એકમ-7 વિકલન

રૂપરેખા

7.0 ઉદ્દેશો :

આ પ્રકરણ અર્થશાસ્ત્રમાં આગવું સ્થાન ધરાવે છે. તેની મદદથી વિકલનનો અર્થ સમજી તેના ઉપયોગ અંગે માહિતી મેળવી શકાશે, તેના વિવિધ નિયમોની જાણકારી મેળવી તેના પ્રથમ અને દ્વિતીય કક્ષાના વિકલનો કેવી રીતે મેળવી શકાય તે અંગેનું જ્ઞાન મેળવવાનો ઉદ્દેશ સિદ્ધ કરી શકાશે.

7.1 પ્રસ્તાવના

વિકલનનું ગણિતશાસ્ત્રમાં આગવું સ્થાન છે. તે ધંધા અને અર્થશાસ્ત્ર માટે ખૂબ જ ઉપયોગી સાધન છે. તેની મદદથી ધંધામાં કોઈ એક વસ્તુના ભાવ વધતા તેની માંગ ઉપર કેવી અસર થશે તે જાણી શકાય છે.

જો $y = f(x)$ હોય તો yને xનું વિધેય કહેવામાં આવે છે. જ્યાં y એ આધારિત ચલ અને x એ સ્વતંત્ર ચલ છે. જો x ની કિંમતમાં ફેરફાર કરવામાં આવે તો તેને અનુરૂપ yની કિંમત પર થતી અસર (ફેરફાર) વિકલનની મદદથી જાણી શકાય છે.

વિકલનને અંગ્રેજીમાં Derivatives અથવા Differentiation કહેવાય છે. વિકલનનો ગણિતનાં સાધન તરીકે આપણે આપણાં જીવનમાં અનેક જગ્યાએ ઉપયોગ જોઈ શકીએ છીએ. વિકલન એ કોઈ સ્વતંત્ર ચલમાં થતા ફેરફારને કારણે આધારિત ચલમાં કેટલો ફેરફાર થાય છે તેનું માપન કરે છે. એટલે કે ધારો કે xએ સ્વતંત્ર ચલ છે અને y તેના ઉપર આધારિત ચલ છે. આપણે અર્થશાસ્ત્રનું ઉદાહરણ લઈએ તો... ધારો કે વસ્તુની કિંમત x સ્વતંત્ર ચલ છે અને તે વસ્તુની માંગ y આધારિત ચલ છે. તો વસ્તુની કિંમતમાં જે ફેરફાર થાય તેનાથી માંગમાં કેટલો ફેરફાર થાય તે વિકલનની મદદથી જાણી શકાય છે. તેવી જ રીતે વેચાણ, નફો, ખોટ, કિંમતમાં કરવામાં આવતો ફેરફાર. આમ કોઈ પણ ચલમાં કેટલો ફેરફાર થશે તે વિશેનું આયોજન કરવું હોય તો વિકલનનો ઉપયોગ કરી શકાય છે.

વિદ્યાર્થી મિત્રો આપણે એક વધુ ઉદાહરણ લઈએ. ધારો કે 10 kgઆઈસ્ક્રીમનું ઉત્પાદન કરવું હોય તો તેમાં દૂધ, ખાંડ, ડ્રાયફ્રુટ વગેરેની અમુક માત્રામાં જરૂર પડે. આમ, 10 kg આઈસ્ક્રીમ એ આધારિત ચલ છેyહવે ધારો કે 10 kg આઈસ્ક્રીમ માટે 20 લિટર દૂધ જોઈએ, 10 kg ખાંડ જોઈએ અને 2 kg ડ્રાયફ્રુટ જોઈએ તો,

10 kg આઈસ્ક્રીમનો આધાર $(f) = 10\ kg$ખાંડ $+20$લિટર દૂધ

$+2kg$ ડ્રાયફ્રુટ

હવે ધારો કે કોઈપણ કારણોસર માત્ર 10 લિટર દૂધ જ મળી શકે તેમ છે તો આઈસ્ક્રીમનું ઈચ્છિત ઉત્પાદન મેળવી શકાશે નહીં. આમ, Inputમાં ફેરફાર થાય (x) તો Output (y)માં ફેરફાર થાય તે બાબત પણ વિકલનની મદદથી જાણી શકાય છે.

કિંમતમાં કેટલો ફેરફાર થશે ? કિંમતમાં કેટલો ફેરફાર કરવાથી વેચાણના જથ્થામાં કેટલો ફેરફાર થશે ? ... વગેરે ઉપરાંત સમય, ઝડપ વગેરે જાણવા માટે ભૌતિકશાસ્ત્ર પણ આનો ઉપોગ કરે છે.

વિદ્યાર્થી મિત્રો, અર્થશાસ્ત્રમાં તમે માંગની મૂલ્યસાપેક્ષતા, આવક સાપેક્ષતા, પ્રતિમૂલ્ય સાપેક્ષતા જેવા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કરો છો ! તેમાં આપણે જોઈએ છીએ કે એક ફેરફાર થાય તેની સાપેક્ષમાં આધારિત ચલમાં કેટલો ફેરફાર થાય છે...? તે અભ્યાસ કરવા માટે વિકલનનો તમે ઉપયોગ કરી શકો છો.

7.2 વિકલનનો અર્થ અને વ્યાખ્યા

ધારો કે $y = f(x)$ એ ચલxનું વાસ્તવિક વિધેય હોય કે જ્યાં y એ આધારિત ચલ અને xને સ્વતંત્ર ચલ છે. હવે xની કિંમતમાં અલ્પ વધારો કરી $x + h$ કરવામાં આવે તો તેને કારણે વિધેયની x આગળની કિંમતમાં પણ ફેરફાર થશે અને તે કિંમત $f(x + h)$ થશે. આમ $f(x + h) - f(x)$ એ વિધેયની કિંમતમાં થયેલા ફેરફાર છે અને xની કિંમતમાં થયેલ ફેરફાર $(x + h) - x = h$ થશે. હવે hની કિંમતમાં ખૂબ જ અલ્પ વધારો કરવામાં આવે તો આ ગુણોત્તરને y નું x આગળનું વિકલનફળ કહેવામાં આવે છે. અને તેને $f^{|}(x)$ વડે દર્શાવવામાં

આવે છે.

