એકમ 1

ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ (પ્રમેય)

Permutation and Combination and Binomial Expanssion (Theorem)

1.0 ઉદ્દેશ :

ક્રમચય અને સંચય પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓને ક્રમચય-સંચય અંગેની જાણકારી પૂરી પાડવી અને તે અંગેની વ્યહારિક તેમજ ગાણિતિક સૂઝ પેદા કરવાનો છે.

1.1 પ્રાસ્તાવિક :

સામાન્ય રીત ક્રમચય - સંચય એ બંને શબ્દો વધુ પ્રચલિત નથી તે બંને શબ્દો જુદા-જુદા છે. તેમાં ક્રમચયનો અર્થ ગોઠવણી અને સંચયનો અર્થ પસંદગી કરવામાં આવે છે. તેને અંગ્રેજીમાં Permutations અને Combination તરીકે બોલવામાં આવે છે. સંભાવનાના અભ્યાસમાં ક્રમચય સંચય ખૂબ મહત્ત્વનો ભાગ ભજવે છે.

1.2 ક્રમચય :

1.2.1 ક્રમચયનો અર્થ :

ઉપર જોયા મુજબ "ક્રમચય એટલે ગોઠવણી". ક્રમચયની સમજૂતી નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી સમજીશું.

ધારો કે, બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં ત્રણ પ્રોફેસરો છે તે પૈકી એક પ્રોફેસરને કુલપતિ અને બીજા એક પ્રોફેસરને ઉપ-કુલપતિ તરીકે નીમવા હોય તો આ ગોઠવણી કેટલી રીતે થઈ શકે ? ધારો કે ત્રણ પ્રોફેસરોને A, B અને C વડે દર્શાવીએ તો તેઓની ગોઠવણી નીચે પ્રમાણે થઈ શકે.

(1) A ને કુલપતિ અને B ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(2) A ને કુલપતિ અને C ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(3) B ને કુલપતિ અને A ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(4) B ને કુલપતિ અને C ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(5) C ને કુલપતિ અને A ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

(6) C ને કુલપતિ અને B ને ઉપકુલપતિ તરીકે નિમીશું.

આમ, 3 પ્રોફેસરોમાંથી 2 પ્રોફેસરોની ગોઠવણી 6 રીતે કરી શકાય. બીજી રીતે જોતાં કુલપતિની પસંદગી A, B અને C પૈકી ગમે તે એક એમ કુલ ત્રણ રીતે કરી શકાય. આ દરેક રીત સાથે ઊપ-કુલપતિની પસંદગી બાકીના બે પ્રોફેસરો પૈકી ગમે તે એક એમ કુલ બે પ્રકારે કરી શકાય. તેથી કુલપતિ અને ઊપ-કુલપતિની નિમણૂંકની કુલ રીતો $= 3 \times 2 = 6$.

તેવી જ રીતે એક વ્યક્તિને ઘરેથી નોકરી ઉપર જવા માટે ચાર જુદા જુદા રસ્તાઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4 છે. તે કોઈપણ એક રસ્તે નોકરી ઉપર જશે અને તે સિવાયના બીજા કોઈ પણ રસ્તે પાછો ફરશે. તો તેના ઘરેથી નોકરી ઉપર જઈ પાછા ફરવાની જુદી જુદી કેટલી રીતો થતી હશે ?

અહીં ચાર જુદા જુદા રસ્તાઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4 છે. જો તે વ્યક્તિ P_1 રસ્તે ઘરેથી નોકરી ઉપર જશે તો બાકીના ત્રણ રસ્તા P_2, P_3, P_4 રસ્તે પાછો ફરશે. તે P_2 રસ્તે ઘરેથી નોકરી પર જશે તો P_1, P_3, P_4 એમ કુલ ત્રણ

રસ્તે પાછો ફરી શકશે. તેવી જ રીતે જો તે P_3 રસ્તે જશે તો પણ બાકીના ત્રણ રસ્તે પાછો ફરશે અને P_4 રસ્તે જશે તો પણ બાકીના ત્રણ રસ્તે પાછો ફરશે. આમ ઘરેથી નોકરી ઉપર જવાના કુલ ચાર રસ્તા અને પરત ફરવાના કુલ ત્રણ રસ્તા. ફરવાની કુલ ક્રિયાના કુલ પ્રકારો = $4 \times 3 = 12$.

આમ ઘરેથી નોકરી ઉપર જવાના અને પરત ફરવાની ક્રિયા નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

$$\begin{array}{llll} P_1P_2 & P_2P_1 & P_3P_1 & P_4P_1 \\ P_1P_3 & P_2P_3 & P_3P_2 & P_4P_2 \\ P_1P_4 & P_2P_4 & P_3P_4 & P_4P_3 \end{array}$$

આ ગોઠવણીમાં પહેલો અક્ષર ઘરેથી નોકરી જવાનો અને બીજો અક્ષર પરત ફરવાની ક્રિયાનો છે. ઉપરના ઉદાહરણને આધારે નીચે પ્રમાણોનો સિદ્ધાંત તારવી શકાય.

"ધારો કે કોઈ એક ક્રિયા m રીતે થઈ શકે તેમ હોય અને તેમાંથી પ્રત્યેક માટે બીજી ક્રિયા n રીતે થતી હોય તો એક પછી એક એમ બંને ક્રિયાઓ સાથે થવાની કુલ રીતો = $m \times n$ થાય."

ઉપરના સિદ્ધાંત ઉપરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે ક્રમચય એ ગોઠવણી છે. એટલે કે ક્રમવાર રચના છે. તેને વિન્યાસ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

1.2.2 ક્રમચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર :

"ધારો કે n જુદી જુદી વસ્તુઓ આપેલી હોય અને તેમાંથી r વસ્તુઓ ક્રમમાં ગોઠવવાની હોય તો ગોઠવણીની કુલ રીતોને ક્રમચય અથવા રૈખિક ક્રમચય કહે છે." તેને સંકેતમાં np_r વડે દર્શાવવામાં આવે છે તે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

જ્યાં $n ! = 1$ થી n સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (ક્રમ ગુણિત n)

જેને અંગ્રેજીમાં (n factorial) કહેવાય.

$\therefore\ n ! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots \times (n-1) \times n$

$\therefore\ n ! = n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots \times 2 \times 1.$

$(n - \mathrm{r})\,! = (n - \mathrm{r})\ (n - \mathrm{r} - 1)\ \ldots\ldots\ldots \times 2 \times 1.$

હવે, ધારો કે $n = 5$ અને $r = 2$ હોય, તો

$n\,! = 5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$(\mathrm{n} - \mathrm{r})! = (5 - 2)! = 3! = 3 \times 2 \times 1$

$\therefore\ 5P_2 = \frac{5\,!}{(5-2)\,!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20$ થાય.

કેટલાંક પરિણામો

(1) $nP_n = \mathrm{n}\,!$

(2) $0\,! = 1$

(3) $nP_0 = 1$

ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 : કિંમત શોધો.

(1) $8P_6$ (2) $7P_2$ (3) $19P_4$

(4) $5P_5$ (5) $9P_0$

જવાબ :

(1) $8P_6 = nP_r$ $\quad \therefore$ $n = 8$ અને $r = 6$ થાય.

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20,160$$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$8P_6$ શોધવું છે.

એટલે કે

nP_r આપેલું હોય તો n થી શરૂ કરી r વખત ગુણાકાર કરો.

એટલે કે 8 થી શરૂ કરી 6 વખત ગુણાકાર કરો.

$\therefore 8P_6 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$= 20,160$ (છ વખત ઉલટેથી ગુણાકાર કરો.)

(2) $7P_2 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$7P_2 = 7 \times 6 = 42$

(3) $19P_4 = \frac{19!}{(19-4)!} = \frac{19!}{15!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!}$

$= 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 93,024$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$19P_4 = 19 \times 18 \times 17 \times 16$ (ચાર વખત)

$= 93,024$

(4) $5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!}{1} = 120$

અથવા (સીધી ગણતરી) બીજી રીત

$5P_5 = 5!$ $\quad\quad \therefore (nP_n = n!)$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 120$

(5) $9P_0 = \dfrac{9!}{(9-0)!} = \dfrac{9!}{9!} = 1$

ઉદાહરણ-2 : નીચે આપેલા સમીકરણોમાંથી n ની કિંમત શોધો.

(1) $nP_2 = 42$

(2) $nP_3 = 120$

જવાબ :

(1) $nP_2 = 42$

$\dfrac{n!}{(n-2)!} = 42$ $\quad\quad \therefore \; nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

$\therefore \; \dfrac{n(n-1)\,(n-2)!}{(n-2)!} = 42$

$\therefore \; n(n-1) = 42$

$\therefore \; n(n-1) = 7 \times 6$

$\therefore \; 7(7-1) = 7 \times 6$

$\therefore \; n = 7$

	2	42
6	3	21
7	7	7
	1	1

($\because$ અવયવ પાડતાં)

અથવા બીજી રીત

${}_nP_2 = 42$

$n(n-1) = 42$

$\therefore \; n^2 - n = 42$

$\therefore \; n^2 - n = 42 = 0$

$\therefore \; n^2 - 7n + 6n - 42 = 0$

$\therefore \; n(n-7) + 6(n-7) = 0$

$\therefore \; (n-7) = 0$ અથવા $(n+6) = 0$

$\therefore \; n = 7$ અથવા $n = -6$ $\quad\quad$ (ઋણ અશક્ય)

$\therefore \; n = 7$

(2) $nP_3 = 120$

$\dfrac{n!}{(n-3)!} = 120$

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,!}{(n-3)\,!} = 120$$

$\therefore\ n(n-1)\ (n-2) = 120$

$\therefore\ n(n-1)\ (n-2) = 6 \times 5 \times 4$

$\therefore\ 6(6-1)\ (6-2) = 6 \times 5 \times 4$

$\therefore\ n = 6$

$$
\begin{array}{l}
4\left\{\begin{array}{c|l} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \end{array}\right. \\
\hline
6\left\{\begin{array}{c|l} 2 & 30 \\ \hline 2 & 15 \end{array}\right. \\
\hline
5\left\{\begin{array}{c|l} 5 & 5 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right.
\end{array}
$$

$\therefore\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$2 \times 2 = 4,\ 5, \qquad 2 \times 3 = 6$

$\therefore\ 6 \times 5 \times 4 = 120$

ઉદાહરણ-3 : $56n\,! = 8\,!$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$56 \times n\,! = 8\,!$

$\therefore\ 56 \times n\,! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$\therefore\ n\,! = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{56}$$

$$\therefore\ n\,! = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7}$$

$\therefore\ n\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\therefore\ n\,! = 6\,!$

$\therefore\ n = 6$

ઉદાહરણ-4 : નીચેના સમીકરણ ઉપરથી n ની કિંમત શોધો.

