એકમ 2

સંભાવના
(Probability)

2.0 ઉદ્દેશ :

(1) વિદ્યાર્થીઓને સંભાવનાનો અર્થ, વ્યાખ્યા અને નિયમોની જાણકારી આપવી.

(2) સંભાવનાની મદદથી અર્થશાસ્ત્રના નિયમોની ઉપયોગીતા સમજવામાં મદદરૂપ થવાનો.

2.1 પ્રાસ્તાવિક :

સામાન્ય રીતે સંભાવનાનો ઉદ્ભવ જુગારની રમતમાંથી થયેલ છે. આંકડાશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્રમાં સંભાવનાનો વ્યાપક પ્રમાણમાં ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જેને સંભાવનાના સિદ્ધાંતોનું જ્ઞાન ન હોય તેને માટે અંકશાસ્ત્ર કે અર્થશાસ્ત્ર સમજવું ખૂબ જ અઘરી બાબત છે. સંભાવનાના વિવિધ સિદ્ધાંતો રજૂ કરનારાઓમાં જેમ્સ બર્નોલી, ડી. મોઈવ્ર, બેઈઝ વગેરે ગણિતશાસ્ત્રીઓનો સમાવેશ કરવામાં આવેલ છે. ગણિતશાસ્ત્રીઓએ સંભાવનાના વિવિધ નિયમો કે સિદ્ધાંતો રજૂ કરવામાં સિંહ ફાળો ધરાવે છે.

સંભાવના અંગેની સમજ મેળવતા પહેલાં નીચેની ઘટનાઓ સમજીશું.

(1) ''ગુલાબના ફુલની ટોપલીમાંથી ચમેલીનું ફૂલ લેવામાં આવે છે.''

આ ઘટના અશક્ય છે. તેમ થવાની સંભાવના શૂન્ય છે.

(2) ''જેનો જન્મ થયો છે તેનું મૃત્યુ નિશ્ચિત છે.''

આ બનાવ નિશ્ચિત છે. પરંતુ તેનો સમય અનિયમિત છે. એટલે કે તેની આગાહી કરવી અશક્ય છે.

(3) "એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો છાપ પડે અથવા કાંટો પડે."

આ બનાવની આગાહી કરવી અનિશ્ચિત છે.

(4) "કોઈપણ એક પાસો ઉછાળવામાં આવે તો નંબર બે પડે."

આ બનાવ નિશ્ચિત છે. પરંતુ તેની આગાહી કરવી અનિશ્ચિત છે.

આમ અનિશ્ચિત બનાવોની શક્યતા સંખ્યાના સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવે ત્યારે સંભાવનાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

2.2 સંભાવનાના કેટલાક જરૂરી પદો :

સંભાવનાનો અર્થ કે વ્યાખ્યા જણાતા પહેલાં કેટલાક જરૂરી પદો સમજવા જરૂરી છે જે નીચે મુજબ છે.

(1) યદચ્છ પ્રયોગ (Random Experiment) :

"જે પ્રયોગમાં શક્ય વિવિધ પરિણામો પૈકી ગમે તે એક પરિણામ ઉદ્ભવી શકે તેવા પ્રયોગને યદચ્છ પ્રયોગ તરીકે ઓળખી શકાય."

એટલે કે જે પ્રયોગના શક્ય તમામ પરિણામો વિશે માહિતી હોય છે. પરંતુ પ્રયોગને અંતે કયુ પરિણામ આવશે તે કહી શકાતું નથી અને સમાન સંજોગોમાં પ્રયોગોનું સ્વતંત્ર રીતે પુનરાવર્તન પણ કરી શકાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો તેને યદચ્છ પ્રયોગ કહી શકાય કે જેમાં છાપ અને કાંટો બે પરિણામો મળે છે. પરંતુ છાપ પડશે કે કાંટો તે કહી શકાતું નથી તેનું પુનરાવર્તન પણ શક્ય છે.

(2) નિદર્શ અવકાશ (Sample Space) :

કોઈપણ પ્રયત્ન કે પ્રયોગના બધા જ શક્ય પરિણામોના ગણને નિદર્શ અવકાશ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સંકેતમાં તેને S વડે દર્શાવવામાં આવે છે. દા.ત. કોઈ એક સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો છાપ પડે અથવા કાંટો પડે. છાપને H વડે અને કાંટાને T વડે દર્શાવીએ તો બે નિદર્શ બિંદુઓ મળે તેને ગણમા નીચે મુજબ લખીએ તો તે ગણને નિદર્શ અવકાશ કહે છે.

$$S = \{H, T\}$$

તેવી જ રીતે બે સિક્કાઓ ઉછાળીએ તો નિદર્શ અવકાશ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ થાય.

નિદર્શ અવકાશને $\cup$ વડે પણ દર્શાવી શકાય છે.

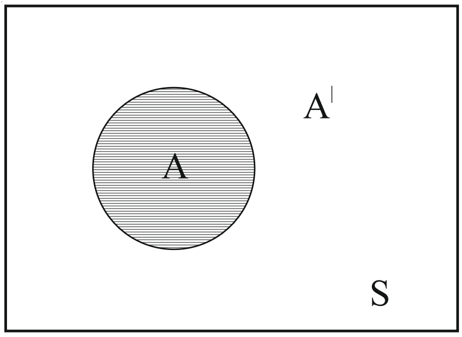
(3) ઘટના (Events) :

'નિદર્શ અવકાશનો ઉપગણ એટલે ઘટના.' દા.ત. ઉપર દર્શાવેલ નિદર્શ અવકાશ $S = \{H, T\}$ માં કુલ ચાર ઘટનાઓ છે. તેને ઉપગણ વડે નીચે મુજબ દર્શાવી છે.

$$\{\theta\}, \{H\}, \{T\}, \{H,T\}\ , \text{ જ્યાં } \{\theta\} = \text{ખાલીગણ}$$

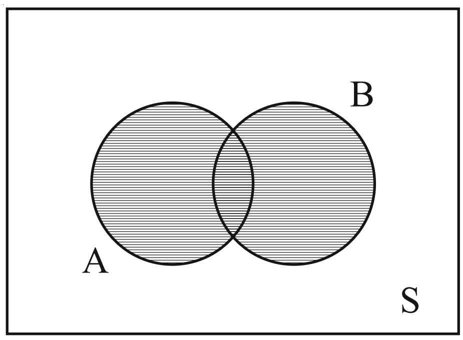
તેને સંકેતમાં A, B, C, D .... Z જેવા અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો વડે અથવા E_1, E_2, E_3 .... વડે દર્શાવી શકાય. અહીં ઉપગણ (ઘટના) $A = \theta$ હોય તો A અશક્ય ઘટના છે. અને જો ઉપગણ (ઘટના) $A = S$ અથવા $\cup$ હોય તો A ને ચોક્કસ ઘટના તરીકે ઓળખી શકાય.

(4) પૂરક ઘટના (Complementary Event) :



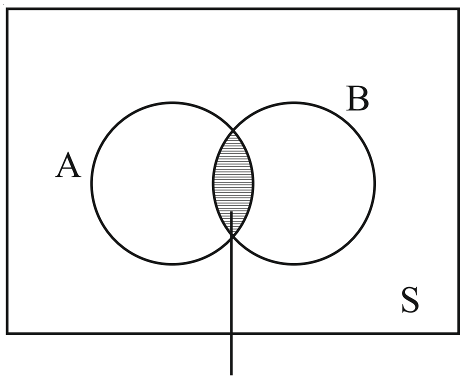
આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ નિદર્શ અવકાશ (S) માં ઘટના A બને તે માટે અનુકૂળ હોય તો A સિવાયના નિદર્શ અવકાશ S ના બધા જ ઘટકોથી બનતા ગણને ઘટના A ની પૂરક ઘટના કહે છે અને તે $A^{|}$ અથવા $\overline{A}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. દા.ત. એક સિક્કો ઉછાળીએ અને છાપ પડવાની ઘટનાને A વડે દર્શાવીએ તો કાંટો પડવાની ઘટનાને A ની પૂરક ઘટના $A^{|}$ કહે છે.

(5) બે ઘટનાઓનો યોગ (Union of Two Events) :



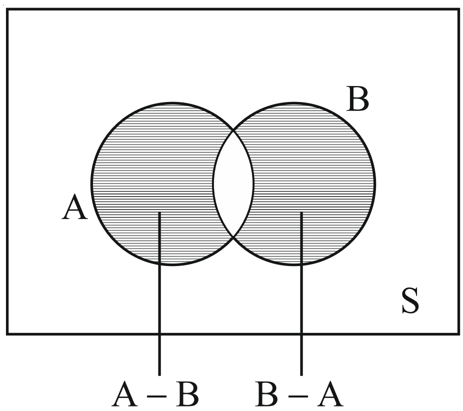
આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ S એ નિદર્શ અવકાશ હોય અને A અને B એ તેના ઉપગણો હોય તો ઘટના A અને B ના યોગને $A \cup B$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. બે ઘટનાઓનો યોગ $(A \cup B)$ માં A અથવા B અથવા A અને B બંને નિદર્શ બિંદુઓને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આમ $(A \cup B)$ માં A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવે છે.