વિકલનની વ્યાખ્યા :

વિધેય $f(x)$ના પ્રદેશગણનો કોઈપણ સભ્ય x માટે

$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ થાય.

જ્યાં $h = x$ની કિંમતમાં થતો વધારો દર્શાવતું હોય અને લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો $f^{|}x$ એ વિધેય $f(x)$ નું x પ્રત્યેનું પ્રથમ વિકલનફળ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ટૂંકમાં $y = f(x)$ એ વિધેય હોય તો તેના વિકલનફળને $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f^{|}(x)$ અથવા $\frac{df(x)}{dx}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

7.3 વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ શોધવું

Step-1 : આપેલ વિધેય બરાબર $f(x)$ધારો.

Step-2 : $x = x + h$ ધારી $f(x+h)$ શોધો.

Step-3 : વિકલનની વ્યાખ્યા નીચે દર્શાવ્યા મુજબ લખો.

$$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Step-4 : $f(x+h)$ની શોધેલી કિંમત અને $f(x)$ની કિંમત ઉપરના સૂત્રમાં મૂકો.

Step-5 : મળેલ કિંમતમાંથી + ચિહ્ન અને - ચિહ્નવાળા પદો દૂર કરો (દા.ત. $+x^2$ અને $-x^2$)

Step-6 : h કોમન કાઢી તેને અંશ અને છેદમાંથી દૂર કરો.

Step-7 : $h = 0$ મૂકી $f^{|}(x)$ની કિંમત મેળવો.

ઉદાહરણ-1

x^2નું વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ :

Step-1 : $f(x) = x^2$

Step-2 : $x = x + h$

$f(x+h) = (x+h)^2$

$= x^2 + 2xh + h^2$

$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2xb + b^2$

Step-3 : **વિકલનની વ્યાખ્યા**

$$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Step-4 : $= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}$

Step-5 : $= \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$ $(+x^2 - x^2$દૂર કરતા)

$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$

Step-6 : $= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$ h કોમન લઈ અંશ-છેદમાંથી દૂર કરતા $\therefore h \neq 0$

Step-7 : $= \lim_{h \to 0} 2x + h$

$= 2x + 0$ $h = 0$મૂકતાં

$f^{|}(x) = 2x$

ઉદાહરણ-2

$3x^2 - 5$નું વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવો.

Step-1 : $f(x) = 3x^2 - 5$

Step-2 : $x = x + h$

$f(x+h) = 3(x+h)^2 - 5$

$= 3(x^2 + 2xh + h^2) - 5$

$\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5$

Step-3 : વિકલનની વ્યાખ્યા

$$f^{|}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Step-4 : $\lim_{h \to 0} \frac{(3x^2+6xh+3h^2-5)-(3x^2+5)}{h}$

Step-5 : $\lim_{h \to 0} \frac{3x^2+6xh+3h^2-5-3x^2+5}{h}$ $+3x^2$અને$-3x^2$દૂર કરો

-5અને$+5$ દૂર કરો

$\lim_{h \to 0} \frac{6xh+3h^2}{h}$

Step-6 : $\lim_{h \to 0} \frac{h(6x+3h)}{h}$ h કોમન લઈ દૂર કરતા $h \neq 0$

Step-7 : $\lim_{h\to 0} 6x + 3h$

$= 6x + 3(0)$

$f^{|}(x) = 6x$

ઉદાહરણ-3

$\sqrt{x}$નું વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ :

$f(x) = \sqrt{x}$

$x = x + h$ મૂકતાં

$f(x+h) = \sqrt{x+h}$

વિકલનની વ્યાખ્યા

$$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{(x)}}{h}$$

$\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$વડે અંશ અને છેદમાં ગુણતા

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{(x)}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ $\rightarrow h$અંશનો ગુણાકાર કરતા વર્ગમૂળ દૂર થાય

$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\}}$ h કોમન લઈ દૂર કરો $\because h \neq 0$તથા $+x$અને $-x$દૂર કરો

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}$ $h = 0$મૂકતાં

$$f^{|}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ઉદાહરણ-4

$5x^2 + 4x - 2$ નું વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ :

$f(x) = 5x^2 + 4x - 2$

$x = x + h$ મૂકતાં

$f(x+h) = 5(x+h)^2 + 4(x+h) - 2$

$= 5(x^2 + 2xh + h^2) + 4x + 4h - 2$

$= 5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4x + 4h - 2$

વિકલનની વ્યાખ્યા

$$f^{|}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \quad (5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4x + 4h - 2 - (5x^2 + 4h - 2)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4x + 4h - 2 - 5x^2 - 4x + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10xh+5h^2+4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(10x+5h+4)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \quad 10x + 5h + 4$$

$$= 10x + 5(0) + 4$$

$$f^{|}(x) = 10x + 4$$

(જાતેગણો) (સ્વાધ્યાય-1)

વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી નીચે આપેલ વિધેયનું વિકલનફળ શોધો.

1. x^3 (જવાબ : $3x^2$)

[Hint :$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\therefore (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + 4^3$]

2. $9x^2 + 5x + 3$ (જવાબ : $18x + 5$)

[Hint :$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^3$]

3. $3x + 5$ (જવાબ : 3)

4. $ax^2 + 6$ (જવાબ : $2ax$)

7.4 વિધેયના વિકલનફળના પ્રમાણિતરૂપો (સાબિતી વગર)

નોંધ : ખાસ યાદ રાખો.

(1) જો $y = f(x) = x^n$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = f^{|}(x) = nx^{n-1}$ થાય.

દા.ત. $f(x) = x^2$ હોય તો____$f^{|}(x) = 2x^{2-1} = 2x$

(2) જો $y = f(x) = e^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = f^{|}(x) = e^x$ થાય.

(3) જો $y = f(x) = log_e^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = f^|(x) = \frac{1}{x}$ થાય.

(4) જો $y = f(x) = a^x$ (જ્યાં a એ ધનપૂર્ણાંક) હોય તો

$\frac{dy}{dx} = f^|(x) = a^x . log_e^a$ થાય.

(5) જો $y = f(x) = k$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = f^|(x) = 0$ થાય.