$\therefore\ (n+1)P_3 = 11\ .\ nP_2$

જવાબ :

$(n+1)P_3 = 11 \times nP_2$

$\therefore\ (n+1) = 11 \times n$

$\therefore\ (n+1) = 11$

$\therefore\ n = 11 - 1$

$\therefore\ n = 10$

ઉદાહરણ-5 : જો $\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$

$\therefore\ \frac{1}{9!}+\frac{1}{10\times 9!}=\frac{n}{11\times 10\times 9!}$ $\quad$ ($\therefore \frac{1}{9!}$ કોમન લેતાં)

$\therefore\ \frac{1}{9!}\left[1+\frac{1}{10}\right]=\frac{1}{9!}\left[\frac{n}{11\times 10}\right]$ $\quad$ ($\therefore \frac{1}{9!}$ દૂરકરી લ.સા.અ. લેતા)

$\therefore\ \frac{10+1}{10}=\frac{n}{11\times 10}$

$\therefore\ \frac{11}{10}\times\frac{11\times 10}{1}=n$

$\therefore\ n = 121$

ઉદાહરણ-6 : 3, 4, 6, 7, 9, 10 એમ કુલ છ આંકડામાંથી કોઈપણ પાંચ જુદા જુદા આંકડા પસંદ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ :

$n = 6$ $\quad\therefore$ કુલ છ આંકડા છે 3, 4, 6, 7, 9, 10

$r = 5$ $\quad\therefore$ પાંચ આંકડાની સંખ્યા બનાવવાની છે.

$\therefore$ ગોઠવણીના પ્રકારો = nP_r

$= 6P_5 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

ઉદાહરણ-7 : 80432 સંખ્યાના બધા જ અંકોનો ઉપયોગ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં પાંચ આંકડાની સંખ્યા બનાવવાની છે. તેથી દરેક સંખ્યાને પ્રથમ સ્થાને મુકીએ તો 8, 4, 3, 2 મુકીને પાંચ અંકની સંખ્યા બનાવી શકાય. પરંતુ 0 ને પ્રથમ સ્થાને મુકવાથી ચાર અંકની સંખ્યા જ મળશે. તેથી 0 સિવાયના ચાર અંકોને પ્રથમ સ્થાને ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 4

પ્રથમ સ્થાનની પસંદગી થયા બાદ બીજા સ્થાને બાકીના ચાર અંકો (શૂન્ય સહિત) ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 4

પ્રથમ અને બીજા સ્થાનની પસંદગી થયા બાદ ત્રીજા સ્થાને બાકીના ત્રણ અંકો ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકાર = 3

તેવી જ રીતે,

ચોથા સ્થાને બાકીના બે અંકોની ગોઠવણીના પ્રકાર = 2

પાંચમા સ્થાને બાકીના એક અંકની ગોઠવણીના પ્રકાર = 1

$\therefore$ પાંચ આંકડાની કુલ સંખ્યા = $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ સંખ્યાઓ બને.

ઉદાહરણ-8 : ''POEM'' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

આપેલ શબ્દમાં કુલ ચાર અક્ષરો છે. બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બનતા કુલ શબ્દોની સંખ્યા

$= {}_4P_4 = 4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અહીં એક શબ્દ POEM આપેલો છે. જે બાદ કરતાં બનાવી શકાતા નવા શબ્દોની સંખ્યા = $24 - 1 = 23$

ઉદાહરણ-9 : 'VOLUME' શબ્દનો ઉપયોગ કરી વ્યંજનો એકી સ્થાને જ આવે તે શરતે કુલ કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં VOLUME શબ્દમાં કુલ 6 અક્ષરો આવેલા છે. તેમાંથી કુલ 3 વ્યંજનો (V, L, M) આવેલા છે.

$\therefore$ વ્યંજનોની ગોઠવણી = $3P_3 = 3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

અને બાકીના ત્રણ શબ્દો બેકી સ્થાને ગોઠવતાં ગોઠવણીના પ્રકારો = $3P_3 = 3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\therefore$ કુલ શબ્દોની સંખ્યા = $6 \times 6 = 36$

ઉદાહરણ-10 : 'LOGARITHM'ની મદદથી બધા અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને નવ અક્ષરના કુલ કેટલાં નવા શબ્દો બનાવી શકાય ? તેમાંથી L પ્રથમ સ્થાને અને M છેલ્લે સ્થાને આવે તેવા કુલ કેટલાં નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

LOGARITHM શબ્દમાં કુલ 9 અક્ષરો છે. તેનો ઉપયોગ કરી 9 અક્ષરના શબ્દોની કુલ ગોઠવણી

$= 9P_9 = 9\,! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$

અહીં એક શબ્દ આપેલો છે તે બાદ કરતાં નવ અક્ષરના કુલ નવા શબ્દો = $362880 - 1 = 362879$

L પ્રથમ સ્થાને અને M છેલ્લે સ્થાને રાખવામાં આવે તો પ્રથમ સ્થાન $1P_1 = 1! = 1$ રીતે અને છેલ્લું સ્થાન $1P_1 = 1! = 1$ રીતે અને બાકીના 7 સ્થાન $7P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર = $1 \times 1 \times 5040 = 5040$

એક શબ્દ આપેલો છે તે બાદ કરતાં,

નવા શબ્દોની કુલ સંખ્યા = $5040 - 1 = 5039$

ઉદાહરણ-11 : 'ENGLISH' શબ્દનો ઉપયોગ કરી E પ્રથમ સ્થાને આવે તે રીતે કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

'ENGLISH' શબ્દમાં કુલ 7 અક્ષરો આવેલા છે. તેમાંથી E પ્રથમ સ્થાને મુકવામાં આવે તો તેને $1P_1 = 1$ રીતે ગોઠવાય અને બાકીના 6 અક્ષરોને $6P_6 = 6!\ 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ રીતે ગોઠવાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર = $1 \times 720 = 720$

એક શબ્દ આપેલો છે જે બાદ કરતાં E પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા

કુલ નવા શબ્દોની સંખ્યા $= 720 - 1 = 719$

ઉદાહરણ-12 : પુસ્તક ગોઠવતી એક અભરાઈ ઉપર સમાજશાસ્ત્રના 5, અર્થશાસ્ત્રના 4 અને મનોવિજ્ઞાનના 2 પુસ્તકો એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી દરેક વિષયના પુસ્તકો એક સાથે આવે, તો ગોઠવણી કુલ કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ :

સમાજશાસ્ત્રના 5 પુસ્તકોને $5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

અર્થશાસ્ત્રના 4 પુસ્તકોને $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અને મનોવિજ્ઞાનના 2 પુસ્તકોને $2P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$

ઉપરાંત ત્રણે વિષયોને સાથે $3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ પ્રકારે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો (ક્રમચયો) $= 120 \times 24 \times 2 \times 6 = 34560$

ઉદાહરણ-13 : એક સ્પર્ધામાં ચાર સ્ત્રીઓ અને ચાર પુરૂષો એક હારમાં એવી રીતે ગોઠવવા છે કે જેથી કોઈપણ બે પુરૂષો કે બે સ્ત્રીઓ એક સાથે ન આવે તો ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, સ્ત્રીને પ્રથમ સ્થાને રાખીએ તો ગોઠવણી નીચે મુજબ થશે.

સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ.

$\therefore$ ચાર સ્ત્રીઓને પ્રથમ, ત્રીજા, પાંચમા અને સાતમા સ્થાને ગોઠવીએ તો ગોઠવણીના ક્રમચયો

$= 4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

અને

ચાર પુરૂષોને બીજા, ચોથા, છઠ્ઠા અને આઠમા સ્થાને ગોઠવીએ તો ગોઠવણીના ક્રમચયો

$= 4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$\therefore$ સ્ત્રી પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા ગોઠવણીના પ્રકાર $= 24 \times 24 = 576$

હવે તેવી જ રીતે,

પુરૂષને પ્રથમ સ્થાને રાખીએ તો ગોઠવણીની મુજબ થઈ શકે.

પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી, પુ., સ્ત્રી

$\therefore$ ચાર પુરૂષોને $4P_4 = 4! = 24$ અને

ચાર સ્ત્રીઓને $4P_4 = 4! = 24$

$\therefore$ પુરૂષ પ્રથમ સ્થાને આવે તેવા ગોઠવણીના પ્રકાર $= 24 \times 24 = 576$

કોઈપણ બે સ્ત્રી કે બે પુરૂષો એક સાથે ન આવે તેવી ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો

$= 576 + 576$

$= 1152$

ઉદાહરણ-14 : એક ગૃપ ફોટા માટે હારબંધ ગોઠવેલી ખુરશીઓમાં 1 કેપ્ટન, 4 બોલર, 4 બેસ્ટમેન અને 2 અમ્પાયર મળી કુલ અગિયાર વ્યક્તિને ગોઠવવાના છે. કેપ્ટનને વચ્ચેની ખુરશી પર બેસાડવાના છે, બોલરોને પ્રત્યેક

છેડાની બબ્બે ખુરશીઓમાં બેસાડવાના છે અને કોઈપણ અમ્પાયરની ખુરશી બોલરની બાજુમાં ન આવે તે રીતે ગોઠવણ કરવી હોય તો તે ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

જવાબ :

B	B	X			C			X	B	B
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

વચ્ચેની ખુરશીમાં 1 કેપ્ટનને $1! = 1$ રીતે ગોઠવી શકાય.