(6) બે ઘટનાઓનો છેદ (Intersection of Two Events) :



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ S એ નિદર્શ અવકાશ હોય અને A અને B એ તેના ઉપગણો હોય તો ઘટના A અને B ના છેદને $A \cap B$ વડે દર્શાવામાં આવે છે. $A \cap B$ માં A અને B બંનેમાં સામાન્ય હોય તેવા નિદર્શ બિંદુઓને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આમ $A \cap B$ માં A અને B એક સાથે ઉદ્ભવે છે.

(7) તફાવત ઘટના (Different Event) :

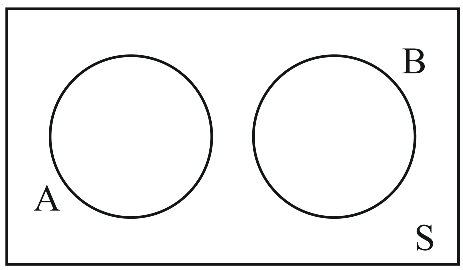


આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ S એ નિદર્શ અવકાશ હોય અને A અને B એ તેના ઉપગણો હોય તો ઘટનાઓ A અને B માંથી કોઈ એક ઘટના A બને અને B ન બને તો તેને A અને B ની તફાવત (A – B) ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં $(A \cap B^{|})$ વડે દર્શાવી શકાય. એટલે કે $(A - B) = (A \cap B^{|})$. તેવી જ રીતે ઘટનાઓ A અને B માંથી કોઈ એક ઘટના B બને અને A ન બને તો તેને B અને A ની તફાવત (B – A) ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં $(A^{|} \cap B)$ વડે દર્શાવી શકાય એટલે કે $(B - A) = (A^{|} \cap B)$.

(8) સમસંભાવી ઘટનાઓ (Equally, Likely Events) :

કોઈ એક યદચ્છ પ્રયત્ન કે પ્રયોગમાં જ્યારે બે ઘટનાઓમાંથી કોઈ એક ઘટના બનવાની શક્યતા બીજી ઘટના બનવાની શક્યતા કરતાં ઓછી કે વધુ હોવાનું કોઈ કારણ ન હોય ત્યારે તેવી બે ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટના કહે છે. દા.ત. 52 પત્તાની એક જોડને સારી રીતે ચીપી લેવામાં આવે અને ત્યાર બાદ તેમાંથી એક પત્તુ ખેંચવામાં આવે તો તેથી પ્રાપ્ત થતી 52 ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટનાઓ કહે છે.

(9) પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ (Mutually Exclusive Events) :



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ S એ નિદર્શ અવકાશ હોય અને A અને B તેના ઉપગણો હોય અને ઘટના A બનવાથી બાકીની ઘટના B બની શકતી નથી એવું નિવારણ મળી જાય તો તે ઘટનાઓને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહે છે. જો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B) = \phi$ (ખાલીગણ) અને $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ થાય.

(10) નિ:શેષ ઘટનાઓ (Exhaustive Events) :

નિદર્શ અવકાશ (S)માં સમાયેલા તમામ નિદર્શ બિંદુઓને નિ:શેષ ઘટનાઓ કહે છે. એટલે કે કોઈ એક યાદચ્છિક પ્રયોગ કે પ્રયત્નમાં બધા જ શક્ય પરિણામોને નિ:શેષ ઘટના કહે છે. દા.ત. એક સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો બે પરિણામો મળે {H, T} તેને નિ:શેષ ઘટનાઓ કહેવાય. તેવી જ રીતે કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \cup B = S$ (નિદર્શ અવકાશ) થાય તો A અને B નિ:શેષ ઘટનાઓ કહેવાય.

(11) સાનુકૂળ બનાવો (Favourable Events) :

યાદચ્છિક પ્રયોગના શક્ય એટલા બધા જ પરિણામોમાંથી જે પરિણામો કોઈ એક ઘટનાની પ્રાપ્તિ માટે અનુકૂળ હોય તો તે પરિણામોને તે ઘટના માટેના સાનુકૂળ કે અનુકૂળ પરિણામો કહે છે. દા.ત. 52 પત્તાની એક જોડમાંથી એક પત્તુ ખેંચવામાં આવે તો તે પત્તુ ફલ્લીનું હોય તે માટેના સાનુકૂળ બનાવો 13 છે.

(12) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (Independent Events) :

જો કોઈ એક ઘટનાના પરિણામો બીજી ઘટનાના પરિણામો ઉપર આધારિત ન હોય એનો અર્થ એ થાય કે બંને ઘટનાઓ સ્વતંત્ર રીતે ઉદ્‌ભવતી હોય. તો તેવી ઘટનાઓને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહે છે. નિરપેક્ષ ઘટનાઓને સ્વતંત્ર ઘટના તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. દા.ત. એક સિક્કો ઉછાળતા છાપ પડે તે અને પાસો ઉછાળતા મળતા પરિણામો પૈકી જે પરિણામ મળે તે બંને એકબીજાથી સ્વતંત્ર હોય છે.

(13) સંયુક્ત ઘટના (Compound Event) :

જ્યારે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ સાથે બને ત્યારે તે ઘટનાને સંયુક્ત ઘટના કહેવામાં આવે છે અને તેની સંભાવનાને સંયુક્ત સંભાવના કહે છે.

2.3 સંભાવનાની વ્યાખ્યાઓ [Definations of Probability] :

સંભાવનાની અલગ અલગ ત્રણ વ્યાખ્યાઓ નીચે મુજબ છે.

(A) ગાણિતિક વ્યાખ્યા (Mathematical Defination)

(B) સાંખ્યિકીય વ્યાખ્યા (Statistical Defination)

(C) આધુનિક વ્યાખ્યા (Modern Defination)

(A) ગાણિતિક વ્યાખ્યા :

સંભાવનાની ગણિતીય વ્યાખ્યાઓને પૂર્વસ્વીકૃત અથવા પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે જે નીચે મુજબ છે.

"જો કોઈપણ યાદચ્છિક પ્રયોગમાં સમસંભાવી, નિઃશેષ અને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓની કુલ સંખ્યા = n હોય અને તેમાંથી m બનાવો, કોઈ એક ઘટના $A^{|}$ ને સાનુકૂળ હોય તો તે ગુણોત્તર m/n ને ઘટના A બનવાની સંભાવના કહેવાય છે." તેને સંકેતમાં P(A) વડે દર્શાવાય.

એટલે કે,

P(A) = ઘટના A બનવાની સંભાવના

$$= \frac{m}{n}$$

જ્યાં m = સાનુકૂળ બનાવો

n = કુલ બનાવો

અને $0 \le m \le n$

તથા $0 \le P(A) \le 1$ થાય.

આમ કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના હંમેશા 0 થી 1 સુધીની જ હોય છે.

જો P(A) = 0 હોય તો A અશક્ય ઘટના કહેવાય અને P(A) = 1 હોય તો A ચોક્કસ ઘટના છે. એમ કહેવાય. ઉપરાંત જો ઘટના A ની પ્રાપ્તિને સાનુકૂળ ઘટનાઓની સંખ્યા = m હોય તો તેને સાનુકૂળ ન હોય તેવી ઘટનાઓની સંખ્યા = $n - m$ થાય.

$\therefore$ ઘટના A ન બને તેની સંભાવના $= P(A^{|}) = \frac{n-m}{n}$

$$= \frac{n}{n} - \frac{m}{n}$$

$$= 1 - \frac{m}{n}$$

$P(A^{|}) = 1 - P(A)$ થાય.

$\therefore P(A) + P(A^{|}) = 1$

આમ ઘટના A બનવાની અને ઘટના A ન બનવાની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય છે.

(B) સાંખ્યિકીય વ્યાખ્યા :

"જો કોઈ એક યદચ્છ પ્રયોગને n વખત પુનરાવર્તન કરવમાં આવે અને તેમાં કોઈ એક ઘટના m પ્રકારે બનતી હોય તો તેનો ગુણોત્તર m/n મળે. તેને આવૃત્તિ ગુણોત્તર કહેવાય. આ ગુણોત્તર કોઈ એક ચોક્કસ લક્ષ (Limit) ને અનુલક્ષી કોઈ એક અચલ સંખ્યા પ્રાપ્ત કરે તો આ અચલ સંખ્યાને ઘટનાની સાંખ્યિકીય સંભાવના કહે છે." તેને સંકેતમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

ઘટના A બનવાની સંભાવના $P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{n}\right) = P$, જ્યાં $\frac{m}{n}$ = અચલ સંખ્યા

અહીં પણ ઘટનાની સફળતાની સંભાવના અને નિષ્ફળતાની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય છે અને સંભાવનાની કિંમત 0 અને 1ની વચ્ચે જ હોય છે.