(અચળ)

7. 5 વિકલનના નિયમો

જો u અને v એ x ના વિધેયો હોય તો તે બે વિધેયોના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર માટે વિકલનફળો મેળવવા માટેના નિયમો નીચે મુજબ લખી શકાય. (સાબિતી વગર)

નિયમ-1 સરવાળાનો નિયમ

બે વિધેયોના સરવાળાનું વિકલનફળ તે બે વિધેયોના વિકલનફળોના સરવાળા જેટલું જ થાય છે. એટલે કે

જો $y = u + v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

જ્યાં u નું વિકલનફળ $= \frac{du}{dx}$ અને vનું વિકલનફળ $= \frac{dv}{dx}$

નિયમ-2બાદબાકીનો નિયમ

બે વિધેયોનું બાદબાકી (તફાવત)નું વિકલનફળ તે બે વિધેયોના વિકલનફળોના બાદબાકી જેટલું જ થાય છે. એટલે કે

જો $y = u - v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

જ્યાં u નું વિકલનફળ $= \frac{du}{dx}$ અને vનું વિકલનફળ $= \frac{dv}{dx}$

નિયમ-3 ગુણાકારનો નિયમ:(A) બે વિધેયોનો ગુણાકાર

બે વિધેયોના ગુણાકારનું વિકલનફળ

= {પ્રથમ વિધેય ×બીજા વિધેયનું વિકલનફળ} + {બીજું વિધેય ×પ્રથમ વિધેયનું વિકલનફળ}

એટલે કે

જો $y = u . v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = u . \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

(B) ત્રણ વિધેયોનો ગુણાકાર

જો $y = u . v . w$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = u . v \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}$

નિયમ-4ભાગાકારનો નિયમ

બે વિધેયોના ભાગાકારનું વિકલનફળ

$$= \frac{(\text{છેદનું વિધેય} \times \text{અંશના વિધેયનું વિકલનફળ}) - (\text{અંશનું વિધેય} \times \text{છેદના વિધેયનું વિકલનફળ})}{(\text{છેદનું વિધેય})^2}$$

એટલે કે

જો $y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

નિયમ-5 સાંકળનો નિયમ : આ નિયમ મિશ્ર વિધેયના વિકલનફળ શોધવા માટે ઉપયોગી છે.

ò ιy એ u નું વિધેય હોય અને u એ x નું વિધેય હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ થાય.

7. 6 x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનના ઉદાહરણો

ઉપરના પાંચ નિયમોનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવીશું.

7.6.1 સરવાળાના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવવાના ઉદાહરણો (x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન)

ઉદાહરણ-1 $y = x^2 + 5$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ : $y = x^2 + 5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{d(5)}{dx}$ $\quad \because y = u + v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$= 2x + 0$ $\quad \because y = x^n$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$\frac{dy}{dx} = 2x$ $\quad \because y = x^2$

હોય તો $\frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x$ થાય અને $y = 5$

હોય તો $\frac{dy}{dx} = 0$ થાય કારણ 5 એ અચળ સંખ્યા છે. અચળ સંખ્યાનું વિકલનફળ હંમેશા શૂન્ય થાય. (એટલે કે જેનીસાથે x ન હોય તેનું વિકલનફળ $= 0$)

ઉદાહરણ-2 $y = x^5 + 4x^4 + 3x + 9$નું વિકલનફળ શોધો.

જવાબ : $y = x^5 + 4x^4 + 3x + 9$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 4(4x^3) + 3(1) + 0$

$= 5x^4 + 16x^3 + 3$

સમજૂતી : $y = x^n$હોય તો $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$y = x^5$હોય તો $\frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$

$y = x^4$હોય તો $\frac{dy}{dx} = 4x^{4-1} = 4x^3$

$y = x^1$હોય તો $\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

9 અચળ છે તેથી તેનું વિકલનફળ $= 0$

ઉદાહરણ-3 જો$y = x^2 + e^x + logx + 5^x$હોય તો તેનું વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ : $y = x^2 + e^x + logx + 5^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x + e^x + \frac{1}{x} + 5^x log5$

સમજૂતી: $y = x^2$હોય તો $\frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x$

$y = e^x$હોય તો $\frac{dy}{dx} = e^x$

$y = logx$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

[$y = 5^x$હોય તો $\frac{dy}{dx} = 5^x log5$

$\because y = a^x$હોય તો $\frac{dy}{dx} = a^x.loga$]

7.6.2 બાદબાકીના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવવાના ઉદાહરણો

ઉદાહરણ-4 $y = x^3 - 6$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ $\quad u = x^3$, $v = 6$

$= 3x^2 + 0$ $\quad \therefore \frac{du}{dx} = 3x^2, \frac{dv}{dx} = 0$

$= 3x^2 + 0$

$= 3x^2$

ઉદાહરણ-5 $y = x^4 - 3x^2 - 3^x$હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3(2x) - 3^x \ log3$

$= 4x^3 - 6x - 3^x \ log3$

7. 6.3 ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ શોધવાના ઉદાહરણો

ઉદાહરણ-6 જો $y = (x^2 - 5)(2x^2 + 1)$હોય તો $\frac{dy}{dx}$શોધો.

જવાબ : $y = (x^2 - 5)(2x^2 + 1)$

ધારો કે $u = x^2 - 5\ ,\ v = 2x^2 + 1$

$\therefore \frac{du}{dx} = 2x - 0 \quad \frac{dv}{dx} = 4x + 0$

$= 2x \quad = 4x$

હવે $y = u.v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

ઉપરની ચારેય કિંમત સૂત્રમાં મૂકતાં

$= (x^2 - 5)(4x) + (2x^2 + 1)(2x)$

$= 4x^3 - 20x + 4x^3 + 2x$

$$\frac{dy}{du} = 8x^3 - 18x$$

ઉદાહરણ-7 જો $y = e^x.x^e$હોય તો તેનું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન શોધો.

જવાબ : $y = e^x.x^e$

ધારો કે $u = e^x \quad v = x^e$

$$\therefore \frac{du}{dx} = e^x \frac{dv}{dx} = ex^{e-1}$$

જો $y = u.v$ હોય તો

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$= e^x.e.x^{e-1} + x^e.e^x$

$= e^x.x^e\left[\frac{e}{x} + 1\right]$ $\quad ..e^x x^e$ મેળવી કાઢતા અને $\{x^{e-1} = x^e.x^{-1} = \frac{x^e}{x}\}$

ઉદાહરણ-8 $x(x+2)(x^2+2)$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલન મેળવો.