4 બોલારોને બંને છેડા ઉપર $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ રીતે બેસાડાય.

ખુરશી 3 અને 9માં અમ્પાયર બેસી ન શકે એટલે કે બાકીની 4, 5, 7, 8 નંબરની 4 ખુરશીમાં 2 અમ્પાયર $4P_2 = 4 \times 3 = 12$ રીતે બેસી શકશે અને બાકી રહેલ 4 ખુરશીમાં 4 બેટ્સમેનો $4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ રીતે બેસી શકશે.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો (ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો)

$= 1 \times 24 \times 12 \times 24$

$= 6912$

1.3 સમરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચયોનો અર્થ અને ઉદાહરણો :

અર્થ :

ધારો કે, કુલ ક્રમચયો $= x$ છે. આમાંના કોઈ એક ક્રમચયમાં પ્રથમ પ્રકારની p સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ તેમના p સ્થાનોમાં ફેરબદલી કરીને $p\,!$ રીતે ગોઠવી શકાય. તે જ પ્રમાણે કોઈ બીજા ક્રમચયમાં બીજા પ્રકારની q સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ તેમના q સ્થાનોમાં ફેરબદલી કરીને q! રીતે ગોઠવી શકાય તો તે વસ્તુઓના કુલ ક્રમચયો $= x\,p!\,q!$ થાય પરંતુ n વસ્તુઓ જો જુદા જુદા સ્વરૂપે હોય તો તેમના કુલ ક્રમચયો $= n$ i થાય.

એટલે કે, $x\,p!\,q! - n!$ થાય.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો $x = \dfrac{n\,!}{p\,!\,q!}$

ઉદાહરણ-15 : 'ALLAHABAD' શબ્દના બધા અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં કુલ 9 અક્ષરો છે. જેમાંથી 'A' 4 વખત આવે છે અને 'L' 2 વખત આવે છે.

$\therefore n = 9 \quad p = 4, q = 2$

કુલ ક્રમચયો (શબ્દો) $x = \dfrac{n\,!}{p!\,q!} = \dfrac{9\,!}{4!\,2!}$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 9 \times 8 \times 7 \times 3 \times 5$$

$x = 7560$

ઉદાહરણ-16 : 'LITERATURE' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

અહીં કુલ 10 અક્ષરો છે. જેમાંથી 'T' 2 વખત, 'E' 2 વખત અને 'R' 2 વખત છે.

$\therefore\ n = 10,\ \ p = 2,\ \ q = 2,\ \ r = 2$

કુલ ક્રમચયો (શબ્દો) $x = \dfrac{n!}{p!\, q!\, r!}$ (ઉદા. 15 અને 16ના સૂત્રો ચેક કરીને સમજો)

$$= \frac{10!}{2!\ 2!\ 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1\ .\ 2 \times 1\ .\ 2 \times 1} = 4{,}53{,}600$$

$\therefore$ કુલ નવા શબ્દો $= 4{,}53{,}600 - 1 = 4{,}53{,}599$

ઉદાહરણ-17 : 'BOOK' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય.

જવાબ :

અહીં કુલ ચાર શબ્દો છે. જેમાં 'O' 2 વખત છે.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો $= \dfrac{4}{2!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$

કુલ નવા ક્રમચયો $= 12 - 1 = 11$

1.4 પુનરાવર્તિત ક્રમચય અને ઉદાહરણો :

અર્થ :

ધારો કે n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓના ક્રમચયો (ગોઠવણી) એવી રીતે કરવાના હોય કે જેથી કોઈપણ વસ્તુ ગમે તેટલી વખત આવી શકે તો કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા $= n^r$ થાય. દા.ત. કોઈપણ અંક ગમે તેટલી વખત આવે તે શરતે પાંચ આંકડાઓમાંથી ત્રણ આંકડાની કુલ સંખ્યા (ક્રમચયો) $= 5^3$ થાય.

ઉદાહરણ-18 : કોઈપણ એક વખત પહેરેલી બીજી વખત પહેરી શકાય તે શરતે 4 આંગળીઓમાં બે વીંટીઓ કેટલી વખત પહેરી શકાય ?

જવાબ : $n = 4$ અને $r = 2$

ચાર આંગળીમાં બે વીંટીઓના પુનરાવર્તનયુક્ત ક્રમચયો $= n^r = 4^2 = 16$

ઉદાહરણ-19 : કોઈપણ આંકડો ગમે તેટલી વખત આવે એ શરતે 1, 2, 3, 4, 5, 6 માંથી ત્રણ આંકડાની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

જવાબ : $n = 6 \quad r = 3$

$\therefore$ પુનરાવર્તનયુક્ત ક્રમચયો $= n^r = 6^3 = 216$

1.5 સ્વાધ્યાય :

1.5.1 પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) ક્રમચયનો અર્થ સમજાવો.

(2) ક્રમચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર લખો.

(3) સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચય એટલે શું ?

(4) પુનરાવર્તિત ક્રમચય એટલે શું ?

(5) કિંમત શોધો.

(1) $8P_3$ (2) $8P_8$ (3) 5! (4) $10P_0$ (5) $6P_5 \times 6P_0$

જવાબ :

(1) 336 (2) 40320 (3) 120 (4) 1 (5) 720

(6) નીચે આપેલા સમીકરણોમાંથી 'n' ની કિંમત શોધો.

(1) $nP_2 = 72$ (2) $nP_3 = 504$

(3) $72 \, . \, n! = 9!$ (4) $12 \, . \, nP_3 = 5 \, . \, (n+2)P_3$

(5) $nP_3 : (n+1)P_3 = 3 : 4$

જવાબ : (1) 9, (2) 9, (3) 7, (4) 7, (5) 11

(7) 4, 5, 6, 7, 8, 9 એક કુલ છ આંકડામાંથી ચાર જુદા જુદા આંકડા પસંદ કરી ચાર આંકડાની કુલ કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : 360

(8) 0 1 2 3 4 સંખ્યાના બધા જ અંકોનો ઉપયોગ કરી પાંચ આંકડાની કુલ કેટલી નવી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : 97

(9) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 અંકોમાંથી ત્રણ અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

જવાબ : $6P_1 \times 6P_2 = 180$

(10) 'MONDAY' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? તેમાંથી (i) M પ્રથમ સ્થાને હોય તેવા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? (ii) M પ્રથમ સ્થાને અને Y છેલ્લા સ્થાને હોય તેવા કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : 720, (i) 120, (ii) 23

(11) 'GASOLINE' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી આઠ અક્ષરવાળા કુલ કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય કે જેથી વ્યંજન એકી સ્થાને અને સ્વર બેકી સ્થાને આવે ?

જવાબ : 575

(12) એક અભરાઈ ઉપર અંગ્રેજીના 5, ગુજરાતીના 3, અર્થશાસ્ત્રના 4 પુસ્તકો એવી રીતે ગોઠવવાના છે કે જેથી દરેક વિષયના પુસ્તકો સાથે જ આવે તો પુસ્તકો કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

જવાબ : 1,03,680

(13) વીસ વિદ્યાર્થીઓમાં બે વિદ્યાર્થીઓને ઇનામ આપવાના છે. (i) જો બન્ને ઇનામ એક વ્યક્તિને ન આપી શકાય. (ii) બંને ઇનામ એક વ્યક્તિને આપી શકાય એમ હોય તો તે ઇનામ કેટલી રીતે વહેંચી શકાય ?

જવાબ : (i) $20P_2 = 380$ (ii) $20^2 = 400$

(14) એક અભરાઈ ઉપર છ પુસ્તકો કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી બે નિશ્ચિત પુસ્તકો (i) એક સાથે જ આવે (ii) એક સાથે ન આવે ?

જવાબ : (i) $2! \times 5! = 240$ (ii) $6! - 240 = 480$

(15) કોઈપણ આંકડો એકથી વધુ વખત ન વપરાય એ શરતે 0, 4, 7, 8, 9 માંથી ચાર અંકની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ? તેમજ આમાંથી કેટલી સંખ્યાઓ 7000 કરતાં મોટી હશે ?

જવાબ : $5P_4 - 4P_3 = 96,\ 3 \times 4P_3 = 72$

(16) એક ફિલ્મના શુટિંગ સમયે એક ગૃપ ફોટા પાડવા માટે 13 ખુરશીઓને હારબંધ ગોઠવવામાં આવે છે. આ ખુરશીઓમાં 1 ડાયરેક્ટર, 4 હીરો, 2 હીરોઈન અને 6 વિલનો એમ કુલ 13 વ્યક્તિઓને બેસાડવાની છે. ડાયરેક્ટરને વચ્ચેની ખુરશીમાં બેસાડવા હોય તેમજ વિલનોને પ્રત્યેક છેડાની ત્રણ-ત્રણ ખુરશીઓમાં બેસાડવા હોય અને હીરોઈનોની ખુરશી કોઈપણ વિલનની બાજુમાં ન હોય તે રીતે ગોઠવણી કરવી હોય તો તે ગોઠવણી કુલ કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ : $1! \times 6! \times 4P_2 \times 4! = 2,07,360$

(17) 'PERMUTATIONS' શબ્દનો ઉપયોગ કરી બાર અંકના કેટલા શબ્દો (ક્રમચયો) બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{12!}{2!} = 23,95,00,800$

(18) 'ARRANGE' શબ્દનો ઉપયોગ કરી સાત અંકના કેટલા નવા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{7!}{2!\,2!} = 1260$

(19) 'INTRODUCTION' શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બાર અક્ષરના કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $\frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 2,99,37,600$

(20) કોઈપણ આંકડો ગમે તેટલી વખત આવે તે શરતે 3, 4, 5, 8, 9 માંથી ત્રણ આંકડાની કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?

જવાબ : $5^3 = 125$

1.5.2 (MCQ's) જવાબ સહિત.

(i) n ! = ________ .

(a) nP_n (b) n (c) nxn (d) એકપણ નહીં

(ii) nP_n = ________ .