(C) આધુનિક વ્યાખ્યા :

સંભાવનાની આધુનિક વ્યાખ્યા કોલ્મોગોરોવ (Kolmogorov) નામના રશિયન અર્થશાસ્ત્રીએ નીચે મુજબ આપેલ છે.

“ધારો કે યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ = S હોય અને તેનો ઉપગણ ($A \subset S$) સાથે સંકળાયેલ તેની સંભાવના P(A) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, અને જો તે નીચેની પૂર્વ ધારણાઓને સંતોષે તો તેને ઘટના Aની સંભાવના કહે છે.”

પૂર્વધારણા - 1 $0 \le P(A) \le 1$

પૂર્વધારણા - 2 $P(S) = 1$

પૂર્વધારણા - 3 જો E_1, E_2, E_3, E_4 .... એ નિદર્શ અવકાશ S ની પરસ્પર નિવારક સાન્ત અથવા અનંત ઘટનાઓ હોય તો,

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \ldots\ldots) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \ldots\ldots$

2.4 સંભાવનાના પ્રમેયો [Theroem of Probability] :

કેટલાક જરૂરી સંભાવનાના પ્રમેયો અને તેના પરિણામો નીચે મુજબ છે.

પ્રમેય-1 :

જો P(A) એ ઘટના A ની પ્રાપ્તિની સંભાવના હોય તો,

$$P(A') = 1 - P(A)$$

જ્યાં P(A) = ઘટના A બનવાની સંભાવના અને $P(A')$ = ઘટના A ન બનવાની સંભાવના.

પ્રમેય-2 :

(i) જો A અને B બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

જ્યાં, P(A) = ઘટના A બનવાની સંભાવના

P(B) = ઘટના B બનવાની સંભાવના

$P(A \cup B)$ = ઘટના A અને B બે પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બનવાની સંભાવના એટલે કે ફક્ત ઘટના A બને અથવા ફક્ત ઘટના B બને અથવા A અને B બંને બને તેની સંભાવના.

(ii) જો A_1, A_2, A_3 .... A_n વગેરે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots\ldots + P(A_n)$

(iii) જો A_1, A_2, A_3 .... A_n વગેરે પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_n) = 1$

(iv) $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B')$

જ્યાં $P(A' \cap B')$ = ઘટના A અને B બંને ન બને તેની સંભાવના.

પ્રમેય-3 (સંભાવનાના સરવાળાનું પ્રમેય) :

(i) જો A અને B એ બે ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

જ્યાં, $P(A)$ = ઘટના A બનવાની અને $P(B)$ ઘટના B બનવાની સંભાવના

$P(A \cap B)$ = ઘટના A અને B સાથે બને તેની સંભાવના

(ii) જો A, B, C એ કોઈ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$

$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

જ્યાં $P(A)$, $P(B)$ અને $P(C)$ એ અનુક્રમે ઘટના A, B અને C બનવાની સંભાવના છે. જ્યારે $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ અને $P(A \cap B \cap C)$ એ અનુક્રમે ઘટના A અને B, ઘટના A અને C, ઘટના B અને C તથા ઘટના A અને B અને C સાથે બંને તેની સંભાવનાઓ છે.

પ્રેમય-4 (સંભાવનાના ગુણાકારના પ્રમેય) :

(i) જો A અને B બે ઘટનાઓ હોય તો,

$$P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B/A)$$

જ્યાં, $P(A \cap B)$ = ઘટના A અને B સાથે બંને તેની સંભાવના.

$P(A)$ = ઘટના A બને તેની સંભાવના

$P(B/A)$ = ઘટના A પ્રાપ્ત થઈ છે. એ શરતે ઘટના B બનવાની સંભાવના

એટલે કે,

$P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ જ્યાં $P(A) \neq 0$

જેને શરતી સંભાવના તરીકે ઓળખી શકાય છે.

અથવા

$$P(A \cap B) = P(B)\ .\ P(A/B)$$

જ્યાં $P(B)$ = ઘટના B બને તેની સંભાવના

$P(A/B)$ = ઘટના B પ્રાપ્ત થઈ છે એ શરતે ઘટના A બનવાની સંભાવના

એટલે કે,

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ જ્યાં $P(B) \neq 0$

જેને શરતી સંભાવના તરીકે ઓળખી શકાય.

(ii) જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B)$ થાય તેથી

(iii) જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A^{|} \cap B^{|}) = P(A^{|}) \, . \, P(B^{|})$

જ્યાં $P(A^{|} \cap B^{|})$ = ઘટના A અને B બંને ન બને તેવી સંભાવના

(iv) જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો,

$P(A \cup B) + P(A^{|} \cap B^{|}) = 1$ થાય.

(v) $P\left(\frac{A^{|}}{B}\right) = \frac{P(A^{|} \cap B)}{P(B)}$

જ્યાં $P(A^{|} \cap B)$ = ઘટના A ન બને અને ઘટના B બને તેની સંભાવના

(vi) $P\left(\frac{B^{|}}{A}\right) = \frac{P(A \cap B^{|})}{P(A)}$

જ્યાં $P(A \cap B^{|})$ = ઘટના A બને અને ઘટના B ન બને તેની સંભાવના

2.5 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

એક બંડલમાં 5 લાલ અને 4 લીલા પતંગો છે. તો તેમાથી એક લાલ પતંગ લેવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

કુલ નિઃશેષ બનાવો = $n = 5 + 4 = 9$

લાલ પતંગ માટે સાનુકૂળ બનાવો = 5

$\therefore$ લાલ પતંગ મળે તેની સંભાવના = $\frac{m}{n} = \frac{5}{9}$

ઉદાહરણ-2 :

એક સમઘન પાસાને ઉછાળતા 2, 4, 6 (બેકી) સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

પાસો ઉછાળીએ તો 1, 2, 3, 4, 5, 6 એમ કુલ 6 નિઃશેષ બનાવો મળે.

$\therefore n = 6$

બેકી સંખ્યા મેળવવા માટે સાનુકૂળ બનાવો 2, 4, 6

$\therefore m = 3$

$\therefore$ બેકી સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના = $\frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ઉદાહરણ-3 :

પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો તે બંને પત્તા એક્કાના હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

52 પત્તામાંથી બે પત્તા 52_{C_2} રીતે લેવાય

$\therefore$ કુલ બનાવો = $n = \dfrac{52 \times 51}{2} = 1326$

પત્તાની જોડમાં એક્કાની કુલ સંખ્યા 4 હોય તેમાંથી 2 એક્કા $^4C_2$ રીતે લેવાય.

$\therefore$ બે એક્કા માટે સાનુકૂળ બનાવો = $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6$

$\therefore$ બંને પત્તા એક્કાના હોય તેની સંભાવના = $\dfrac{m}{n} = \dfrac{6}{1326} = 0.0045$

ઉદાહરણ-4 :

બે સમઘન પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો અંકોનો સરવાળો '7' મળવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

બે સમઘન પાસા ઉછાળવામાં આવે તો કુલ નિઃશેષ બનાવો = $6^2 = 36$

$\therefore n = 36$

પાસા ઉપર આવતા અંકનો સરવાળો '7' મળે તે માટેના સાનુકૂળ બનાવો

(1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 3) (6, 1) એમ કુલ 6

$\therefore m = 6$

$\therefore$ સંભાવના = $\dfrac{m}{n} = \dfrac{6}{36} = 1/6$

ઉદાહરણ-5 :

એક સિક્કો;

10 વખત ઉછાળતા 2 વખત છાપ મળે.

30 વખત ઉછાળતા 10 વખત છાપ મળે.

50 વખત ઉછાળતા 18 વખત છાપ મળે.

100 વખત ઉછાળતા 36 વખત છાપ મળે.

500 વખત ઉછાળતા 178 વખત છાપ મળે.

1000 વખત ઉછાળતા 359 વખત છાપ મળે.

તો તે ઉપરથી સાંખ્યિકીય સંભાવના શોધો.

જવાબ :

10 વખત ઉછાળતા 2 વખત છાપ મળે = $\dfrac{2}{10} = 0.2$

30 વખત ઉછાળતા 10 વખત છાપ મળે = $\dfrac{10}{30} = 0.33$

50 વખત ઉછાળતા 18 વખત છાપ મળે = $\dfrac{18}{50} = 0.36$

100 વખત ઉછાળતા 36 વખત છાપ મળે = $\frac{36}{100} = 0.36$

500 વખત ઉછાળતા 178 વખત છાપ મળે = $\frac{178}{500} = 0.36$

1000 વખત ઉછાળતા 359 વખત છાપ મળે = $\frac{359}{1000} = 0.36$

આમ છેલ્લી ચાર સંભાવના 0.36 છે એટલે કે અચલ છે. તેથી સાંખ્યિકીય સંભાવના = 0.36

ઉદાહરણ-6 :

સારી રીતે ચીપેલા 52 પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો;

(i) એક બાદશાહ અને એક ગુલામ હોવાની સંભાવના

(ii) એક પત્તુ કાળીનું અને એક પત્તુ ફલ્લીનું હોવાની સંભાવના

(iii) બંને પત્તા ફલ્લીના હોવાની સંભાવના

(iv) બંને પત્તા એક જ રંગના હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

52 પત્તાને ચીપી યદચ્છ રીતે બે પત્તા 52_{C_2} રીતે લેવાય.