જવાબ : ધારો કે $y = x(x+2)(x^2+2)$

અને $u = x \qquad v = x + 2 \qquad w = x^2 + 2$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad \frac{dv}{dx} = 1 \qquad \frac{dw}{dx} = 2x$$

જો $y = u.v.w$ હોય તો

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\ \frac{du}{dx}$$

$$= x.(x+2)(2x) + x.(x^2+2)(1) + (x+2)(x^2+2)(1)$$

$$= (x^2+2x)(2x) + x^3 + 2x + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

$$= 2x^3 + 4x^2 + x^3 + 2x + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

$$= 4x^3 + 6x^2 + 4x + 4$$

અથવા

ટૂંકી રીત $\quad y = x(x+2)(x^2+2)$

$$= (x^2+2x)(x^2+2)$$

$$= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 4$$

7.6.4 ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવવાના ઉદાહરણો

ઉદાહરણ-9 $\quad \frac{x^3-2}{x^2+7}$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ શોધો.

જવાબ :

ધારો કે $\quad y = \frac{x^3-2}{x^2+7}$

અને $\quad u = x^3 - 2 \qquad v = x^2 + 7$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 0 \qquad \frac{dv}{dx} = 2x + 0$

$= 3x^2 \qquad = 2x$

$\therefore y = \frac{u}{v}$ હોય ત્યારે $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$= \frac{(x^2+7)(3x^2) - (x^3-2)(2x)}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{3x^4+21x^2-2x^4+4x}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{x^4+21x^2-2x^4+4x}{(x^2+7)^2}$$

ઉદાહરણ-10 $\quad 1 + \frac{2}{3+\frac{4}{x}}$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ મેળવો.

જવાબ :

ધારો કે $\quad y = 1 + \frac{2}{3+\frac{4}{x}}$

$= 1 + \frac{\frac{2}{3x+4}}{x}$ છેદમાં લ.સા.અ. લેતા

$= 1 + \frac{2x}{3x+4}$

$= \frac{3x+4+2x}{3x+4}$ લ.સા.અ. લેતા

$y = \frac{5x+4}{3x+4}$

હવે $u = 5x + 4$ $v = 3x + 4$

$\frac{du}{dx} = 5 + 0$ $\frac{dv}{dx} = 3 + 0$

$= 5$ $= 3$

જો $y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+4)(5) - (5x+4)(3)}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{15x + 20 - 15x - 12}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{8}{(3x+4)^2}$$

ઉદાહરણ-11 $\frac{e^x}{logx}$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલનફળ શોધો.

જવાબ :

ધારો કે $y = \frac{e^x}{logx}$

અને $u = e^x$ $v = logx$

$\frac{du}{dx} = e^x$ $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$

$y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$= \frac{logx(e^x) - e^x\,(1/x)}{(logx)^2}$$

$$= \frac{e^x\left[logx - \frac{1}{x}\right]}{(logx)^2}$$

ઉદાહરણ-12 $y = \frac{1}{1+x}$ હોય તો $\frac{dy}{du}$ શોધો.

જવાબ : ધારો કે

$$y = \frac{1}{1+x}$$

અને $u = 1$ $v = 1 + x$

$\frac{du}{dx} = 0$ $\frac{dv}{dx} = 0 + 1 = 1$

$y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = v\frac{\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{du}}{v^2}$

$$= \frac{(1+x)(0)-(1)(1)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(1+x)^2}$$

7.6.5 સાંકળના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલનફળ મેળવવાના ઉદાહરણો

નોંધ : નીચેના પ્રકારના વિધેયો માટે સાંકળનો નિયમ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. (ધારો કે $f(x) = 2x^2 + 5$)

(1) $y = \{f(x)\}^n$ દા.ત. $y = (2x^2 + 5)^5$

(2) $y = log\{f(x)\}$ દા.ત. $y = log(2x^2 + 5)$

(3) $y = e^{\{f(x)\}}$ દા.ત. $y = e^{2x^2+5}$

(4) $y = a^{f(x)}$ દા.ત. $y = a^{2x^2+5}$

(5) $y = \sqrt{f(x)}$ દા.ત. $y = \sqrt{2x^2 + 5}$

$y = \{f(x)\}^n$

ઉદાહરણ-13

$y = (x^2 + 3x + 5)^7$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ શોધો.

જવાબ :

$$y = (x^2 + 3x + 5)^7$$

ધારો કે $u = x^2 + 3x + 5$ વિકલન કરતી વખતે($y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$નો ઉપયોગ કરો)

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2x + 3$$

અને $y = u^7$

$$\therefore \frac{dy}{du} = 7u^6$$

સાંકળનો નિયમ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$= 7u^6 . (2x + 3)$ સૂત્રમાં કિંમત મૂકતાં

$= 7(x^2 + 3x + 5)^6 (2x + 3)$ $\therefore u = x^2 + 3x + 5$ મૂકતાં

ઉદાહરણ-14

જો $y = log(4x^2 + 5x + 2)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$y = \log\,(4x^2 + 5x + 2)$

ધારો કે $u = 4x^2 + 5x + 2$ વિકલન કરતી વખતે ($y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ નો ઉપયોગ કરો)

$$\frac{du}{dx} = 8x + 5$$

અને $y = \log u$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

સાંકળનો નિયમ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$= \frac{1}{u} . (8x + 5)$ સૂત્રમાં કિંમત મૂકતાં

$\frac{dy}{dx} = \frac{8x+5}{4x^2+5x+2}$ $\therefore u = 4x^2 + 5x + 2$ મૂકતાં

ઉદાહરણ-15

$y = e^{x^2+x+3}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = ?$

જવાબ :

$y = e^{x^2+x+3}$

ધારો કે $u = x^2 + x + 3$

$\frac{du}{dx} = 2x + 1$ અહીં $x^n => nx^{n-1}$ નો ઉપયોગ કરો

અને $y = e^u$

$\frac{dy}{du} = e^u$ $\because e^x => e^x$

સાંકળનો નિયમ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$= e^u.(2x + 1)$ સૂત્રમાં કિંમત મૂકતાં