(a) $\frac{n}{n}$ (b) n! (c) n (d) એકપણ નહીં

(iii) nP_r = ________ .

(a) $\frac{r!}{(n-r)!}$ (b) $\frac{n!}{(r-n)!}$ (c) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (d) એકપણ નહીં

(iv) 5! = ________ .

(a) 5 (b) 120 (c) 1 (d) એકપણ નહીં

(v) $5P_2 \times 3P_2$ = ________ .

(a) 20 (b) 15 (c) 120 (d) એકપણ નહીં

(vi) nP_0 = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(vii) $5P_0$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) એકપણ નહીં

(viii) 0! = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) (a) અને (b) બન્ને (d) એકપણ નહીં

(ix) $\frac{5!}{2!}$ = ________ .

(a) 120 (b) 60 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

(x) પુનરાવર્તન યુક્ત ક્રમચયો = ...

(a) r^n (b) n^r (c) $\frac{n}{r}$ (d) એકપણ નહીં

જવાબ :

(i) a (ii) b (iii) c (iv) b (v) c (vi) b (vii) b

(viii) b (ix) b (x) b

1.6 સંચય (Combination) :

1.6.1 સંચયનો અર્થ :

વિદ્યાર્થી મિત્રો આપણે આગળ જોયું કે ક્રમચય એટલે ગોઠવણી કે જેમાં કોઈ ચાર વસ્તુઓ (P_1, P_2, P_3 અને P_4) માંથી ગમે તે વસ્તુઓની ગોઠવણી (કુલ ક્રમચર્યો) $4P_2 = 4 \times 3 = 12$ થાય. જેને નીચે મુજબ ગોઠવી શકાય.

P_1P_2 P_2P_1 P_3P_1 P_4P_1

P_1P_3 P_2P_3 P_3P_2 P_4P_2

P_1P_4 P_2P_4 P_3P_4 P_4P_3

અહીં P અને P_1P_2 અને P_2P_1, P_1P_3 અને P_3P_1, P_1P_4 અને P_4P_1, P_2P_3 તથા P_3P_2, P_2P_4 અને P_4P_2 તથા P_3P_4 અને P_4P_3 એ દરેકની ગોઠવણી જુદી જુદી રીતે કરવામાં આવે છે. જ્યારે સંચય એટલે પસંદગી તેમાં ઉપરની દરેક જોડ માટે સંચયનો એક જ પ્રકાર છે જે નીચે મુજબ છે.

P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_2P_3, P_2P_4, P_3P_4,

એટલે કે ચાર વસ્તુઓ (P_1, P_2, P_3, P_4) માંથી ગમે તે વસ્તુઓની પસંદગી કરવી હોય તો તેની પસંદગીના કુલ પ્રકારો = 6 થાય. સંચયને અંગ્રેજીમાં Combination કહેવાય છે અને 4 વસ્તુમાંથી 2 વસ્તુની પસંદગીને સંકેતમાં 4_{C_2} વડે દર્શાવી શકાય.

સંચયની સમજૂતી નીચેના ઉદાહરણ ઉપરથી પણ સમજી શકાય.

ધારો કે બાબાસાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં એક સ્પર્ધામાં ત્રણ પ્રોફેસરોમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગી કુલ કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ? આ પ્રશ્નનો જવાબ નીચે મુજબ આપી શકાય.

ધારો કે, ત્રણ પ્રોફેસરોને A, B અને C વડે દર્શાવીએ તો તેમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગી (સંચય)ના કુલ પ્રકારો નીચે મુજબ

AB,   BC,   CA

જેને સંકેતમાં 3_{C_2} વડે દર્શાવી શકાય. એટલે કે 3 પ્રોફેસરોમાંથી બે પ્રોફેસરોની પસંદગીના કુલ પ્રકારો (કુલ સંચયો) = $3_{C_2} = 3$

1.6.2 સંચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર :

વ્યાખ્યા :

n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પસંદ કરવાની કુલ રીતોને સંચય તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને સંકેતમાં n_{C_r} અથવા $\binom{n}{r}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધવામાં આવે છે.

સૂત્ર :

$$n_{C_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

યાદ રાખવા જેવા પરિણામો :

(1) $n_{C_O} = n_{C_n} = 1$

(2) $n_{C_r} = n_{C_{(n-r)}}$

(3) $n_{C_r} + n_{C_{r-1}} = {}^{n+1}C_r$

(4) $r\left[n_{C_r}\right] = n\left[{}^{n-1}C_{r-1}\right]$

1.6.3 નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) 10_{C4} (2) $30_{C_{28}}$ (3) 6_{C_2}

(4) $3_{C_2} \times 5_{C_2}$ (5) $6_{C_0} + 4_{C_4}$

જવાબ :

(1) $10_{C_4} = n_{C_r}$ અને $\therefore$ n = 10 અને r = 4

$$n_{C_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{10!}{4!(10-4)!}$$

$$= \frac{10!}{4!\,6!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1\ .\ 6!} = 210$$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$$10_{C_4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

(2) $30_{C_{28}} = n_{C_r}$ ... $n = 30$ અને $r = 28$

$$n_{C_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{30!}{28!(30-28)!} = \frac{30!}{28!\,2!}$$

$$= \frac{30 \times 29 \times 28!}{28!\ .\ 2 \times 1} = 435$$

(3) $6_{C_2} = \frac{6!}{2!(6-2)!}$

$$= \frac{6!}{2!\ 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1\ .\ 4!} = 15$$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$$6_{C_2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

(4) $3_{C_2} \times 5_{C_2} = \left[\frac{3!}{2!(3-2)!} \times \frac{5!}{2!(5-2)!}\right]$

$$= \left[\frac{3!}{2!\ 1!} \times \frac{5!}{2!\ 3!}\right]$$

$$= \left[\frac{3 \times 2!}{2!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!\ 2 \times 1}\right]$$

$= [3 \times 10] = 30$

અથવા (સીધી રીતે) બીજી રીત

$$3_{C_2} \times 5_{C_2} = \left[\frac{3 \times 2}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1}\right]$$

$= [3 \times 10] = 30$

(5) $6_{C_0} + 4_{C_4} = \left[\frac{6!}{0!(6-0)1} + \frac{4!}{4!(4-4)1}\right]$

$= \left[\frac{6!}{0!\ 6!} + \frac{4!}{4!\ 0!}\right]$ અહીં 0! = 1 થાય.

= [1 + 1]
= 2

અથવા બીજી રીત

$6_{C_0} + 4_{C_4} = [1+1]$ $\therefore$ $n_{C_0} = 1$ અને

= [1 + 1] $n_{C_n} = 1$ થાય.

= 2

ઉદાહરણ-2 : નીચેના સમીકરણો છોડો.

(1) $n_{C_2} = 21$ (2) $32_{C_{3x+2}} = 32_{C_{x+10}}$ (3) $26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

જવાબ :

(1) $n_{C_2} = 21$

$\therefore \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 21$

$\therefore n(n-1) = 42$
$\therefore n^2 - n - 42 = 0$
$\therefore n^2 - 7n + 6n - 42 = 0$
$\therefore n(n-7) + 6(n-7) = 0$
$\therefore (n-7)(n+6) = 0$
n અને 6 કોમન લેતા

$\therefore n - 7 = 0$ અથવા $n = -6$ (અશક્ય)

$\therefore n = 7$

[સમજો :
$-7 \times 6 = -42$ | $\therefore -7n \times 6n$
$-7 + 6 = -1$ | $\therefore -7n + 6n$]

(2) $32_{C_{3x+2}} = 32_{C_{x+10}}$

$\therefore 3x + 2 = x + 10$
$\therefore 3x - x = 10 - 2$
$\therefore 2x = 8$
$\therefore x = 4$

અથવા બીજી રીત

$(3x + 2) + (x + 10) = 32$
$\therefore 3x + 2 + x + 10 = 32$
$\therefore 4x = 32 - 12$

$\therefore\ 4x = 20$

$\therefore\ x = {}^{20}\!/_{4} = 5$

$\therefore\ x = 4$ અથવા $x = 5$

$26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

$\therefore\ 26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}}$

$\therefore\ x + 2 = 2x - 3$

$\therefore\ 3 + 2 = 2x - x$

$\therefore\ x = 5$

અથવા બીજી રીત

$26_{C_{x+2}} = 26_{C_{2x-3}} \qquad \therefore\ n_{C_r} = n_{C_{n-r}}$

$\therefore\ 26_{C_{x+2}} = 26_{C_{26-[2x-3]}}$

$\therefore\ x + 12 = 26 - 2x + 3, \quad \therefore\ x + 2x = 26 + 3 - 2$

$\therefore\ 3x = 27$

$\therefore\ x = 3$

ઉદાહરણ-3 :

$28_{C_{2r}} : 24_{C_{2r-4}} = 225 : 11$ હોય તો r શોધો.