$\therefore$ કુલ બનાવો = $n = \frac{52 \times 51}{2} = 1326$

(i) એક બાદશાહ અને એક ગુલામ હોવા માટેના સાનુકૂળ

બનાવો = $4_{C_1} \times 4_{C_1} = 4 \times 4 = 16$

$\therefore m = 16$

$\therefore$ સંભાવના = $\frac{169}{1326} = 0.1275$

(ii) એક પત્તુ કાળીનું અને એક પત્તુ ફલ્લીનું હોવા માટેના સાનુકૂળ

બનાવો = $13_{C_1} \times 13_{C_1} = 13 \times 13 = 169$

$\therefore m = 169$

$\therefore$ સંભાવના $\frac{169}{1326} = 0.1275$

(iii) બંને પત્તા ફલ્લીના હોવા માટેના સાનુકૂળ બનાવો = $13_{C_2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$

$\therefore m = 78$

$\therefore$ સંભાવના = $\frac{78}{1326} = 0.0588$

(iv) બંને પત્તા એક જ રંગના હોવા માટેના સાનુકૂળ બનાવો એટલે કે બંને પત્તા કાળીના હોય અથવા બંને લાલના હોય અથવા બંને ફુલ્લીના હોય અથવા બંને ચરકટના હોય તે માટેના અનુક્રમ બનાવો

$$= {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2$$

$$= 78 + 78 + 78 + 789$$

$$m = 312$$

$$\therefore \text{ સંભાવના } = \frac{312}{1326} = 0.2353$$

ઉદાહરણ-7 :

ત્રણ પાસાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો ત્રણે પર મળતા અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો '17' આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

3 પાસા ઉછાળવામાં આવે તો કુલ બનાવો

$n = 6^3 = 216$

અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો '17' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો = સરવાળો '17' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો + સરવાળો '18' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો હવે સરવાળો '17' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો નીચે મુજબ છે.

(5, 6, 6) (6, 5, 6) (6, 6, 5) = 3 બનાવો

સરવાળો '18' આવવાના સાનુકૂળ બનાવો નીચે મુજબ છે.

(6, 6, 6) = 1 બનાવ

$\therefore$ સાનુકૂળ બનાવો $(m) = 3 + 1 = 4$

$$\therefore \text{ સંભાવના } = \frac{4}{216} = 0.0185$$

ઉદાહરણ-8 :

બે પાસાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો બંને અંકો પર મળતા અંકોનો સરવાળો વધુમાં વધુ 5 આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

બે પાસા ઉછાળવામાં આવે તો કુલ બનાવો

$n = 6^2 = 36$

અંકોનો સરવાળો વધુમાં વધુ '5' મેળવવાના સાનુકૂળ બનાવો =

સરવાળો 2 મળે તેવા બનાવો = (1, 1) = 1

+ સરવાળો 3 મળે તેવા બનાવો = (1, 2) (2, 1) = 2

+ સરવાળો 4 મળે તેવા બનાવો = (1, 3) (3, 1) (2, 2) = 3

+ સરવાળો 5 મળે તેવા બનાવો = (1, 4) (4, 1) (2, 3) (3, 2) = 4

$\therefore m = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$\therefore$ સંભાવના $= \frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0.2778$

ઉદાહરણ-9 :

ત્રણ કોથળીઓ ઉપર A, B અને C લખેલ છે. A કોથળીમાં 2 સફેદ અને 3 લાલ દડા છે. B કોથળીમાં 4 સફેદ અને 1 લાલ દડો છે. C કોથળીમાં 4 સફેદ અને 6 લાલ દડા છે. દરેક કોથળીમાંથી એક દડો પસંદ કરવામાં આવે તો પસંદ કરેલ ત્રણ દડાના સમૂહમાં;

(1) બધા દડા સફેદ હોય.

(2) બધા દડા લાલ હોય.

(3) બે દડા સફેદ અને 1 દડો લાલ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

કોથળી	**સફેદ દડા**	**લાલ દડા**	**કુલ**
A	$2 = W_1$	$3 = R_1$	5
B	$4 = W_2$	$1 = R_2$	5
C	$4 = W_3$	$6 = R_3$	10

કોથળી	**સફેદ દડો પસંદ થાય તેની સંભાવના** $= \frac{m}{n}$	**લાલ દડો પસંદ થાય તેની સંભાવના** $= \frac{m}{n}$
A	$P(W_1) = 2/5$	$P(R_1) = 3/5$
B	$P(W_2) = 4/5$	$P(R_2) = 1/5$
C	$P(W_3) = 2/5$	$P(R_3) = 3/5$

(i) બધા દડા સફેદ હોય તેની સંભાવના

$= P(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = P(W_1).P(W_2).P(W_3)$

$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{125}$

(ii) બધા દડા લાલ હોય તેની સંભાવના

$= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1).P(R_2).P(R_3)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{5}$

$= \frac{9}{125}$

(iii) બે સફેદ દડા અને એક લાલ દડો હોય તેની સંભાવના

$$= P(W_1 \cap W_2 \cap R_3) \cup P(W_1 \cap R_2 \cap W_3) \cup P(R_1 \cap W_2 \cap W_3)$$

$$= \left[P(W_1) \,.\, P(W_2) \,.\, P(R_3)\right] + \left[P(W_1) \,.\, P(R_2) \,.\, P(W_3)\right]$$

$$+ \left[P(R_1) \,.\, P(W_2) \,.\, P(W_3)\right]$$

$$= \left[\frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5}\right] + \left[\frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5}\right] + \left[\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5}\right]$$

$$= \frac{24}{125} + \frac{4}{125} + \frac{24}{125}$$

$$= \frac{52}{125} = 0.416$$

ઉદાહરણ-10 :

એક કુટુંબમાં 2 છોકરા અને 3 છોકરીઓ છે. બીજા કુટુંબમાં 3 છોકરા અને 2 છોકરી છે. જો બેમાંથી એક કુટુંબ પસંદ કરી તેમાંથી બે બાળકો પસંદ કરવામાં આવે તો પસંદ કરેલ બંને બાળકો છોકરા હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

કુટુંબ	છોકરા	છોકરી	કુલ
I	2	3	5
II	3	2	5

બંને કુટુંબમાંથી કોઈ એક કુટુંબની પસંદગી થાય તેની સંભાવના = $1/2$

પ્રથમ કુટુંબ પસંદ થાય તેમાં બંને છોકરા હોય તેની સંભાવના = $\frac{{}^{2}C_{2}}{{}^{5}C_{2}} = \frac{1}{10}$

બીજું કુટુંબ પસંદ થાય તેમાં બંને છોકરા હોય તેની સંભાવના = $\frac{{}^{3}C_{2}}{{}^{5}C_{2}} = \frac{3}{10}$

$$\therefore \text{ સંભાવના } = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{10}\right)$$

$$= \frac{2}{10} = 1/5$$

બીજી રીત

બે કુટુંબોને અનુક્રમે A અને B અને બે છોકરાઓની ઘટનાને R ધારી લઈએ તો,

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{1}{2}$

$\therefore\ PR = P(A \cap R) + P(B \cap R)$

$= P(A).\left(R/_{A}\right) + P(B).\left(R/_{B}\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2_{C_2}}{5_{C_2}}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3_{C_2}}{5_{C_2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{3}{20}$$

$$= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

ઉદાહરણ-11 :

5 પુસ્તકો એક હારમાં ગોઠવતા અમુક બે ચોક્કસ પુસ્તકો એક સાથે ન આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

5 પુસ્તકોને એક હારમાં $5P_5 = 5! = 120$ રીતે ગોઠવાય.

બે પુસ્તકોને અંદર અંદર $2! = 2$ રીતે ગોઠવાય. બે પુસ્તકને એક યુનીટ ગણતા બાકીના 4 પુસ્તકો $4P_4 = 4! = 24$ રીતે ગોઠવાય.