$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+x+3}.(2x + 1)$ $u = x^2 + x + 3$ મૂકતાં

ઉદાહરણ-16

જો $y = 5^{2x^2-x+2}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$y = 5^{2x^2-x+2}$

ધારો કે $u = 2x^2 - x + 2$

$\frac{du}{dx} = 4x - 1$ અહીં $x^n => nx^{n-1}$ નો ઉપયોગ કરો

અને $y = 5^u$

$\frac{dy}{du} = 5^u.log_e^5$ અહીં $a^x => a^x.log_e^a$ નો ઉપયોગ કરો

સાંકળનો નિયમ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$= 5^u.log_e^5.(4x - 1)$ સૂત્રમાં કિંમત મૂકતાં

$= 5^{2x^2-x+2}.log_e^5.(4x - 1)$ અહીં $u = 2x^2 - x + 2$ મૂકતાં

ઉદાહરણ-17

$y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$ નું x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ શોધો.

જવાબ :

$y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

ધારો કે $u = x^2 + 2x - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x + 2$ અહીં $x^n => nx^{n-1}$

અને $y = \sqrt{u}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ અહીં $\sqrt{x}$ નું વિકલન $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ યાદ રાખો અને તે ઉપરથી $\sqrt{u}$ નું વિકલન $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ થાય.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} . (2x + 2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x - 1}} . (2x + 2)$$ $\therefore u = x^2 + 2x - 1$ મૂકતાં

$$= \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$ અંશમાંથી '2'બહાર લઈ અંશ, છેદમાંથી દૂર કરો.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$

7.7 મિશ્ર ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય

વિકલનફળ મેળવો :

ઉદાહરણ-18

$x^4 - x^3 + x^2 - 5$

જવાબ : ધારો કે $y = x^4 - x^3 + x^2 - 5$

(સરવાળા-બાદબાકીના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^4}{dx} - \frac{dx^3}{dx} + \frac{dx^2}{dx} - \frac{d(5)}{dx}$$ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$નો ઉપયોગ કરો

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 2$$

ઉદાહરણ-19

$f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 8x + 10$ હોય તો $f^{I}(x)$અને$f(-2)$ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 8x + 10$

સરવાળા-બાદબાકીના નિયમનો ઉપયોગ કરતા

$$f^{I}(x) = 3\frac{dx^5}{dx} - 2\frac{dx^2}{dx} + 8\frac{dx}{dx} + \frac{d(10)}{dx}$$

$$= 3(5x^4) - 2(2x) + 8(1) + 0$$ $x^n => nx^{n-1}$

$f^{|}(x) = 15x^4 - 4x + 8$

$x = -2$ મૂકતાં

$f^{|}(x = -2) = 15(-2)^4 - 4(-2) + 8$

$= 15(16) + 8 + 8$

$= 240 + 8 + 8$

$= 256$

ઉદાહરણ-20

જો $f(x) = x^3 + logx + 3^x + e^x + 5$હોય તો$f^{|}(x)$ શોધો.

(7.4 માં આપેલ વિધેયના વિકલનફળના પ્રમાણિત રૂપોનો ઉપયોગ કરો)

જવાબ : $f(x) = x^3 + logx + 3^x + e^x + 5$

$f^{|}(x) = \frac{dx^3}{dx} + \frac{d\,logx}{dx} + \frac{d3^x}{dx} + \frac{de^x}{dx} + \frac{d(5)}{dx}$

$= 3x^2 + \frac{1}{x} + 3^x log_e 3 + e^x + 0$

$f^{|}(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 3^x log3 + e^x$

ઉદાહરણ-21

જો $y = \frac{5}{x^5} + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x} + 4$હોય તો$\frac{dy}{dx}$શોધો.

$y = \frac{5}{x^5} + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x} + 4$

$y = 5.x^{-5} + 4.x^{-4} + 3.x^{-3} + x^{-1} + 4$ ($x^n = nx^{n-1}$નો ઉપયોગ કરતા)

$\frac{dy}{dx} = 5\frac{d(x^{-5})}{dx} + 4\frac{d(x^{-4})}{dx} + 3.\frac{d(x^{-3})}{dx} + \frac{d(x^{-1})}{dx} + \frac{d(4)}{dx}$

$= 5.(-5x^{-6}) + 4(-4x^{-5}) + 3(-3x^{-4}) + (-x^{-2}) + 0$

$= -25x^{-6} - 16x^{-5} - 9x^{-4} - x^{-2}$

$= -\frac{25}{x^6} - \frac{16}{x^5} - \frac{9}{x^4} - \frac{1}{x^2}$

ઉદાહરણ-22

જો $y = logx.\sqrt{x}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$શોધો.

જવાબ : $y = logx.\sqrt{x}$

ધારો કે $u = logx$ અને $v = \sqrt{x}$

$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$અને $\quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = u.v$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= logx.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}.\frac{1}{x}$$

$= \frac{logx}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{\sqrt{x}}{x^1} = x.^{-1}\sqrt{x}$

$= x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left\{\frac{logx}{2} + 1\right\}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}}$ કોમન લેતાં

ઉદાહરણ-23

$y = \log(x^3.e^x)$હોય તો$\frac{dy}{dx}$શોધો.