જવાબ :

$28_{C_{2r}} : 24_{C_{2r-4}} = 225 : 11$

$$\therefore\ \frac{\dfrac{28!}{2r!\,(28-2r)!}}{\dfrac{24!}{(2r-4)!\,(24-2r+4)!}} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28!}{2r!\,(28-2r)!} \times \frac{(2r-4)!\,(28-2r)!}{24!} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28\times 27\times 26\times 25\times 24!}{2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)\,(2r-4)!\,(28-2r)!} \times \frac{(2r-4)!\,(28-2r)!}{24!} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28\times 27\times 26\times 25}{2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)} = \frac{225}{11}$$

$$\therefore\ \frac{28\times 27\times 26\times 25\times 11}{3\times 3\times 25} = 2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)$$

$$\therefore\ \frac{28\times 27\times 26\times 25\times 11}{9} = 2r\,(2r-1)\,(2r-2)\,(2r-3)$$

$\therefore\ 28 \times 3 \times 26 \times 11 = 2r\,(2r-1)\ (2r-2)\ (2r-3)$

$\therefore\ 14 \times 2 \times 3 \times 13 \times 2 \times 11 = 2r\,(2r-1)\ (2r-2)\ (2r-3)$

$\therefore\ 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 2r\,(2r-1)\ (2r-2)\ (2r-3)$

$\therefore\ 14 \times (14-1)\ (14-2)\ (14-3) = 2r\ (2r-1)\ (2r-2)\ (2r-3)$

$\therefore\ 14 = 2r$

$\therefore\ r = {}^{14}\!/_{2} = 7$

ઉદાહરણ-4 :

$\dfrac{2x_{C_3}}{x_{C_3}} = 11$ હોય તો x શોધો.

$$\therefore\ \dfrac{\dfrac{2x!}{3!\,(2x-3)!}}{\dfrac{x!}{3!\,(x-3)!}} = 11$$

$$\therefore\ = \dfrac{2x!}{3!(2x-3)!} \times \dfrac{3!(x-3)!}{x!}$$

$$\therefore\ \dfrac{2x(2x-1)\,(2x-2)\,(2x-3)!}{(2x-3)!} \times \dfrac{(x-3)!}{x(x-1)\,(x-2)\,(x-3)!} = 11$$

$$\therefore\ \dfrac{2x(2x-1)\,(2x-2)}{x(x-1)\,(x-2)} = 11$$

$\therefore\ \dfrac{2x(2x-1)\ 2(x-1)}{x(x-1)\,(x-2)} = 11$ x અને $(x-1)$ દૂર કરતા

$$\therefore\ \dfrac{4(2x-1)}{x-2} = 11$$

$\therefore\ 8x - 4 = 11(x-2)$

$\therefore\ 8x - 4 = 11x - 22$

$\therefore\ 22 - 4 = 11x - 8x$

$\therefore\ 18 = 3x$

$\therefore\ x = {}^{18}\!/_{3} = 6$

ઉદાહરણ-5 : એક હોસ્પિટલના 12 ડૉક્ટરોમાંથી 5 ડૉક્ટરની કમિટિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 12 ડૉક્ટરોમાંથી 5 ડૉક્ટરની પસંદગીના કુલ પ્રકારો (કુલ સંચયો) = $12_{C_5} = \dfrac{12!}{5!\,(12-5)!}$

$$= \frac{12!}{5!\ 7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad 7!}$$

$= 11 \times 9 \times 8 = 792$

ઉદાહરણ-6 : એક ડબ્બામાં 6 સફેદ, 5 કાળા અને 4 લીલા દડા છે. તેમાંથી 3 સફેદ, 2 કાળા અને 1 લીલો એમ કુલ પાંચ દડાની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ :

6 સફેદ દડામાંથી 3 દડાની પસંદગી 6_{C_3} પ્રકારે થાય અને

5 કાળા દડામાંથી 2 દડાની પસંદગી 5_{C_2} પ્રકારે થાય અને

4 લીલા દડામાંથી 1 દડાની પસંદગી 4_{C_1} પ્રકારે થાય.

$\therefore$ કુલ સંચયો $= 6_{C_3} \times 5_{C_2} \times 4_{C_1}$

$$= \frac{6!}{3!\ 3!} \times \frac{5!}{2!\ 3!} \times \frac{4!}{1!\ 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1\ .\ 3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \quad 3!} \times \frac{4 \times 3!}{3!} = 20 \times 10 \times 4 = 800$$

ઉદાહરણ-7 : એક કૉલેજમાં 8 પ્રાધ્યાપકો છે, જેમાં 3 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપકો છે. એક કાર્યક્રમમાં 3 પ્રાધ્યાપકો આમંત્રણ આપવું છે. તેમાં ઓછામાં ઓછા એક સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક હોવા જોઈએ. તો કેટલી રીતે આમંત્રણ આપી શકાય ?

જવાબ :

કુલ પ્રાધ્યાપકો = 8 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક = 3 $\therefore$ પુ. પ્રાધ્યાપકો = 5

3 પ્રાધ્યાપકોને આમંત્રણ આપવું છે. જેમાં ઓછામાં ઓછા 1 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક હોય તો પસંદગી નીચે મુજબ થશે.

3	5
સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક	પુરૂષ પ્રાધ્યાપક
1	2
2	1
3	0

એટલે કે 1 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 2 પુરૂષ પ્રાધ્યાપક અથવા
2 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 1 પુરૂષ પ્રાધ્યાપક અથવા
3 સ્ત્રી પ્રાધ્યાપક અને 0 પુરૂષ પ્રાધ્યાપકની પસંદગી થાય.

$\therefore$ કુલ સંચયો $= \left(3_{C_1} \times 5_{C_2}\right) + \left(3_{C_2} \times 5_{C_1}\right) + \left(3_{C_3} \times 5_{C_0}\right)$

$= (3 \times 10) + (3 \times 5) + (1 \times 1)$

$= 30 + 15 + 1 = 46$

ઉદાહરણ-8 : એક બંડલમાં 4 લાલ, 3 વાદળી અને 5 સફેદ પતંગો છે તો તેમાંથી 3 પતંગો પસંદ કરવામાં આવે તો તેમાંથી;

(1) ત્રણેય પતંગ એક જ રંગના હોય.

(2) ત્રણેય પતંગ જુદા જુદા રંગના હોય.

(3) બે પતંગો એક સરખા રંગના અને એક પતંગ જુદા રંગનો હોય, તો તેની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

પતંગો :

લાલ = 4 વાદળી = 3 સફેદ = 5 પસંદ કરેલ = 3

(1) ત્રણેય પતંગ એક જ રંગના હોય એટલે કે ત્રણેય લાલ હોય અથવા ત્રણેય વાદળી હોય અથવા ત્રણેય સફેદ હોય.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો (રીતો) = $4_{C_3} + 3_{C_3} + 5_{C_3}$ $\quad {}^{n}c_r = \frac{n!}{r!(n-r)1} = {}^{4}c_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4\times 3!}{3!1!} = 4$

= 4 + 1 + 10

= 15 (તેવી જ રીતે ${}^{3}C_3$ અને ${}^{S}C_3$ શોધાશે.

(2) ત્રણેય પતંગ જુદા જુદા રંગના હોય એટલે કે એક લાલ અને એક વાદળી અને એક સફેદ હોય.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો (રીતો) = $4_{C_1} \times 3_{C_1} \times 5_{C_1}$ $\quad {}^{n}c_r = \frac{n!}{r!(n-r)}$ નો ઉપયોગ શોધો.

= 4 × 3 × 5 = 60

(3) બે પતંગો એક સરખા રંગના હોય અને એક પતંગ જુદા રંગનો હોય એટલે કે;

4 લાલમાંથી 2 લાલ હોય અને બાકીના (વાદળી + સફેદ) 8 માંથી 1 પસંદ થાય.

અથવા

3 વાદળી માંથી 2 વાદળી હોય અને બાકીના (લાલ + સફેદ) 9 માંથી 1 પસંદ થાય.

અથવા

5 સફેદમાંથી 2 સફેદ હોય અને બાકીના (લાલ + વાદળી) 7 માંથી 1 પસંદ થાય.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો = $\left(4_{C_2} \times 8_{C_1}\right) + \left(3_{C_2} \times 9_{C_1}\right) + \left(5_{C_2} \times 7_{C_1}\right)$

= (6 × 8) + (3 × 9) + (10 × 7)

= 48 + 27 + 70

= 145

ઉદાહરણ-9 : ત્રણ પ્રાધ્યાપકો અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી બે પ્રાધ્યાપકો અને 4 વિદ્યાર્થીઓની એક સમિતિ બનાવવી છે તો તે કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? ઉપરાંત (1) અમુક ચોક્કસ પ્રાધ્યાપકને તે સમિતિમાં લેવાના જ હોય તો સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? (2) જો અમુક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને તે સમિતિમાં ન લેવાનો હોય તો તે સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ :

પ્રાધ્યાપકો = 3 વિદ્યાર્થીઓ = 10

3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 2 પ્રાધ્યાપક અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગીના

કુલ ક્રમચયો = $3_{C_2} \times 10_{C_4}$

$= \frac{3!}{2!\ 1!} \times \frac{10!}{4!\ 6!}$

$= \frac{3\times 2!}{2!} \times \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{4\times 3\times 2\times 1.6!} = 3 \times \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} = = \frac{3\times 2!}{2!}$

= 3 × 210 = 630

(1) અમુક ચોક્કસ પ્રાધ્યાપકને તે સમિતિમાં લેવાના જ હોય અને સમિતિ બનાવવી હોય તો;

3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 1 પ્રાધ્યાપક ચોક્કસ લેવાના અને બાકીના 2 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 1 પ્રાધ્યાપકની પસંદગી થશે અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી

4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગીના કુલ ક્રમચયો = $1_{C_1} \times 2_{C_2} \times 10_{C_4}$

$= 1 \times 2 \times \dfrac{10!}{4!\ 6!}$

$= 2 \times \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 2 \times 210$

$= 420$

(2) જો અમુક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને તે સમિતિમાં ન લેવાનો હોય તો તે સમિતિ બનાવવાના કુલ ક્રમચયો = 3 પ્રાધ્યાપકોમાંથી 2 પ્રાધ્યાપકો 3_{C_2} પ્રકારે પસંદ થશે અને 10 વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ એક ચોક્કસ વિદ્યાર્થીને ન લેવામાં આવે 9 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગી કરવાના કુલ ક્રમચયો

$= 3_{C_2} \times 9_{C_4}$

$= \dfrac{3!}{2!\,1!} \times \dfrac{9!}{4!5!}$

$= \dfrac{3 \times 2!}{2!} \times \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1.5!}$

$= 3 \times \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 3 \times 126 = 378$

ઉદાહરણ-10 : આઠ જુદા જુદા વ્યંજનો અને ત્રણ જુદા જુદા સ્વરોમાંથી 3 વ્યંજન અને 2 સ્વર એમ કુલ પાંચ અક્ષરોવાળા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ :

8 વ્યંજનોમાંથી 3 વ્યંજનોની પસંદગી = 8_{C_3}

3 સ્વરોમાંથી 2 સ્વરોની પસંદગી = 3_{C_2}

પસંદ થયેલા (3 વ્યંજનો અને + 2 સ્વરો) 5 અક્ષરોની ગોઠવણી $5P_5 = 5!$

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકારો = $8_{C_3} \times 3_{C_2} \times 5!$

$= \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \qquad \because {}^3C_2 = 3$

$= 56 \times 3 \times 120$

$= 20,160$

ઉદાહરણ-11 : $\dfrac{8_{C_3}}{3P_3}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $$^{8}C_3 = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$$

$$\frac{8_{C_3}}{3P_3} = \frac{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}{3\times2\times1} = \frac{56}{6} = 9.33 \qquad \because {}^{3}P_3 = 3! = 3\times2\times1 = 6$$

1.7 સ્વાધ્યાય અને MCQ's જવાબ સહિત.