$\therefore$ કુલ રીતો $= 2 \times 24 = 48$

$\therefore$ બે પુસ્તકો સાથે ન આવે તે માટેના અનુકૂળ (સાનુકૂળ) બનાવો $= 120 - 48$

$= 72$

$\therefore$ બે ચોક્કસ પુસ્તકો સાથે ન આવે તેની સંભાવના $= \dfrac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \dfrac{72}{120} = 0.6$

ઉદાહરણ-12 :

ત્રણ વ્યક્તિ x, y અને z એક સાથે નિશાન તાકે છે. તેમની સફળતાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ અને $\frac{1}{3}$ છે. તો નિશાન વીંધવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, ત્રણ વ્યક્તિઓ x, y, z ને અનુક્રમે A, B અને C ધારી લઈએ તો,

A નિશાન વીંધવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $P(A) = \frac{1}{2}$

A નિશાન વીંધવામાં સફળ ન થાય તેની સંભાવના $P(A^{|}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

B નિશાન વીંધવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $P(B) = \frac{2}{3}$

B નિશાન વીંધવામાં સફળ ન થાય તેની સંભાવના $P(B^{|}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

C નિશાન વીંધવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $P(C) = \frac{1}{3}$

C નિશાન વીંધવામાં સફળ ન થાય તેની સંભાવના $P(C^{|}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ત્રણેય નિશાન વીંધવામાં સફળ ન થાય તેની સંભાવના $= P(A^{|} \cap B^{|} \cap C^{|})$

$= P(A^{|}) \,.\, P(B^{|}) \,.\, P(C^{|})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

ત્રણેય નિશાન વીંધવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $= P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - P(A^{|} \cap B^{|} \cap C^{|})$

$= 1 - \frac{1}{9}$

$= \frac{8}{9}$

ઉદાહરણ-13 :

એક વિદ્યાર્થી તર્કશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્ર એમ બે વિષયની પરીક્ષા આપે છે. તે બંને વિષયની પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના $\frac{23}{45}$ છે. તે અર્થશાસ્ત્ર વિષયની પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના $3/5$ છે અને તે બેમાંથી ઓછામાં ઓછા કોઈ એક વિષયમાં પાસ થાય તેની સંભાવના $1/3$ છે. તો તે વિદ્યાર્થી તર્કશાસ્ત્ર વિષયમાં પાસ થાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, તર્કશાસ્ત્ર = A અને અર્થશાસ્ત્ર = B

$\therefore$ તર્કશાસ્ત્રમાં પાસ થવાની સંભાવના = P(A) = ?

અર્થશાસ્ત્રની પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના = $P(B) = \frac{3}{5}$

બંને પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના = $P(A \cup B) = \frac{23}{45}$

ઓછામાં ઓછી એક પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના = $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{3} = P(A) + \frac{3}{5} - \frac{23}{45}$$

$$\therefore \; P(A) = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{23}{45}$$

$$= \frac{15 - 27 + 23}{45}$$

$$= \frac{11}{45}$$

ઉદાહરણ-14 :

A અને B વ્યક્તિઓ પૈકી A અમુક વર્ષ સુધી જીવી જાય તેની તરફેણમાં પ્રમાણ 3 : 2 જ્યારે B અમુક વર્ષ સુધી જીવી જાય તેની વિરૂદ્ધમાં પ્રમાણ 2 : 5નો બંનેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ જીવી જાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

A $\rightarrow$ જીવે : મરે   B $\rightarrow$ મરે : જીવે

3 : 2 = 5   2 : 5 = 7

A વ્યક્તિ જીવી જાય તેની સંભાવના = $\frac{3}{5} = P(A)$

B વ્યક્તિ જીવી જાય તેની સંભાવના = $\frac{5}{7} = P(B)$

બંને વ્યક્તિમાંથી એક વ્યક્તિ જીવી જાય તેની

સંભાવના = $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \left(\frac{3}{5} \times \frac{5}{7}\right)$ $\because$ A અને B સ્વતંત્ર ઘટનાઓ છે. $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

$= \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \frac{15}{35}$

$= \frac{21 + 25 - 15}{35}$

$= \frac{31}{35}$

ઉદાહરણ-15 :

એક કોથળીમાં 7 વાદળી અને કેટલાક કાળા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે વાદળી દડા લેવાની સંભાવના $\frac{1}{15}$ છે તો કાળા દડાની સંખ્યા શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, કાળા દડા $= x$

$\therefore$ 7 વાદળી અને x કાળા દડાનો સરવાળો $= (7 + x)$ કુલ દડા

તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડા લેવામાં આવે તો તેની કુલ રીતો $= (7 + x)_{C_2} =$ કુલ બનાવો $= n$

x કાળા દડામાંથી 2 દડા લેવાની કુલ રીતો $= x_{C_2} = m =$ સાનુકૂળ બનાવો

સંભાવના $= \frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}}$

$$\frac{1}{15} = \frac{x_{C_2}}{(7 + x)_{C_2}}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{(7 + x)(6 + x)}{2}} \quad , \quad \frac{1}{15} = \frac{x(x-1)}{(7+x)(6+x)}$$

$(7 + x)(6 + x) = 15x(x - 1)$

$x^2 + 7x + 6x + 42 = 15x^2 - 15x$

$\therefore 15x^2 - 15x - 13x - x^2 - 42 = 0$

$14x^2 - 28x - 42 = 0$ .... 14 વડે ભાગતા

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 3x + x - 3 = 0$

$x(x - 3) + 1(x - 3) = 0$

$(x - 3)$ અથવા $(x + 1) = 0$

$\therefore\ x = 3$

ઉદાહરણ-16 :

જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $P(A) = \frac{1}{3}$ અને $P(B) = \frac{1}{4}$ હોય તો $P(A \cup B)$ શોધો.

જવાબ :

$P(A) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{1}{4},\ P(A \cup B) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - [P(A)\ .\ P(B)] \qquad \because\ \text{A, B એ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{4 + 3 - 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ-17 :

જો A, B અને C ત્રણ પરસ્પર અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય અને $4P(A) = 3P(B) = 2P(C) = K$ હોય તો (i) $P(A \cup B)$ અને (ii) $P(B \cup C)$ હોય તો (iii) $P(A \cup C)$ શોધો.

જવાબ :

$4P(A) = 3P(B) = 2P(C) = K$

$\therefore\ 4P(A) = K,$	$3P(B) = K,$	$2P(C) = K$
$\therefore\ P(A) = \frac{K}{4},$	$P(B) = \frac{K}{3},$	$P(B) = \frac{K}{2}$

વ્યાખ્યા અનુસાર A, B અને C ત્રણ પરસ્પર અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય ત્યારે

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$ થાય.

$\therefore\ P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$$\frac{K}{4} + \frac{K}{3} + \frac{K}{2} = 1$$

$\therefore \dfrac{3K + 4K + 6K}{12} = 1$

$\dfrac{13K}{12} = 1$

$\therefore K = \dfrac{12}{13}$

$\therefore P(A) = \dfrac{K}{4} = \dfrac{12}{13 \times 4} = \dfrac{3}{13}$

$P(B) = \dfrac{K}{3} = \dfrac{12}{13 \times 3} = \dfrac{4}{13}$

$P(C) = \dfrac{K}{2} = \dfrac{12}{13 \times 2} = \dfrac{6}{13}$

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= \dfrac{3}{13} + \dfrac{4}{13} = \dfrac{7}{13}$

(ii) $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$

$= \dfrac{4}{13} + \dfrac{6}{13} = \dfrac{10}{13}$

(iii) $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

$= \dfrac{3}{13} + \dfrac{6}{13} = \dfrac{9}{13}$

ઉદાહરણ-17 : A

જો $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$ અને $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2}$ હોય તો,

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap B')$ (iii) $P(A' \cap B)$ (iv) $P(A' \cap B')$

(v) $P\left(\dfrac{B}{A}\right)$ (vi) $P\left(\dfrac{A}{B}\right)$ (vii) $P\left(\dfrac{A'}{B}\right)$ (viii) $P\left(\dfrac{B'}{A}\right)$ શોધો.

જવાબ :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(i) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{3+4-6}{12} = \frac{2}{12} = 0.08$$

(ii) $P(A \cap B^{|}) = P(A) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$= 0.17$$

(iii) $P(A^{|} \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$= 0.25$$

(iv) $P(A^{|} \cap B^{|}) = 1 - P(A \cup B)$

$$= 1 - \frac{1}{2} = 1/2$$

$$= 0.5$$

(v) $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{12} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{3}$$

(vi) $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{1/3} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{4}$$

(vii) $P\left(\frac{A^{|}}{B}\right) = \frac{P(A^{|} \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1/3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{4}$$

(viii) $P\left(\frac{B^{|}}{A}\right) = \frac{P(A \cap B^{|})}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6} \times \frac{4}{1} = \frac{2}{3}$$

2.6 બેઈઝનું પ્રમેય :

(A) પ્રતીષ સંભાવના (Inverse Probability) :

પ્રતીષ સંભાવનાની પદ્ધતિનો વિકાસ બ્રિટીશ ગણિતશાસ્ત્રી બેઈઝે કરેલ છે. તેને 'બેઈઝનું પ્રેમય' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જે નીચે મુજબ સમજી શકાય છે.