જવાબ :

$y = \log(x^3.e^x)$

$y = \log x^3 + loge^x$

લઘુગુણકનો નિયમ$\therefore$ $MN = logM + logN$

$= 3\log x + xlog_e^e$ $\qquad \therefore logM^n = nlogM$

$= 3\log x + x(1)$ $\qquad \therefore log_e^e = 1$

$\frac{dy}{dx} = 3.\frac{1}{x} + 1$ $\qquad logx => \frac{1}{x}$

$= \frac{3}{x} + 1$ $\qquad$ લ.સા.અ. લેતા

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3+x}{x}$$

ઉદાહરણ-24

$y = \log(x^4.e^x.4^x)$

જવાબ :

$y = \log(x^4.e^x.4^x)$

$= \log x^4 + loge^x + log4^x$

$\because log\ MNP = logM + logN + logP$

$= 4logx + xlog_e^e + xlog4$ $\quad\quad \because logM^n = nlogM$

$= 4logx + x(1) + xlog4$ $\quad\quad \because log_e^e = 1$

$y = 4logx + x + xlog4$

$\frac{dy}{dx} = 4.\frac{1}{x} + 1 + (1).log4$

$= \frac{4}{x} + \frac{1}{1} + \frac{log4}{1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4+x+xlog4}{x}$ $\quad$ લ.સા.અ. લો

ઉદાહરણ-25

જો $y = \log\left(\frac{2x+5}{x-5}\right)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$y = \log\left(\frac{2x+5}{x-5}\right)$

$= \log(2x+5) - \log(x-5)$ $\quad\quad \because log\frac{M}{N} = logM - logN$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d(log\, u)}{dx} - \frac{d(log\, v)}{dx}$

$\frac{d(log\, u)}{dx} = \frac{d\, log\, u}{du}.\frac{du}{dx}$ $\quad\quad$ જ્યાં $u = 2x + 5$અને$\frac{dlogu}{du} = \frac{1}{u}$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{d(logu)}{dx} = \frac{1}{u}.2$

$\frac{d(logu)}{dx} = \frac{2}{2x+5}$

$\frac{d(logv)}{dx} = \frac{d(logv)}{dv}.\frac{dv}{dx}$ $\quad\quad$ જ્યાં $v = x - 5$અને $\frac{d(logv)}{dx} = \frac{1}{v}$

$\frac{dv}{dx} = 1$

$\frac{d(logv)}{dx} = \frac{1}{v}.(1)$

$$\frac{d(logv)}{dx}$$

$$=\frac{1}{x-5}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d(logu)}{dx}-\frac{d(logv)}{dx}$$

$$=\frac{2}{2x+5}-\frac{1}{x-5}$$

ઉદાહરણ-26

$y=\frac{3}{(x+1)(x+2)}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$$y=\frac{3}{(x+1)(x+2)}$$

$$y=\frac{3}{x^2+x+2x+2}$$

$$y=\frac{3}{x^2+3x+2}$$

ધારો કે $u=3 \qquad v=x^2+3x+2$

$$\frac{du}{dx}=0 \ \frac{dv}{dx}=2x+3$$

જો $y=\frac{u}{v}$ હોય તો(ભાગાકારનો નિયમ) $\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{x^2+3x+2)\ (0)-3(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$=\frac{-3(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(6x+9)}{(x^2+3x+2)^2}$$

ઉદાહરણ-27

xને સાપેક્ષ વિકલનફળ શોધો.

$$y=\left(x+\frac{2x+2}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$

જવાબ :

$$y = \left(\frac{x}{1} + \frac{2x+3}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$ લ.સા.અ. લેતાં

$$= \left(\frac{x(x+2)+2x+3}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+2x+2x+3}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+4x+3}{x+2}\right)\left(\frac{x+5}{x^2+4x+3}\right)$$

$$y = \frac{x+5}{x+2}$$

ધારો કે $u = x+5 \qquad v = x+2$

$$\frac{du}{dx} = 1 \text{ અને } \quad \frac{dv}{dx} = 1$$

$$y = \frac{u}{v} \text{ હોય તો } \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x+2)(1)-(x+5)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+2-x-5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{(x+2)^2}$$

ઉદાહરણ-28

$(x+2)(y+1) = 20$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ :

$$(x+2)(y+1) = 20$$

$$y+1 = \frac{20}{x+2}$$

$$y = \frac{20}{x+2} - 1$$

ધારો કે $u = 20 \qquad v = x+2$

$\frac{du}{dx} = 0 \quad \frac{dv}{dx} = 1$

$y = \frac{u}{v}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{du}}{v^2} - \frac{d(1)}{dx}$

$$= \frac{(x+2)0 - 20(1)}{(x+2)^2} - 0$$

$$= -\frac{20}{(x+2)^2}$$

સ્વાધ્યાય-2 (જાતે કરો)

નીચે આપેલ વિધેયનું વિકલનફળ મેળવો.

(1) $x^5 - 4x^4 + \frac{3x^2}{2} - x + 20$ જવાબ : $(5x^4 - 16x^3 + 3x - 1)$

(2) $\frac{3x^5}{3} - e^x + x^e - logx$ જવાબ : $(5x^4 - e^x + ex^{e-1} - \frac{1}{x})$

(3) $8^x + 3x^2 + \frac{1}{x}$ જવાબ :$(8^x.log^8 + 6x - \frac{1}{x^2})$

(4) $\sqrt{x} + Rx^2 + R$ જવાબ : $(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2Rx)$

(5) $9x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ જવાબ :$(27x^2 + 6x + 2)$

(6) $(3x^2 + 2x - 5)\ (2x + 1)$ જવાબ :$(18x^2 + 14x - 8)$

(7) $(x^2 + 1)\ (x + 1)$ જવાબ :$(3x^2 - 2x - 3)$

(8) $(x^2 + logx)\ (e^x + 1)$

જવાબ :$\left(x^2e^x + e^xlogx + 2xe^x + \frac{e^x}{x} + 2x + \frac{1}{x}\right)$

(9) $(2x + 3)\ (3x - 1)(5x + 2)$ જવાબ :$(90x^2 + 94\ \ x - 1)$

(10) $x^5.logx.e^x$ જવાબ :$(x^4e^x\{5logx + 1 + x.logx\})$

(11) $\frac{2x^2-3}{x^2+7}$ જવાબ :$\left(\frac{34x}{(x^2+7)^2}\right)$

(12) $\frac{e^x}{logx}$ જવાબ :$\left(\frac{e^x\left(logx-\frac{1}{2}\right)}{(logx)^2}\right)$

(13) $3 + \frac{2}{1+\frac{4}{x}}$ જવાબ :$\left(\frac{8}{(x+4)^2}\right)$

(14) $\left(x + \frac{5}{x+2}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+2x+5}\right)$ જવાબ :$\left(\frac{4}{(x+2)^2}\right)$

(15) $(3x+2)(y+2)=10$ જવાબ : $\left(\frac{-30}{(3x+2)^2}\right)$

(16) $y = log\left(\frac{x^5}{e^x}\right)$ જવાબ : $\left(\frac{5-x}{x}\right)$

(નોંધ : $log\frac{M}{N} = logM - logN logM^N = NlogM$નો ઉપયોગ કરો.)