(1) નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) 7_{C_4} (ii) $40_{C_{38}}$ (iii) 5_{C_2} (iv) $5_{C_3} \times 4_{C_3}$ (v) $9_{C_0} + 3_{C_3}$

(vi) $6_{C_0} \times 4$

જવાબ : (i) 35 (ii) 780 (iii) 10 (iv) 40 (v) 2 (vi) 4

(2) નીચેના સમીકરણો છોડો.

(i) $x_{C_2} = 55$ (ii) $12_{C_{n-2}} = 12_{C_n}$ (iii) $52_{C_{4x+2}} = 52_{C_{2x+14}}$

(iv) $24_{C_{n+3}} = 24_{C_{2n-3}}$

જવાબ : (i) $x = 11$ (ii) $n = 7$ ... $n_{C_r} = n_{C_{n-r}}$

(iii) $x = 6$ (iv) $n = 6$ અથવા $n = 8$

(3) જો $n_{C_4} : n_{C_3} = 7 : 4$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n = 10$

(4) જો $\dfrac{2n_{C_3}}{n_{C_2}} = \dfrac{44}{3}$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n = 6$

(5) બાબાસાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીના 16 જેટલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી 5 વિદ્યાર્થીઓની સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 4368

(6) 7 ગુજરાતીઓ, 3 બંગાળીઓ અને 5 મરાઠીમાંથી 3 ગુજરાતી 2 બંગાળી અને 2 મરાઠી એમ મળીને કુલ 7 વ્યક્તિઓ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

જવાબ : $7_{C_3} \times 3_{C_2} \times 5_{C_2} = 1050$

(7) એક પેટીમાં 4 કાળા અને 3 સફેદ દડા છે. તો તેમાંથી ઓછામાં ઓછા એક સફેદ દડો લઈ ત્રણ દડાઓ કેટલી રીતે લઈ શકાય ?

જવાબ : 31

(8) એક ડબ્બામાં 4 સફેદ, 3 કાળા અને 2 વાદળી દડા છે. તો તેમાંથી

(1) ત્રણેય દડા એક જ રંગના હોય.

(2) ત્રણેય દડા જુદા જુદા રંગના હોય.

(3) બે દડા એક જ રંગના અને એક દડો જુદા રંગનો હોય તો તે રીતે તે ડબ્બામાંથી ત્રણ દડાઓ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

જવાબ : (1) 5 (2) 24 (3) 55

(9) એક સોસાયટીમાં કુલ 12 સભ્યો છે. તેમાંથી 7 સભ્યોની એક સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? ઉપરાંત

(1) એક પ્રમુખ અને એક ઉપપ્રમુખનો સમિતિમાં સમાવેશ કરવાનો જ હોય.

(2) અમુક બે સભ્યોનો નિશ્ચિતપણે સમાવેશ ન કરવાનો હોય; તો તે સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 792, (1) 252 (2) 56

(10) 8 સ્ત્રીઓ અને 7 પુરૂષોમાંથી 3 સ્ત્રીઓ અને 4 પુરૂષોની સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ? જો સમિતિમાં અમુક ચોક્કસ સ્ત્રી અને અમુક ચોક્કસ પુરૂષ સાથે રહેવા ન માંગતા હોય તો સમિતિ કેટલી રીતે બનાવી શકાય ?

જવાબ : 1960, 1540

(11) 10 જુદા જુદા વ્યંજન અને 5 જુદા જુદા સ્વરોમાંથી 3 વ્યંજન અને 2 સ્વરવાળા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

જવાબ : $10_{C_3} \times 5_{C_2} \times 5P_5 = 1,44,000$

(12) એક ડબ્બામાં 4 કાળા, 3 સફેદ અને 5 લાલ દડા છે. (1) બે દડા એક જ રંગના હોય. (2) બે દડા જુદા જુદા રંગના હોય તો તે કેટલી રીતે લઈ શકાય ?

જવાબ : (1) $4_{C_2} + 3_{C_2} + 5_{C_2} = 19$

(2) $4_{C_1} \times 3_{C_1} + 4_{C_1} \times 5_{C_1} + 3_{C_1} \times 5_{C_1} = 12 + 20 + 15 = 47$

(13) 15 પ્રધાનોમાંથી 5 પ્રધાનોની એક સમિતિ બનાવવી છે. તેમાં મુખ્ય પ્રધાન અને ગૃહપ્રધાન આવે જ એ શરતે સમિતિની રચના કેવી રીતે કરી શકાય ? જો સંરક્ષણખાતાના પ્રધાનને નહીં જ લેવાના હોય તો સમિતિની રચના કેટલી રીતે કરી શકાય ?

જવાબ : 286, 220

(14) જો $n_{C_4} = n_{C_3}$ હોય તો n ની કિંમત શોધો અને તે ઉપરથી $2n_{C_2}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n = 7$, 91

(15) $nP_2 = 12$ હોય તો n_{C_3} અને nP_3 ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $n(n-1) = 12$ ... $n = 4$, $n_{C_3} = 4$, $nP_3 = 24$

(16) સંચયનો અર્થ લખો.

(17) સંચયની વ્યાખ્યા અને સૂત્ર લખો.

(18) ટૂંકા પ્રશ્નો (MCQ's)

(i) $n_{C_0} =$ ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(ii) $^{n}C_{n}$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) એકપણ નહીં

(iii) $^{n}C_{r}$ = ________ .

(a) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (b) $\frac{r!}{n!(n-r)!}$ (c) $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (d) એકપણ નહીં

(iv) $^{5}C_{3}$ = ________ .

(a) 5 (b) 3 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

(v) $^{6}C_{2}$ = ________ .

(a) $^{6}C_{4}$ (b) $^{5}C_{4}$ (c) $^{6}C_{3}$ (d) એકપણ નહીં

(vi) $^{n}C_{r}$ = ________ .

(a) $^{n}C_{(n-r)}$ (b) np_{r} (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(vii) $^{5}C_{0}$ = ________ .

(a) 0 (b) 5 (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(viii) $^{5}C_{5}$ = ________ .

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) એકપણ નહીં

(ix) $^{3}C_{1} + 3P_{1}$ = ________ .

(a) 6 (b) 9 (c) 18 (d) એકપણ નહીં

(x) 10 વ્યક્તિઓમાંથી 7 વ્યક્તિઓની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(a) $10P_{7}$ (b) $^{10}C_{7}$ (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(xi) $^{6}C_{3} \div 4P_{4}$ = ________ .

(a) 10 (b) 12 (c) 1.2 (d) એકપણ નહીં

(xii) $^{5}C_{3} \times 0!$ = ________ .

(a) 5 (b) 3 (c) 10 (d) એકપણ નહીં

જવાબ : (i) b (ii) b (iii) c (iv) c

(v) a (vi) a (vii) b (viii) b

(ix) a (x) b (xi) d (xii) c

1.8 દ્વિપદી વિસ્તરણ :

1.8.1 દ્વિપદી પદાવલી :

$(a + b)$, $(3x - y)$, $(x + \frac{1}{y})$, $(2x^2 - 5y^2)$ વગેરે જેવી પદાવલીઓને દ્વિપદી પદાવલી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

1.8.2 દ્વિપદી વિસ્તરણ :

દ્વિપદી પદાવલીની જુદી જુદી ઘાત આપેલી હોય અને તેનું વિસ્તરણ કરવામાં આવે તો તે પ્રકારના વિસ્તરણને દ્વિપદી વિસ્તરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

સામાન્ય રીતે નીચે આપેલા દ્વિપદી વિસ્તરણો આપણે જાણીએ છીએ.

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = x + a$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

અહીં આપણે $(x + a)$ દ્વિપદી પદાવલીની 0 ઘાત, 1 ઘાત, 2 ઘાત અને 3 ઘાત માટેના વિસ્તરણો જોયા. હવે જો આપણે $(x + a)$ ની 4, 5, 6 કે ગમે તે n ઘનપૂર્ણાંક ઘાત માટેના વિસ્તરણો મેળવવા માંગતા હોય તો તેનું વિસ્તરણ દ્વિપદી પ્રમેય તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રકારના વિસ્તરણો મેળવવા માટે સંચય અને પાસ્કલના સહગુણાંકના નિયમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે જે નીચે મુજબ છે.