જો કોઈ એક ઘટના D પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n$ સાથે ઉદ્ભવતી હોય અને તેની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $P(A_1), P(A_2), \ldots\ldots\ldots.., P(A_n)$ જાણીતી હોઈ ઉપરાંત તેની શરતી સંભાવનાઓ

અનુક્રમે $P\left(\frac{D}{A_1}\right), P\left(\frac{D}{A_2}\right) \ldots\ldots.,\ P\left(\frac{D}{A_n}\right)$ મેળવી શકાય એમ હોય તો તેની મદદથી તેની પ્રતીપ (વ્યસ્ત)

સંભાવના $P\left(\frac{A_1}{D}\right), P\left(\frac{A_2}{D}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ P\left(\frac{A_n}{D}\right)$ મેળવવામાં આવે છે.

(B) બેઈઝનું પ્રમેય :

બ્રિટિશ ગણિતશાસ્ત્રી બેઈઝએ વિકસાવેલ 'બેઈઝ પ્રમેય' નીચે મુજબ લખી શકાય.

જો કોઈ એક ઘટના D પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n$ સાથે ઉદ્ભવતી હોય અને તેની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $P(A_1), P(A_2), \ldots\ldots\ldots.., P(A_n)$ ઉપરાંત તેની શરતી સંભાવનાઓ અનુક્રમે

$P\left(\frac{D}{A_1}\right), P\left(\frac{D}{A_2}\right) \ldots\ldots.,\ P\left(\frac{D}{A_n}\right)$ જાણતા હોઈએ તો ઘટના D બની ગઈ છે તે શરતે ઘટના Ai બનવાની

સંભાવના નીચે પ્રમાણે થાય.

$$P\left(\frac{Ai}{D}\right) = \frac{P(Ai \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(Ai \cap D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + \ldots\ldots. + P(A_n \cap D)}$$

$$= \frac{P(Ai)\ .\ P\left(\frac{D}{Ai}\right)}{P(A_1)\ .\ P\left(\frac{D}{A_1}\right) + P(A_2)\ .\ P\left(\frac{D}{A_2}\right) + \ldots\ldots..\ P(A_n)\ .\ P\left(\frac{D}{A_n}\right)}$$

$$P\left(\frac{Ai}{D}\right) = \frac{P(Ai)\ .\ P\left(\frac{D}{Ai}\right)}{\sum P(Ai)\ .\ P\left(\frac{D}{Ai}\right)}$$

ઉદાહરણ-18 :

એક કારખાનામાં ત્રણ મશીનો (A, B, C) કુલ ઉત્પાદનના અનુક્રમ 50%, 30% અને 20% વસ્તુઓ દરરોજ બનાવે છે. તે મશીનો અનુક્રમે 5%, 3% અને 2% ખામીવાળી વસ્તુઓ બનાવે છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી યદચ્છ રીતે એક વસ્તુ લેવામાં આવે જે ખામીવાળી જણાય છે. તો તે વસ્તુ C મશીનમાંથી ઉત્પાદિત થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ખામી પ્રમાણ

$$P(A) = 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \qquad P\left(\frac{D}{A}\right) = 5\% = \frac{5}{100}$$

$$P(B) = 30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \qquad P\left(\frac{D}{B}\right) = 3\% = \frac{3}{100}$$

$$P(C) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \qquad P\left(\frac{D}{C}\right) = 2\% = \frac{2}{100}$$

ખામી વાળી વસ્તુ C મશીનમાંથી ઉત્પાદિત થઈ હોય તેની સંભાવના

$$P\left(\frac{Ai}{D}\right) = \frac{P(Ai) \,.\, P\left(\frac{D}{Ai}\right)}{\sum P(Ai) \,.\, P\left(\frac{D}{Ai}\right)}$$

$$= \frac{P(C) \,.\, P\left(\frac{D}{C}\right)}{P(A) \,.\, P\left(\frac{D}{A}\right) + P(B) \,.\, P\left(\frac{D}{B}\right) + P(C) \,.\, P\left(\frac{D}{C}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{100}\right)}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{100}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{100}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2}{500}}{\frac{5}{200} + \frac{9}{1000} + \frac{2}{500}}$$

$$= \frac{\frac{1}{250}}{\frac{25 + 9 + 4}{1000}}$$

$$= \frac{1}{250} \times \frac{1000}{38}$$

$$= \frac{4}{38}$$

ઉદાહરણ-19 :

બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીમાં ત્રણ પ્રોફેસરો A_1, A_2 અને A_3 કુલપતિની જગ્યા માટે અરજી કરે છે. તો ત્રણ પૈકી ગમે તે એકને કુલપતિ તરીકે પસંદ કરવાના છે. જેમાં A_1 ની પસંદગી તક A_2 ની પસંદગીની તક કરતા બમણી છે. જ્યારે A_2 ની પસંદગીની તક A_3 કરતાં બમણી છે. જો આ પ્રોફેસરો કુલપતિ તરીકે પસંદ થાય તો સંશોધન ક્ષેત્રે વિકાસ થાય તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3, 0.4 અને 0.5 છે. જો યુનિવર્સિટીમાં સંશોધન ક્ષેત્રનો વિકાસ થયો હોય તો A_1 ની કુલપતિ તરીકે પસંદગી થઈ હશે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

$P(A_1) = 2P(A_2)$ અને $P(A_2) = 2P(A_3)$

$\therefore\ P(A_1) = 4P(A_3)$ $\qquad$ $P(A_2) = 2P(A_3)$ મુકતાં

હવે, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$\therefore\ P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$

$4P(A_3) + 2P(A_3) + P(A_3) = 1$

$P(A_3)\ [4 + 2 + 1] = 1$

$P(A_3) = 1/7$

$P(A_2) = 2P(A_3)$

$= 2\left(\frac{1}{7}\right) = 2/7$

$= 2(2/7)$

$= 4/7$

સંશોધન ક્ષેત્રે વિકાસ થાય તેની સંભાવના (D) =

$$P\left(\frac{D}{A_1}\right) = \frac{3}{10},\ P\left(\frac{D}{A_2}\right) = 4/10,\ P\left(\frac{D}{A_3}\right) = \frac{5}{10}$$

A_1 ની કુલપતિ તરીકે પસંદગી થાય તેની સંભાવના

$$P\left(\frac{A_1}{D}\right) = \frac{P(A_1)\ .\ P\left(\frac{D}{A_1}\right)}{P(A_1)\ .\ P\left(\frac{D}{A_1}\right) + P(A_2)\ .\ P\left(\frac{D}{A_2}\right) + P(A_3)\ .\ P\left(\frac{D}{A_3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{3}{10}}{\left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{2}{10} \times \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{7} \times \frac{5}{10}\right)}$$

$$= \frac{\frac{12}{70}}{\frac{12}{70} + \frac{8}{70} + \frac{5}{70}}$$

$$= \frac{\frac{12}{70}}{\frac{25}{70}}$$

$$= \frac{12}{70} \times \frac{70}{25}$$

$$= \frac{12}{25}$$

ઉદાહરણ-20 :

એક કોથળીમાં 2 લાલ અને 2 લીલી લિપ્સ્ટીક છે. બીજી કોથળીમાં 1 લાલ અને 3 લીલી લિપ્સ્ટીક છે. જ્યારે ત્રીજી કોથળીમાં 2 લાલ અને 2 લીલી લિસ્ટીક છે. યદચ્છ રીતે એક કોથળી પસંદ કરી તેમાંથી એક લિપ્સ્ટીક લેવામાં આવે છે જે લાલ રંગની માલુમ પડે તો તે લિપ્સ્ટીક (i) પ્રથમ કોથળીમાંથી (ii) બીજી કોથળીમાંથી (iii) ત્રીજી કોથળીમાંથી લેવાયેલ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ધારો કે, ત્રણ કોથળીઓ પસંદ થાય તે ઘટના A, B અને C

લાલ લિપ્સ્ટીક મળે તે ઘટના = D

કોથળી	**સંભાવના**	**લાલ લિપ્સ્ટીક**	**લીલી લિપ્સ્ટીક**	**સંભાવના**
A	$P(A) = \frac{1}{3}$	2	2	$P\left(D/A\right) = \frac{2}{4}$
B	$P(B) = \frac{1}{3}$	1	3	$P\left(D/B\right) = \frac{1}{4}$
C	$P(C) = \frac{1}{3}$	2	2	$P\left(D/C\right) = \frac{2}{4}$

$P(Ai)$	$P\left(\frac{D}{Ai}\right)$	$P(Ai)\ .\ P\left(\frac{D}{Ai}\right)$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{12}$
કુલ	$\frac{5}{12}$	

(i) $P\left(\frac{D}{A}\right) = \dfrac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}$

$$= \frac{2}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

(ii) $P\left(\frac{D}{B}\right) = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}}$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{5}$$

(iii) $P\left(\frac{C}{D}\right) = \dfrac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}$

$$= \frac{2}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

2.7 સ્વાધ્યાય :

(1) સંભાવનાના નીચેના પદો સમજાવો.

(1) યદૃચ્છ પ્રયોગ (2) નિદર્શ અવકાશ

(2) પદોની સમજૂતી આપો.