(17) $xy - 4x + 9y = -7$ જવાબ : $\left[\frac{43}{(x+9)^2}\right]$

(18) $y = 3 - \frac{4}{x+3}$ જવાબ : $\left[\frac{4}{(x+3)^2}\right]$

(19) $\log(2x^2+5x+1)$ જવાબ : $\left[\frac{4x+5}{2x^2+5x+1}\right]$

(20) $\log\left[\frac{2x+1}{3x-1}\right]$ જવાબ : $\left[\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x-1}\right]$

(21) $\log[e^x.logx^3]$ જવાબ : $\left[3e^x\frac{1}{x} + logx)\right]$

($logMN = logM + logN$અને$logM^N = NlogM$નો ઉપયોગ કરો.)

(22) $5^x.x^5$ જવાબ : $[5^{x+1}.x^4 + x^5.5^x.log_e^5]$

(23) $(x^2+8x+5)^3$ જવાબ : $[6(x^2+8x+5)^2\,(x+4)]$

(24) e^{3x+2} જવાબ : $[3.e^{3x+2}]$

(25) e^{3x^2-5x-1} જવાબ : $\left[e^{3x^2-5x+1}(6x-5)\right]$

(26) $\frac{1}{1-x}$ જવાબ : $\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]$

(27) $\frac{1}{2x+3}$ જવાબ : $\left[-\frac{2}{(2x+3)^2}\right]$

(28) $\frac{x^5-1}{x-1}$ જવાબ : $\left[\frac{4x^5-5x^4+1}{(x-1)^2}\right]$

(29) $xy + 3x + 5y = 1$ જવાબ : $\left[-\frac{16}{(x+5)^2}\right]$

(30) $log(x^e.e^x)$ જવાબ : $\left[\frac{e}{x} + 1\right]$

7.8 દ્વિતીય વિકલનફળનો અર્થ સમજાવો

જો $y = f(x)$ એ ચલ x નું વાસ્તવિક વિધેય હોય અને તેનું x ને સાપેક્ષ વિકલનફળ શોધવામાં આવે તો તેને વિધેયનું પ્રથમ વિકલનફળ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને $\frac{dy}{dx}$ અથવા$f^{|}$અથવા $\frac{df(x)}{dx}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને જો મળેલ વિકલનનું ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલનફળ શોધવામાં આવે તો તેને તે વિધેયનું દ્વિતીય વિકલનફળ કહેવાય અને તેને $\frac{d^2y}{dx^2}$

અથવા $f^{||}(x)$ વડે દર્શાવી શકાય.

દા.ત. $y = x^4$ નું દ્વિતીય વિકલનફળ નીચે મુજબ શોધાય.

$y = x^4$

$\frac{dy}{dx} = 4x^3$ $\quad\quad => x^n => nx^{n-1}$

$\frac{d^2y}{dx} = 12x^2$ $\quad\quad => x^n => nx^{n-1}$

7.9 દ્વિતીય વિકલનફળ શોધવાના ઉદાહરણો :

વિકલનના નિયમો અને પ્રમાણિત રૂપોનો ઉપયોગ કરી દ્વિતીય વિકલનફળ નીચેના ઉદાહરણો મુજબ શોધી શકાય.

ઉદાહરણ-29

જો$y = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x - 3$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$y = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x - 3$

$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 24x^2 - 4x + 1$ $\quad\quad$ પ્રથમ વિકલન કરતા

$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 + 48\,x - 4$ $\quad\quad$ ફરીથી વિકલન કરતા

ઉદાહરણ-30

જો $y = xlogx^3$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$y = x.logx$

$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + logx(1)$ $\quad\quad$ ભાગાકારના નિયમ મુજબ

$\frac{dy}{dx} = 1 + logx$

$\frac{d^2y}{dx} = 0 + \frac{1}{x}$ $\quad\quad$ ફરીથી વિકલન કરતા

$= \frac{1}{x}$

ઉદાહરણ-31

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$$

$$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$$

બંને બાજુ વર્ગ કરતા

$$y=(1-\sqrt{x})^2$$

$y=1-2\sqrt{x}+x$ $\quad\quad$ $\therefore (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$\frac{dy}{dx}=0-2.\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$ $\quad\quad$ પ્રથમ વિકલન કરતા$\sqrt{x}\rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x}}+1$$

$$=-x^{-1/2}+1$$

$$\frac{dy}{du}=-x+1$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}+0$ $\quad\quad$ $=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2x^{3/2}}$$

ઉદાહરણ-32

જો $y=\frac{2x+1}{x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$$y=\frac{2x+1}{x}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ $\quad\quad$ $u=2x+1$ $\quad$ $v=x$

$=\frac{x(2)-(2x+1)(1)}{x^2}$ $\quad\quad$ $\frac{du}{dx}=2$ $\quad$ $\frac{dv}{dx}=1$

$$\frac{2x-2x-1}{x^2}$$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$ $\quad\quad$ ફરીથી વિકલન કરતા

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^2(0)-(-1)(2x)}{(x^2)^2}$ $\quad\quad$ $u=-1$ $\quad$ $v=x^2$

$=\frac{2x}{x^4}$ $\quad\quad$ $\frac{du}{dx}=0$ $\quad$ $\frac{dv}{dx}=2x$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^3}$$

ઉદાહરણ-33

જો $y = 3e^{2x} + 3e^{-2x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :

$y = 3e^{2x} + 3e^{-2x}$

$\frac{dy}{dx} = 3(2e^{2x}) + 3(-2e^{-2x})$ => $e^{2x} = 2e^{2x}$ સાંકળનો નિયમ મુજબ

$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} - 6e^{-2x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2e^{2x}) - 6(-2e^{-2x})$ ફરીથી વિકલન કરતા

$= 12e^{2x} + 12e^{-2x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(e^{2x} + e^{-2x})$

7.10 સંકેતો

સંકેતો	આ રીતે વંચાય
lim	લીમીટ
$\therefore$	માટે (તેથી)
?	કારણ કે
$f^{I}(x)$	એફ ડેશ ઍક્સ
$f^{II}(x)$	એફ ડબલ ડેશ ઍક્સ

સ્વાધ્યાય-૩ (જાતે કરો)

(1) $y = 4x^3 + 8x^2 + 9x + 25$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $(24x + 16)$

(2) $y = 3e^{2x} + logx + 3x^3$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $\left(12e^{2x} - \frac{1}{x^2} + 18x\right)$

(3) $y = 9x^4 + 12x^3 + 7x^2 + x - 5$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $(108x^2 + 72x + 14)$

(4) $f(x) = x^2e^x$ હોય તો $f^{II}(x)$ શોધો.