દ્વિપદી સહગુણાકો માટે પાસ્કલનો ત્રિકોણ :

ઘાત	સહગુણાકો
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**
5	**1 5 10 10 5 1**

તેવી જ રીતે ” ” ” ” ” ”

” ” ” ” ” ” ”

” ” ” ” ” ” ”

n સુધી ” ” ” ” ” ”

પાસ્કલના ત્રિકોણ સમજૂતી :

ઉપરના ત્રિકોણમાં જોઈ શકાય છે કે દરેક હારના બંને છેડે 1 છે. ત્યારબાદ ત્યાર પછીની ઘાત એ તેથી નાની ઘાતની છેડે આવેલ રકમ અને તેના પછીથી રકમનો સરવાળો કરી વચ્ચે મુકવામાં આવે છે અને સહગુણક શોધવામાં આવે છે જેમકે;

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = x + a$

અથવા

$(x + a)1 \quad = {}^1C_0\, x^1 a^0 + {}^1C_1\, x^0 a^1$

$= 1.x.1 + 1.1.a \qquad \therefore\ {}^1C_0 = {}^1C_1 = 1$

$= x + a$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

અથવા

$(x + a)^2 = {}^2C_0\, x^2 a^0 + {}^2C_1\, x^1 a^1 + {}^2C_2\, x^0 a^2$

$= 1.x^2.1 + 2.x.a + 1.1.a^2 \qquad [\therefore\ {}^2C_0 = 1\ ,\ {}^2C_2 = 1\ ,\ {}^2C_1 = 2]$

$= \underline{1}x^2 + \underline{2}ax + \underline{1}a^2$

સહગુણકો જુઓ

ઘાત **સહગુણક**

1   1   1

2   1   2   1 $\therefore$ આજુ બાજુ 1 વચ્ચે 1 + 1 = 2

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2\mathrm{a} + 3xa^2 + a^3$

અથવા

$(x + a)^3 = {}^3C_0 x^3 a^0 + {}^3C_1 x^2 a^1 + {}^3C_2 x^1 a^2 + {}^3C_3 x^0 a^3$

$= 1.x^3.1 + 3x^2a + 3xa^2 + 1.1.a^3$

$= 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$

સહગુણકો જુઓ

ઘાત **સહગુણક**

2   1   2   1

3   1   3   3   1

3 ઘન   બંને છેડે 1 પછી

1 + 2 = 3 અને 2 + 1 = 3

આમ દ્વિપદી વિસ્તરણના જુદા જુદા પદના સહગુણકો સંચયના સ્વરૂપમાં લખી શકાય. આ જ પ્રમાણે આપણે $(x + a)^n$ નું વિસ્તરણ નીચે મુજબ લખી શકીએ.

$$(x + a)^n = {}^nC_0\, x^n a^0 + {}^nC_1\, x^{n-1} . a^1 + {}^nC_2\, x^{n-2} . a^2 + ... + {}^nC_{n-1}\, x^1 . a^{n-1} + {}^nC_n\, x^0 . a^n$$

$\therefore\ (x + a)^n = {}^{n}C_0\, x^n + {}^{n}C_1\, x^{n-1} \,.\, a + {}^{n}C_2\, x^{n-2} \,.\, a^2 + ... + {}^{n}C_n\, a^n$

આ વિસ્તરણને દ્વિપદી વિસ્તરણ અથવા દ્વિપદી પ્રમેય તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જેને નીચે મુજબ પણ દર્શાવી શકાય.

$$(x + a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r\, x^{n-r} \,.\, a^r$$

1.8.3 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 : $(x + 2a)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

જવાબ :

$(x + a)^n = {}^{n}C_0\, x^n + {}^{n}C_1\, x^{n-1} \,.\, a + ... + {}^{n}C_n\, a^n$

$n = 5,\ x = x$ અને $a = 2a$ મુકતા

$(x + 2a)^5 = {}^{5}C_0\, x^5 + {}^{5}C_1\, x^4 \,.\, (2a) + {}^{5}C_2\, x^3(2a)^2 + {}^{5}C_3\, x^2(2a)^3 + {}^{5}C_4\, x(2a)^4 + {}^{5}C_5\, (2a)^5$

$= (1)\, x^5 + (5)\, x^4\ (2a) + (10)\ x^3 \,.\, (4a^2) + (10) \,.\, x^2(8a^3) + 5 \,.\, x(16a^4) + (1) \,.\, (32)a^5$

$= x^5 + 10x^4 \,.\, a + 40x^3 \,.\, a^2 + 80x^2 \,.\, a^3 + 80x \,.\, a^4 + 32a^5$

ઉદાહરણ-2 : $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

જવાબ :

$\mathrm{n} = 4,\ x = \left(\frac{x}{3}\right),\ \mathrm{a} = \left(-\frac{3}{x}\right)$

$$(x + a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r\, x^{n-r} \,.\, a^r$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^4 = 4_{C_0}\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\frac{x}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{x}\right) + 4_{C_2}\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(-\frac{3}{x}\right)^2 + 4_{C_2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(-\frac{3}{x}\right)^3 + 4_{C_4}\left(-\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= \frac{x^4}{81} + 4.\left(\frac{x^3}{27}\right)\left(-\frac{3}{x}\right) + 6.\left(\frac{x^2}{9}\right)\left(\frac{9}{x^2}\right) + 4\left(\frac{x}{3}\right)\left(-\frac{27}{x^3}\right) + \left(\frac{81}{x^4}\right)$$

$$= \frac{x^4}{81} - \frac{4x^2}{9} + 6 + \frac{36}{x^2} + \frac{81}{x^4}$$

ઉદાહરણ-3 : $(99)^4$ ની કિંમત મેળવો.

જવાબ :

$(99)^4 = (100 - 1)^4$

$n = 4,\ x = 100,\ a = -1$

$$(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r\, x^{n-r} \cdot a^r$$

$$(100-1)^4 = {}^{4}C_0 (100)^4 + {}^{4}C_1 (100)^3 (-1) + {}^{4}C_2 (100)^2 (-1)^2$$

$$+ {}^{4}C_3 (100) (-1)^3 + {}^{4}C_4 (-1)^4$$

$= (10,00,00,000) + 4(10,00,000)(-1) + 6(10,000)(1) + 4(100)(-1) + (1)$

$= 10,00,00,000 - 40,00,000 + 60,000 - 400 + 1$

$= 9,60,59,601$

ઉદાહરણ-4 : $(10.1)^5$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$(10.1)^5 = (10 + 0.1)^5$

$n = 5,\ x = 10,\ a = 0.1$

$$(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r\, x^{n-r} \cdot a^r$$

$$(10.1)^5 = {}^{5}C_0 (10)^5 + {}^{5}C_1 (10)^4 (0.1) + {}^{5}C_2 (10)^3 (0.1)^2$$

$$+ {}^{5}C_3 (10)^2 (0.1)^3 + {}^{5}C_4 (10) (0.1)^4 + {}^{5}C_5 (0.1)^5$$

$= (1)(1,00,000) + 5(10,000)(0.1) + 10(1000)(0.01) + 10(100)(0.001)$

$+ 5(10)(0.0001) + (1)(0.00001)$

$= 1,00,000 + 5000 + 100 + 1 + 0.005 + 0.00001$

$= 105101.00501$

ઉદાહરણ-5 : $\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$ કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$$

$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 \Rightarrow n = 4,\ x = \sqrt{4}$ અને $a = 1$

$$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 = {}^{4}C_0 \left(\sqrt{4}\right)^4 + {}^{4}C_1 \left(\sqrt{4}\right)^3 (1) + {}^{4}C_2 \left(\sqrt{4}\right)^2 (1)^2 + {}^{4}C_3 \sqrt{4}\,(1)^3 + {}^{4}C_4 (1)^4 \quad \text{— (1)}$$

$\left(\sqrt{4}-1\right)^4 \Rightarrow n = 4,\ x = \sqrt{4}$, અને $a = -1$

$$\left(\sqrt{4}-1\right)^4 = 4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3(-1) + 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2(-1)^2 + 4_{C_3}\sqrt{4}(-1)^3 + 4_{C_4}(-1)^4 \quad \text{— (2)}$$

$$\left(\sqrt{4}+1\right)^4 - \left(\sqrt{4}-1\right)^4$$

$$= \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\left(\sqrt{4}\right) + 3_{C_4}\right]$$

$$- \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 - 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 - 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 - 4_{C_3}\sqrt{4} + 4_{C_4}\right]$$ (∵સમીકરણ 1 માંથી 2 બાદ કરતાં)

$$= \left[4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\sqrt{4} + 4_{C_4}\right.$$

$$\left. - 4_{C_0}\left(\sqrt{4}\right)^4 + 4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 - 4_{C_2}\left(\sqrt{4}\right)^2 + 4_{C_3}\sqrt{4} - 4_{C_4}\right]$$

$$= 2\left[4_{C_1}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4_{C_1}\sqrt{4}\right]$$

$$= 2\left[4\left(\sqrt{4}\right)^3 + 4(2)\right]$$

$$= 8\left[\left(\sqrt{4}\right)^3 + 2\right]$$

ઉદાહરણ-6 : $\left(\sqrt{5}+1\right)^3 - \left(\sqrt{5}-1\right)^3$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^3 = 3_{C_0}\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2(1) + 3_{C_2}\left(\sqrt{5}\right)(1)^2 + 3_{C_3}(1)^3 \quad \text{— (1)}$$

$$\left(\sqrt{5}-1\right)^3 = 3_{C_0}\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2(-1) + 3_{C_2}\left(\sqrt{5}\right)(-1)^2 + 3_{C_3}(-1)^3 \quad \text{— (2)}$$

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^3 - \left(\sqrt{5}-1\right)^3$$

$$= 2\left[3_{C_1}\left(\sqrt{5}\right)^2 + 1\right]$$

$$= 2\ [3(5) + 1] = 32$$

1.8.4 દ્વિપદી વિસ્તરણનું સામાન્ય પદ :

આપણે જાણીએ છીએ કે દ્વિપદી પ્રમેય $(x+a)^n = {}^nC_0\,x^n + {}^nC_1\,x^{n-1}.\,a + {}^nC_2\,x^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + {}^nc_n\,a^n$ છે.

જેનું

પ્રથમ પદ = $T_1 = {}^nC_0 x^n$

બીજુ પદ = $T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} . a$

ત્રીજુ પદ = $T_3 = {}^nC_2 x^{n-2} a^2$

તેવી જ રીતે તેના સામાન્ય પદને $r + 1$ કહીએ તો $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} . a^r$ થાય.

નોંધ : ઉપરના સૂત્રની મદદથી કોઈપણ પદ શોધી શકાય.

ઉદાહરણ-7 : $\left(x+\frac{1}{y}\right)^7$ ના વિસ્તરણમાં ત્રીજુ પદ મેળવો.

જવાબ :

$\left(x+\frac{1}{y}\right)^7$ નું ત્રીજુ પદ મેળવવું છે.