(1) સમસંભાવી ઘટના (2) નિરપેક્ષ ઘટના

(3) પરસ્પર નિવારક ઘટના (4) નિઃશેષ ઘટના

(3) સંભાવનાની ગમે તે એક વ્યાખ્યા સમજાવો.

(1) ગાણિતીક વ્યાખ્યા

(2) સાંખ્યિકીય વ્યાખ્યા

(3) આધુનિક વ્યાખ્યા

(4) સંભાવનાનો સરવાળાનો પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા લખો.

(5) શરતી સંભાવના એટલે શું ? તેના સૂત્રો જણાવો.

(6) બેઈઝનું પ્રમેય લખો.

(7) એક ડબ્બામાં 6 કાળા અને 5 સફેદ દડા છે. તેમાંથી એક સફેદ દડો લેવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{5}{11}$)

(8) એક પાસો ઉછાળતા તેની ઉપર અંક-‘5’ આવવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{1}{6}$)

(9) પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો તે બંને પત્તા ફલ્લીના હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{78}{1326}$)

(10) બે સમઘન પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો અંકોનો સરવાળો ‘10’ મળે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{1}{12}$)

(11) 52 પત્તાની જોડમાંથી યદચ્છ રીતે એક પત્તું લેવામાં આવે તો તે પત્તું (i) કાળીનું હોવાની (ii) સત્તુ (7) હોવાની (iii) કાળીનું સત્તુ(7) હોવાની (iv) સત્તુ અથવા કાળીનું હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $\frac{1}{52}$ (iv) $\frac{4}{13}$)

Hint : (iv) સત્તુ હોય + કાળીનું હોય – સત્તુ અને કાળીનું હોય = $\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{13}\times\frac{1}{4}\right)$

(12) એક પેટીમાં 4 લાલ અને 6 લીલા દડા છે. તેમાંથી બે દડા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે છે તો (i) બંને દડા લાલ હોવાની (ii) બંને દડા લીલા હોવાની (iii) એક લાલ અને એક લીલો હોવાની (iv) બંને દડા એક જ રંગના હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{8}{15}$ (iv) $\frac{21}{45}$)

(13) ત્રણ પાસાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે તો ત્રણે ઉપર મળતા અંકોનો સરવાળો વધુમાં વધુ ‘5’ આવે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $n = 6^3 = 216$, $m = 1 + 3 + 6 = 10$, સંભાવના = $\frac{10}{216}=\frac{21}{45}$)

(14) બે પાસાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે તો બંને ઉપર મળતા અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો ‘10’ મળે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $n = 6^2 = 36$, $m = 3 + 2 + 1 = 6$ સંભાવના $= \frac{1}{6}$)

(15) એક લીપ વર્ષમાં 53 રવિવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : Hint : 366 દિવસમાંથી (52×7) 364 બાદ કરતાં બે દિવસો વધશે. તેને સોમ-મંગળ, મંગળ-બુધ, ... રવિ-સોમ ગોઠવતાં 7 સમસંભાવી ઘટના મળે અને બે સાનુકૂળ બનાવો. ... સંભાવના $= \frac{2}{7}$)

(16) એક કબાટમાં 4 આંકડાશાસ્ત્રના અને 7 અર્થશાસ્ત્રના પુસ્તકો છે. તેમાંથી એક પછી એક એમ બે પુસ્તકો વારાફરતી (i) પુરવણી રહિત (ii) પુરવણી સહિત લેવામાં આવે તો બંને પુસ્તકો આંકડાશાસ્ત્રના હોય તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{4}{11} \times \frac{4}{11} = \frac{16}{121}$ (ii) $\frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{110} = \frac{6}{55}$)

(17) એક ડબ્બામાં 4 સફેદ અને 6 કાળા દડા છે. બીજા ડબ્બામાં 6 સફેદ અને 7 કાળા દડા છે. પહેલા ડબ્બામાંથી યદચ્છ રીતે એક દડો લેવામાં આવે છે અને રંગ જોયા વગર બીજા ડબ્બામાં મૂકવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ બીજા ડબ્બામાંથી એક દડો યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો તે દડો સફેદ હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{4}{10} \times \frac{8}{14} + \frac{6}{10} \times \frac{6}{14} = \frac{17}{35}$)

(18) ત્રણે થેલીમાં અનુક્રમે 2 સફેદ, 1 લાલ; 3 સફેદ, 2 લાલ; 2 સફેદ, 3 લાલ દડાઓ છે. દરેક થેલીમાંથી યદચ્છ રીતે એક થેલી પસંદ કરવામાં આવે તો પસંદ કરેલા ત્રણેય દડાઓમાં (i) ત્રણેય દડા લાલ હોવાની (ii) ત્રણેય દડા સફેદ હોવાની (iii) બે સફેદ અને એક લાલ હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{15}$ (ii) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

(iii) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{32}{75}$)

(19) 6 વિદ્યાર્થીઓ અને 4 (ચાર) પ્રાધ્યાપકોને એક હારમાં યદચ્છ રીતે ઊભા રાખવામાં આવે છે. ચારેય પ્રાધ્યાપકો એક સાથે આવે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{7! \times 4!}{10!} = \frac{1}{30}$)

(20) 1 થી 100 અનુક્રમ નંબર લખેલી સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે છે તો તે સંખ્યા (i) ‘10’ વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય. (ii) 15 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય. (iii) ‘10’ અથવા ‘15’ વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{3}{50}$ (iii) $\frac{13}{100}$)

Hint : (iii) (10 વડે ભાગી શકાય + 15 વડે ભાગી શકાય – 10 અને 15 વડે ભાગી શકાય તેની સંભાવના)

(21) 5 છોકરાઓ અને 3 પ્રાધ્યાપકોને યદચ્છ રીતે એક હારમાં ઊભા રાખવામાં આવે છે. કોઈપણ બે પ્રાધ્યાપક એક સાથે નહીં આવે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{5! \times 6P_3}{8!} = \frac{5}{14}$)

(22) ત્રણ વિદ્યાર્થીઓને એક દાખલો ગણવા આપવામાં આવે છે તેઓને તે સાચો ગણવાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{2}{3}$ છે. દાખલો સાચો ગણવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $\frac{8}{9}$)

(23) બાબા સાહેબ આંબેડકર યુનિવર્સિટીના કુલ 1000 વિદ્યાર્થીઓમાં ત્રણ પુસ્તકો x, y અને z વંચાય છે. પુસ્તક x કુલ વિદ્યાર્થીઓના 18%, પુસ્તક y કુલ વિદ્યાર્થીઓના 17%, પુસ્તક z કુલ વિદ્યાર્થીઓના 15% વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. જ્યારે x અને y 80 વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. y અને z 50 વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. y અને z 40 વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. જ્યારે ત્રણેય પુસ્તકો 30 વિદ્યાર્થીઓ વાંચે છે. તો ઓછામાં ઓછું એક પુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ વાંચતા હોય તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $A \cup B \cup C = 0.36$)

(24) એક સમુહમાં 10 પુરૂષો અને અમુક સ્ત્રીઓ છે. તેમાંથી બે પુરૂષો પસંદ કરવાની સંભાવના $\frac{5}{17}$ છે. તો તે સમુહમાં સ્ત્રીઓની સંખ્યા શોધો.

(જવાબ : Hint : $\frac{5}{17} = \frac{10_{C_2}}{(10+x)_{C_2}} \quad \therefore x = 8$)

(25) એક કૉલેજમાં 6 વિદ્યાર્થીઓ અને કેટલીક વિદ્યાર્થીનીઓ છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરવાની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે. તો વિદ્યાર્થીનીઓની સંખ્યા શોધો.

(જવાબ : Hint : $\frac{1}{3} = \frac{6_{C_2}}{(6+x)_{C_2}} \quad \therefore x = 4$)

(26) $P(A) = 0.7$, $P(B') = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$ હોય તો (i) $P(A \cap B)$ અને (ii) $P(A' \cap B')$ શોધો.

