથી સ્વતંત્ર છે.

17.11 ચાવીરૂપ શબ્દો (KEY WORDS)

વિશ્વાસ્યતા સ્તર (Confidence Level) : તે નિદર્શોના ટકા (સંભાવના) આપે છે. જ્યાં સમષ્ટિ મધ્યક, નિદર્શ મધ્યકની આસપાસ વિશ્વાસ્યતા અંતરાલમાં રહેવા પામશે. જો (α) એ સાર્થકતા સ્તર હોય તો (1-α) એ વિશ્વાસ્યતા સ્તર થશે.

આસંગ સારણી (Contigency Table) : દ્વિચલના આંકડા રજૂ કરવા માટે દ્વિમાર્ગી સારણી છે. તેને આસંગ સારણી કહેવામાં આવે છે કારણ કે આપણે એક ચલ બીજા ચલ સાથે સામીપ્ય ધરાવે છે કે કેમ તે શોધવા પ્રયત્ન કરીએ છીએ.

સ્વતંત્રતાની માત્રાઓ (Degrees of Freedom) : તે માહિતીના સ્વતંત્ર અંશ કે જે આપેલ અવલોકનોના કેટલાક લક્ષણો ઉમેરવા જરૂરી છે તેનો સંદર્ભ આપે છે.

પરિમાપન (Estimation) : તે નિદર્શના આંકડાઓ આધારિત પ્રાચલોના મૂલ્યોનું પૂર્વાનુમાન કરવાની પદ્ધતિ છે.

અપેક્ષિત આવૃત્તિ (Expected Frequency) : તે ખાનાની (cell intable) અપેક્ષિત આવૃત્તિ છે. જે બંને ચલ સ્વતંત્ર છે તેવી ધારણા નીચે કરવામાં આવે છે.

અંકિત મૂલ્ય ધરાવતા ચલ (Nominal Variable) : એવા ચલ કે જે ગુણાત્મક મૂલ્ય ધારણ કરે છે અને તેમની વચ્ચે ક્રમદર્શી સંબંધ ધરાવતા નથી. દા.ત., જાતિએ અંકિત મૂલ્ય ધરાવતો ચલ છે જે માત્ર ગુણાત્મક મૂલ્યો પુરુષ અથવા સ્ત્રી ધરાવે છે; ‘સ્ત્રી’ અને ‘પુરુષ’ના મોભા અંગે કોઈ ક્રમ નથી. અંકિત મૂલ્ય ધરાવતા ચલને લક્ષણ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

પ્રાચલ (Parameter) : સમષ્ટિના કેટલાક લક્ષણોનું માપ છે.

સમષ્ટિ (Population) : તે સ્પષ્ટ કરેલ પ્રકાર અનુસાર આપેલ ક્ષેત્ર (સ્થળ) અને ખાસ કોઈ એક સમયમાં સંગ્રહિત કરેલ તમામ એકમોનો સંગ્રહ છે.

યદચ્છ નિદર્શ (Random Sampling) : તે એક એવી પ્રક્રિયા છે જેમાં સમષ્ટિના દરેક સભ્યને ચોક્કસ તક મળવાની અથવા નિદર્શમાં પસંદ થવાની સંભાવના રહેલી છે. તેને સંભાવના નિદર્શન પદ્ધતિ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. યદચ્છ નિદર્શન પદ્ધતિ ઘણા પ્રકારની હોય છે : સ્થળ નિદર્શન પદ્ધતિ, પદ્ધતિસરની નિદર્શન પદ્ધતિ, સ્તરિત નિદર્શન પદ્ધતિ.

નિદર્શ-નમૂનો (Sample) : તે સમષ્ટિનો ઉપગણ છે. સમષ્ટિમાંથી તેની પસંદગી સંભાવનાના નિયમો આધીન વૈજ્ઞાનિક રીતે કરવામાં આવે છે. જેથી અંગત પૂર્વગ્રહ દૂર કરી શકાય. સમષ્ટિમાંથી ઘણા નિદર્શ પસંદ કરી શકાય છે અને નિદર્શ પસંદ કરવાની ઘણી પદ્ધતિઓ છે.

નિદર્શ વિતરણ (Sampling Distribution) : તે સાપેક્ષ વિતરણ અથવા જ્યારે અનંત સંખ્યામાં નિદર્શો હોય ત્યારે સ્થિર મૂલ્યો ધરાવતા નિદર્શોનું સંભાવના વિતરણ છે.

નિદર્શ ભૂલ (Sampling Error) : નિદર્શન પદ્ધતિમાં, આપણે આપેલ સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલ નિદર્શના કેટલાક લક્ષણોનો અંદાજ કાઢવા પ્રયત્ન કરીએ છીએ. તેમ છતાં, જ્યારે સમષ્ટિના તમામ એકમોનો સમાવેશ થયેલ નથી, તેથી અંદાજ સમષ્ટિના અંદાજને તદ્રૂપ નથી અને ભૂલ ચોક્કસ રહેવાની. આ ભૂલને નિદર્શભૂલ કહેવામાં આવે છે.

સાર્થકતા સ્તર (Significance Level) : કેટલાક નિદર્શો એવા હોવાના કે જ્યાં સમષ્ટિ મધ્યક, નિદર્શ મધ્યકના વિશ્વાસ્યતા અંતરાલની વચ્ચે રહેવા પામશે નહિ. આ પ્રકારના નમૂનાની ટકાવારી (સંભાવના) સાર્થકતા સ્તર તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેને સામાન્ય રીતે સંકેત (α) તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે. જ્યારે (α)=0.05 (ને 5% છે) હોય ત્યારે આપણે કહી શકીએ કે 5% નમૂનાઓમાં આપણે ખોટો નિર્ણય લેવા જઈ રહ્યા છીએ અથવા પ્રકાર-1 ની ભૂલ કરી રહ્યા છીએ. સાર્થકતાનું સ્તર ગમે તે હોઈ શકે. પરંતુ સામાન્ય રીતે તે 5 ટકા અથવા 1 ટકાનું સ્તર લેવાય છે.

આંકડાને લગતું (Statistic) : તે નિદર્શમાં સમાવેશ થયેલ એકમના મૂલ્યનું કાર્ય છે. તેનો મૂળભૂત હેતુ સમષ્ટિના કેટલાક પ્રાચલોનું પરિમાપન કરવાનો છે.

17.12 સંદર્ભો અને વિશેષ વાચન (REFERENCES AND FURTHER READING)

Kiess, H.O. (1989). Statistical Concepts for the Behaviour Science, Boston : Allyn and Bacon.

IGNOU Course Material (2005). EEC 13 : Elementry Statistical methods and Survey Techniques. Block 7.