$\because\ r + 1 = 3 \qquad \therefore\ r = 2,\ n = 7,\ x = x,\ a = \frac{1}{y}$

$T_{r+1} = {}^nC_r\ x^{n-r} . a^r$

$\therefore\ T_3 = {}^7C_2\ x^{7-2} . \left(\frac{1}{y}\right)^2$

$= 21 . x^5 . \frac{1}{y^2}$

$= \frac{21x^5}{y^2}$

1.8.5 દ્વિપદી વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ :

દ્વિપદી વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ શોધવું હોય તો $\frac{n}{2}+1$ મુ પદ શોધાય. હવે ધારો કે $n = 10$ આપેલા હોય અને મધ્યમ પદ શોધવું હોય તો $\frac{10}{2}+1 = 6$ ઠું પદ શોધાય. પરંતુ ધારો કે $n = 9$ આપેલા હોય તો $\frac{9}{2}+1 = 5.5$ મળે તેથી પાંચમું અને છઠ્ઠું એમ બે મધ્ય પદો શોધવા પડે.

ઉદાહરણ-8 : $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ શોધો.

જવાબ :

$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{n}{2}+1$ માં મૂકતા $\frac{10}{2}+1=6$ ઠું પદ મધ્યમ પદ બનશે.

$\therefore\ T_{r+1} = {}^{n}C_{r}\,x^{n-r}\,.\,a^{r}$ માં

$r = 5,\ n = 10,\ x = \frac{x}{y}$ અને $a = \left(-\frac{y}{x}\right)$

$$\therefore\ T_6 = 10_{C_5}\left(\frac{x}{y}\right)^{10-5}.\left(\frac{-y}{x}\right)^{5}$$

$$= 252\ .\ \left(\frac{x}{y}\right)^{5}.\left(\frac{y}{x}\right)^{5}$$

$$= -\ 252\ .\ \left(\frac{x^5}{y^5}\times\frac{y^5}{x^5}\right)$$

$$= -252$$

ઉદાહરણ-9 : $\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{7}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદો શોધો.

જવાબ :

$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{7}$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{n}{2}+1$ મૂકતાં,

$\frac{7}{2}+1$ મું પદ એટલે કે ચોથુ અને પાંચમું પદ એ મધ્યમ પદો બનશે.

$T_{r+1} = {}^{n}C_{r}\,x^{n-r}\,.\,a^{r}$ માં $r = 3,\ n = 7,\ x = 3x$ અને $a = \frac{1}{x}$ મૂકતાં,

ચોથુ પદ = $T_4 = 7_{C_3}(3x)^{7-3}.\left(-\frac{1}{x}\right)^{3}$

$$= 35\ .\ (3x)^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 35.\ (81)\ .\ x^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= -\ 2835x$$

પાંચમું પદ = $T_5 = 7_{C_4}(3x)^{7-4}.\left(-\frac{1}{x}\right)^{4}$

$= 35 \ . \ (3x)^3 \ . \ \left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= (35 \times 27) \ x^3 \left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= \frac{945}{x}$

ઉદાહરણ-10 : $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં (i) x^2 નો સહગુણક (ii) અચળ પદ મેળવો.

જવાબ : $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{10}$

$$T_{r+1} = 10_{C_r}\left(\frac{x}{3}\right)^{10-r}\left(\frac{3}{x}\right)^{r}$$

$$= 10_{C_r}\left(\frac{x^{10-r}}{3^{10-r}}\right)\left(\frac{3^r}{x^r}\right)$$

$$= 10_{C_r}\left(\frac{x^{10-2r}}{3^{10-2r}}\right) \qquad \text{— (I)}$$

(i) x^2 નો સહગુણક મેળવવો છે એટલે કે x ની ઘાતમાં 2 મુકવાના છે. જે સમી-(I) માંથી

$\therefore \ x^{10-2r} = x^2$

$\therefore \ 10 - 2r = 2$

$\therefore \ 2r = 8$

$r = 4$

$\therefore \ T_{r+1}$ માં $r = 4$ મુકતાં

$T_5 = 10_{C_4}\left(\frac{x^{10-2(4)}}{3^{10-2(4)}}\right)$

$= \frac{210}{9} \ . \ x^2$

$= \frac{70}{3}x^2$

$\therefore \ x^2$ નો સહગુણક $= \frac{70}{3}$

(ii) અચલ પદ શોધવા x ની ઘાત 0 લેવી પડે.

$\therefore\ x^{10-2r} = x^0$

$\therefore\ 10 - 2r = 0$

$\therefore\ 10 = 2r$

$\therefore\ r = 5$

(જો r ની કિંમત ધનપૂર્ણાંક ન હોય તો અચળ પદ શોધી શકાતું નથી.)

જે T_{r+1} માં મુકતાં અચલ પદ મળશે.

$$T_6 = 10_{C_5}\ \frac{x^{10-2(5)}}{3^{10-2(5)}}$$

$$= 10_{C_5}\ \frac{x^0}{3^0}$$

$= 210(1)$

$= 210$ જે અચલ પદ છે.

નોંધ : આ દાખલામાં આપણે x ની 2 ઘાત, x ની 0 ઘાત મુકી x^2 નો સહગુણક અને અચલપદ શોધ્યા તેવી જ રીતે x ની 1 ઘાત મુકી x નો સહગુણક તેમજ બીજી ગમે તે ઘાત (પ્લસ, માઈનસ બંને જેમ કે x^{-6}, x^6, ...) લઈને તેના સહગુણકો શોધી શકાય.

ઉદાહરણ-11 : કોઈ એક દ્વિપદી વિસ્તરણમાં

મધ્યમ પદ $= 60K^3 = 1620$ હોય તો (K) ની કિંમત શોધો.

જવાબ :

$60K^3 = 1620$

$$\therefore\ K^3 = \frac{1620}{60}$$

$\therefore\ K^3 = 27$

$\therefore\ K = 3$

1.8.6 સ્વાધ્યાય :

(1) $(a + 2x)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

(**જવાબ :** $a^5 + 10a^4 . x + 40a^3 . x^2 + 80a^2x^3 + 80ax^4 + 32x^5$)

(2) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

(**જવાબ :** $\frac{a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2} + 6 - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}$)

(3) $(101)^5$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 10510100501)

(4) $(9.9)^5$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 95099.00499)

(5) $(1.9)^4$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 13.0321)

(6) $\left(\sqrt{5}+1\right)^5-\left(\sqrt{5}-1\right)^5$ ની કિંમત શોધો.

(**જવાબ :** 352)

(7) $\left(\frac{5a}{3}+\frac{3}{5a}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં પાંચમું પદ શોધો.

(**જવાબ :** $\frac{309375(a^4)}{81}$)

(8) $\left(\frac{2a}{5}-\frac{5}{2b}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદો શોધો.

(**જવાબ :** $T_5=\frac{252a^5}{5b^4}$ અને $T_6=\frac{315a^4}{b^5}$)

(9) $\left(\frac{x}{5}-\frac{5}{x}\right)^8$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ શોધો.

(**જવાબ :** $T_5=\frac{70x^2}{25}$)

(10) $\left(\frac{4a}{3}-\frac{3}{a}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(**જવાબ :** $T_{r+1}=1{,}45{,}152,\ r=6$)

(11) $\left(\sqrt{a}-\frac{3}{a}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(**જવાબ :** 40095)

(12) $\left(\frac{x}{b}-\frac{b}{x}\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં x^4 ઘાત વાળુ પદ શોધો અને x^4 નો સહગુણક જણાવો.

(**જવાબ :** $T_4=\frac{-120x^4}{b^4}$ અને સહગુણક $=\frac{-120}{b^4}$)

(13) $(3x^2-x)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં x^{16} નો સહગુણક શોધો.

(**જવાબ :** $r=4$, સહગુણક = 1,53,090)

(14) $\left(x^3+\frac{1}{x^8}\right)^{11}$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ શોધો.

(**જવાબ :** $r=3$, $T_4=165$)

(15) $\left(5x^2 - \frac{5}{x}\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં r ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : 6)

(16) $\left(4x^2 - \frac{4}{x}\right)^7$ ના વિસ્તરણમાં અચલ પદ મળે છે ?

(જવાબ : અચલ પદ નથી $\therefore$ r ની કિંમત ઘનપૂર્ણાંક મળતી નથી.)

(17) ટૂંકમાં જવાબ લખો.

(i) કોઈ એક દ્વિપદી વિસ્તરણમાં છઠ્ઠું પદ = $20K^4 = 320$ હોય તો K ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : K = 2)

(ii) દ્વિપદી પ્રમેલ લખો.

(iii) દ્વિપદી પદાવલી એટલે શું ?

(iv) $(x + a)^3$ નું વિસ્તરણ લખો.

(v) અચલ પદ એટલે શું ? તેનું સૂત્ર લખો.

(vi) મધ્યમ પદ કેવી રીતે શોધાય.

(vii) દ્વિપદી સહગુણાકો માટેનો પાસ્કલ ત્રિકોણ લખો.

1.9 ચાવીરૂપ શબ્દો

ક્રમચય – ગોઠવણી

સંચય – પસંદગી

nP_r – n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની ગોઠવણી

${}^{n}C_r$ – n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની પસંદગી

n ! (n ફેક્ટોરીયલ) – n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ક્રમિક ગુણાકાર એટલે કે $1 \times 2 \times 3 \, ... \times (n-1) \times n$

સમરૂપ વસ્તુઓ – એક સરખી વસ્તુઓ

દ્વિપદી પદાવલી – જે પદમાં બે પદો આપેલા હોય તે પદાવલી

T_n – n મું પદ

T_{r+1} – સામાન્ય પદ

$T_{\frac{n}{2}+1}$ – મધ્યમ પદ

x ની શૂન્ય ઘાત લેતાં મળતું પદ – અચલ પદ

x નો સહગુણક – x સાથે ગુણાયેલો અંક દા.ત. $2x$ માં 2 એ સહગુણક છે.

★ ★ ★

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) 'Basic Statistics' Das and Gupta, Calcutta.

(2) Sancheti & Kapoor, 'Business Statistics', S Chaw & sons, New Delhi.

(3) Mathematics, R. D. Sharma, Dhanpat Rai Publications Pvt. Ltd., New Delhi.