(જવાબ : (i) 0.4, (ii) 0.3)

(27) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. ઘટના A ન બને તેની સંભાવના $\frac{1}{2}$ અને ઘટના B બને તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ હોય તો A અને B માંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બનવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : Hint : $A \cup B = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = 0.6$)

(28) જો A, B, C ત્રણ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય અને $P(A) = 2P(B)$ તેમજ $P(B) = 2P(C)$ હોય તો (i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(B \cup C)$ (iii) $P(A \cup C)$ શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{5}{7}$)

Hint : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$ ઉપરથી $P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B) = \frac{2}{7}$, અને

$P(C) = \frac{1}{7}$

(29) બે વ્યક્તિઓએ જીવનવીમો ઉતરાવેલ છે. જે પૈકી પ્રથમ વ્યક્તિ હાલની ઉંમરથી વધુ 30 વર્ષ સુધી જીવી જાય તેની તરફેણમાં પ્રમાણ 2 : 3 છે અને બીજી વ્યક્તિ હાલની ઉંમરથી વધુ 30 વર્ષ સુધી જીવી જાય તેને વિરૂદ્ધમાં પ્રમાણ 3 : 4 છે. તો હવે પછી 30 વર્ષ સુધી બેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ જીવતી હોવાની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $P(A)\ \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{4}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{26}{35}$)

(30) જો $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B^{|}) = \frac{2}{5}$, અને $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ હોય તો ;

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap B^{|})$ (iii) $P(A^{|} \cap B)$ (iv) $P(A^{|} \cap B^{|})$

(v) $P\left(B^{|}/A\right)$ (vi) $P\left(A/B\right)$ (vii) $P\left(A^{|}/B\right)$ (viii) $P\,P\left(B^{|}/A\right)$

શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{1}{5}$ (v) $\frac{1}{2}$ (vi) $\frac{1}{3}$ (vii) $\frac{2}{3}$ (viii) $\frac{1}{2}$)

(31) એક કૉલેજમાં ત્રણ ઉમેદવારો x, y અને z ફીઝીકલ ડાયરેક્ટરની જગ્યા માટે પસંદગી પામે તેનું પ્રમાણ અનુક્રમે 3 : 2 : 5 છે. તેઓ કૉલેજના રમત-ગમતનો વિકાસ કરે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{5}$ છે. જો કૉલેજમાં રમત-ગમત ક્ષેત્રનો વિકાસ થયો હોય તો;

(i) x ની ફીઝીકલ ડાયરેક્ટર તરીકે

(ii) y ની ફીઝીકલ ડાયરેક્ટર તરીકે

(iii) z ની ફીઝીકલ ડાયરેક્ટર તરીકે પસંદગી થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{1}{3}$)

Hint : બેઈઝ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરો.

(32) એક ઉદ્યોગમાં ત્રણ વ્યક્તિઓ x, y અને z પૈકી ગમે તે એકને ચાર્ટડ એકાઉન્ટન્ટ તરીકે પસંદ કરવાની છે. x ની પસંદગીની તક y ની પસંદગીની તક કરતાં ત્રણ ગણી છે. જ્યારે y ની પસંદગીની તક z ની પસંદગીની તક કરતાં ત્રણ ગણી છે. જો આ વ્યક્તિઓ ચાર્ટડ એકાઉન્ટન્ટ તરીકે પસંદ થાય તો ઉદ્યોગના વિવિધ ખર્ચાઓ ઓછા કરી નફામાં વધારો થાય તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3, 0.4, 0.3 છે. જો તે ઉદ્યોગમાં નફામાં વધારો થયો હોય તો z ની ચાર્ટડ એકાઉન્ટન્ટ તરીકે પસંદગી થઈ હશે તેની સંભાવના શોધો.

(જવાબ : $P(A) = 9/13$, $P(B) = 3/13$, $P(C) = 1/13$, સંભાવના $(z) = 3/42$ બેઈઝ પ્રમેય)

2.8 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ's) :

(i) સંભાવનાનો કુલ સરવાળો ....

(a) < 1 (b) $= 1$ (c) > 1 (d) એકપણ નહીં

(ii) સંભાવનામાં $P(A') = 1 -$ ....

(a) $P(A')$ (b) $P(A)$ (c) (a) અને (b) બંને (d) એકપણ નહીં

(iii) જો $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$ અને $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.5$ હોય તો $P(A \cap B) =$ ....

(a) 0.32 (b) 1.60 (c) 0.40 (d) એકપણ નહીં

(iv) જો $P(A') = 0.3$, $P(B) = 0.4$ અને $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.6$ હોય તો $P(A \cap B) =$ ....

(a) 0.42 (b) 0.24 (c) 1.20 (d) એકપણ નહીં

(v) જો $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$ અને $P\left(\frac{A}{B}\right) = 0.5$ હોય તો $P(A \cap B) =$ ....

(a) 0.8 (b) 0.1 (c) 0.2 (d) એકપણ નહીં

(vi) $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.4$ હોય તો $P(A \cup B) =$ ....

(a) 0.8 (b) 0.6 (c) 0.7 (d) એકપણ નહીં

(vii) જો $P(A) = 0.6$, $P(B') = 0.3$ અને $P\left(\frac{A}{B}\right) = 0.7$ હોય તો $P(A \cap B) =$ ....

(a) 0.42 (b) 0.21 (c) 0.49 (d) એકપણ નહીં

(viii) સંભાવના $P(A) + P(A') =$ ....

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) એકપણ નહીં

(ix) સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$ જ્યાં $m =$ ....

(a) કુલ બનાવો (b) નિઃશેષ ઘટના (c) સાનુકૂળ બનાવો (d) એકપણ નહીં

(x) એક થેલીમાં 4 સફેદ અને 2 કાળા દડા છે. તો તેમાંથી એક સફેદ દડો લેવાની સંભાવના શોધો. ....

(a) 0.67 (b) 0.33 (c) 0.5 (d) એકપણ નહીં

(xi) એક સમઘન પાસાને ઉછાળતાં બેકી સંખ્યા મળવાની સંભાવના = ...

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) એકપણ નહીં

(xii) 52 પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો બંને બાદશાહ હોવાની સંભાવના શોધો.

(a) $\frac{1}{1326}$ (b) $\frac{1}{221}$ (c) $\frac{52}{1326}$ (d) એકપણ નહીં

(xiii) બે સિક્કા ઉછાળવામાં આવે તો નિદર્શ અવકાશના બિંદુઓની સંખ્યા = ...

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) એકપણ નહીં

(xiv) ઘટના B પ્રાપ્ત થઈ છે. એમ આપેલ હોય ત્યારે ઘટના A બનવાની સંભાવનાને .... વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(a) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (b) $P\left(\frac{B}{A}\right)$ (c) $P\left(\frac{B'}{A}\right)$ (d) એકપણ નહીં

(xv) ત્રણ સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો બે છાપ અને એક કાંટો મળવાની સંભાવના = ...

(a) $\frac{2}{8}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) એકપણ નહીં

(xvi) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ = ...

(a) $P\left(A/B\right)$ (b) $P\left(B/A\right)$ (c) $P\left(B'/A\right)$ (d) એકપણ નહીં

(xvii) $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ = ...

(a) $P\left(A/B\right)$ (b) $P\left(B/A\right)$ (c) $P\left(A'/B\right)$ (d) એકપણ નહીં

(xviii) જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B)$ = ...

(a) $P(A) + P(B)$ (b) $P(A) \,.\, P(B)$ (c) $P(A') \,.\, P(B)$ (d) એકપણ નહીં

(xix) જો A અને B બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cup B)$ = ...

(a) $P(A) + P(B)$ (b) $P(A) \,.\, P(B)$ (c) $P(A') \,.\, P(B')$ (d) એકપણ નહીં

(xx) શક્ય પરિણામોમાંથી જે પરિણામો ઘટનાની પ્રાપ્તિ માટે અનુકૂળ હોય તેને .... ઘટના કહે છે.

(a) સમસંભાવી (b) સાનુકૂળ (c) કુલ (d) એકપણ નહીં

જવાબ :

(i) b (ii) b (iii) c (iv) a (v) c (vi) a (vii) c

(viii) b (ix) c (x) a (xi) c (xii) b (xiii) c (xiv) a

(xv) b (xvi) b (xvii) a (xviii) b (xix) a (xx) b

2.9 ચાવીરૂપ શબ્દો

સંભાવના : અનિશ્ચિત બનાવોની શક્યતાને સંખ્યામાં રજૂઆત

યદચ્છ : શક્ય પરિણામો પૈકી ગમે તે એકની પસંદગી

પ્રયોગ : પ્રયત્ન

નિદર્શ અવકાશ : શક્ય પરિણામોની ગણ

ઘટના : નિદર્શ અવકાશનો ઉપગણ

પૂરક ઘટના : એક બને તો બીજી ન બને

બે ઘટનાનો યોગ : બે ઘટનામાંથી ઓછામાં ઓછી એક બને તે

બે ઘટનાનો છેદ : બે ઘટનામાં સામાન્ય (બંનેમાં હોય) હોય તેવા નિદર્શ બિંદુઓ.

પરસ્પર નિવારક ઘટના : એક ઘટના બને તો બાકીની ઘટના બની ન શકે તે.

નિઃશેષ ઘટના : નિદર્શ અવકાશના તમામ નિદર્શબિંદુઓ.

સાનુકૂળ બનાવો : કુલ પરિણામોમાંથી અનુકૂળ હોય તેવા પરિણામોનો સમુહ

નિરપેક્ષ : સ્વતંત્ર, એકબીજા પર આધારિત ન હોય.

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) 'Basic Statistics' Das and Gupta, Culcutta., 2007

(2) Sancheti & Kapoor, 'Business Statistics', S Chaw & sons, New Delhi., 2009

(3) Mathematics, R. D. Sharma, Dhanpat Rai Publications Pvt. Ltd., New Delhi., 2009