જવાબ : $e^x[x^2 + 4x + 2]$

(5) જો $y = \frac{logx}{x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ : $\left(\frac{2logx-3}{x^3}\right)$

(6) જો $y = 5e^{3x} + 5e^{-3x}$હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :$45(e^{3x} + e^{-3x})$

(7) $y = (x^2 - 2)^2$હોય તો તેનું દ્વિતીય વિકલનફળ શોધો.

જવાબ : $(12x^2 - 8)$

(8) $y = e^{5x} + e^{-5x}$હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2} = 25y$ થાય એમ સાબિત કરો.

(9) $y = \frac{1}{x}$હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

જવાબ :$\frac{2}{x^3}$

(10) જો $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5x + 11$હોય તો xની કઈ કિંમતે $f^{||}(x) = 38$ થાય.

જવાબ :$x = 2$

7.11 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) વિધેયના x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનને ______ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(a) $f^{|}(x)$ (b) $f(x)$

(c) $f^{||}(x)$ (d) એકપણ નહીં

(ii) જો$y = x^n$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ ______

(a) xn^x (b) nx^{n-1}

(c) nx^n (d) એકપણ નહીં

(iii) જો$f(x) = e^x$ હોય તો $f^{|}(x) =$ ______

(a) x^e (b) e^x

(c)1 (d) એકપણ નહીં

(iv) જો$y = logx$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ ______

(a) $logx$ (b) x

(c) $\frac{1}{x}$ (d) એકપણ નહીં

(v) જો$y = a^x$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ ______

(a) a^x (b) log_e^a

(c)$a_e^x loga$ (d) એકપણ નહીં

(vi) જો $f(x) = k$ હોય તો $f^{|}(x) =$ _____

(a) k (b) 0

(c) x (d) એકપણ નહીં

(vii) બે વિધેયોના સરવાળાનું વિકલનફળ તે બે વિધેયોના ________ ના સરવાળા જેટલું જ થાય છે.

(a) લક્ષ (b) વિકલનફળો

(c) વિચલનો (d) એકપણ નહીં

(viii) બે વિધેયોના તફાવતનું વિકલનફળ તે બે વિધેયોના ________ ના તફાવત જેટલું જ થાય છે.

(a) લક્ષ (b) વિકલનફળો

(c) વિચરણ (d) એકપણ નહીં

(ix) જો $y = u \pm v$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm$ _____

(a) $\frac{dy}{dx}$ (b) $\frac{dv}{dx}$

(c) $\frac{du}{dx}$ (d) એકપણ નહીં

(x) જો y એ u નું વિધેય હોય અને u એ x નું વિધેય હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$ (b) $\frac{du}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

(c) $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (d) એકપણ નહીં

(xi) જો $y = 5x^2$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) $5x$ (b) $10x^2$

(c) $10x$ (d) એકપણ નહીં

(xii) જો $f(x) = x^2$ હોય તો $f^{|}(-2) =$ _____

(a) $2x$ (b) -2

(c) -4 (d) એકપણ નહીં

(xiii) જો $y = \frac{1}{x}$ હોય તો $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) $logx$ (b) $-\frac{1}{x^2}$

(c) $\sqrt{x}$ (d) એકપણ નહીં

(xiv) જો $f(x) = \sqrt{x}$ હોય તો $f^{|}(x) =$ _____

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (d) એકપણ નહીં

(xv) જો $y = \frac{1}{x}$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ = _____

(a) $-\frac{1}{x^2}$ (b) $-\frac{1}{x^3}$

(c) $\frac{2}{x^3}$ (d) એકપણ નહીં

(xvi) જો $y = 5x^3$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ = _____

(a) $30x$ (b) $15x^2$

(c) $15x$ (d) એકપણ નહીં

(xvii) જો $f(x) = 0$ હોય તો $f^{|}(x)$ = _____

(a) 0 (b) 1

(c) x (d) એકપણ નહીં

(12) વિકલનનો સરવાળાનો નિયમ લખો.

(13) વિકલનનો બાદબાકીનો નિયમ લખો.

(14) વિકલનનો ભાગાકારનો નિયમ લખો.

(15) વિકલનનો ગુણાકારનો નિયમ લખો.

(16) વિકલનનો સાંકળનો નિયમ જણાવો.

(17) વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.

(18) દ્વિતીય વિકલનફળ એટલે શું ?

(19) x ને સાપેક્ષ પ્રથમ વિકલનફળ શેના વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(20) x ને સાપેક્ષ દ્વિતીય વિકલનફળ શેના વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

જવાબ :11

(i) a	(ii) b	(iii) b	(iv) c	(v) c	(vi) b
(vii) b	(viii) b	(ix) b	(x) c	(xi) c	(xii) c
(xiii) b	(xiv) c	(xv) c	(xvi) a	(xvii) a	

7.12 ચાવીરૂપ શબ્દો અને સમજૂતી

પ્રથમ વિકલન ફળ :

વિધેય $f(x)$ આપેલું હોય તો તેના વિકલનને વિકલન ફળ $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f^{|}(x)$ વડે ઓળખવામાં આવે છે. તેને પ્રથમ વિકલન ફળ તરીકે પણ ઓળખી શકાય.

દ્વિતીય વિકલન ફળ :

પ્રથમ વિકલન ફળ $f^{|}(x)$નું ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલન કરવામાં આવે તો તેને દ્વિતીય વિકલન ફળ કહેવાય અને તેને $f^{||}(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ વડે દર્શાવાય.

7.13 સંદર્ભ વાચન

(1) Business Mathematics by Kapoor V.K. S chand & son, New Delhi

(2) Business Mathematics by Trivedi & Trivedi - Keron India Ltd., New Delhi