એકમ 17

રમતનો સિદ્ધાંત
[Theory of Games]

17.0 ઉદ્દેશો :

જ્યારે કોઈ બે કે તેથી વધુ વ્યક્તિઓ કે સમૂહો વચ્ચે પરસ્પર લાભ અંગેની હરિફાઈ થતી હોય છે, જેવી કે વસ્તુની કિંમત નક્કી કરવાની સ્પર્ધા, બે મોટા ઉદ્યોગો પોતે ઉત્પાદિત કરેલ વસ્તુઓના વેચાણ માટેની સ્પર્ધા, નવા નવા કરારો મેળવવાની સ્પર્ધા, કોઈપણ ખેલ (ક્રિકેટ, હૉકી, ફૂટબોલ વગેરે)માં આગળ રહેવાની સ્પર્ધા, ચૂંટણી દરમિયાન બે કે વધારે રાજકીય પક્ષો વચ્ચે સ્પર્ધા વગેરે હરિફાઈમાં ટકી રહેવા જુદી જુદી વ્યૂહરચનાઓ અપનાવવી પડે છે. આવી વ્યૂહરચનાઓમાંથી કઈ વ્યૂહરચનાની પસંદગી કરવી ફાયદાકારક ગણાય. આવા નિર્ણયો લેવા માટે વિદ્યાર્થીઓને આ પ્રકરણ ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થશે.

17.1 પ્રસ્તાવના :

આધુનિક યુગમાં સ્પર્ધા કોઈપણ વ્યક્તિ, સંસ્થા કે પક્ષ માટે રોજબરોજના વ્યવહારોમાં બની રહે છે. આપણે એમ કહી શકીએ કે બે કે તેથી વધુ વ્યક્તિગત નિર્ણયો કોઈ ચોક્કસ સ્થિતિમાં લેવાય કે જેમાં રસપૂર્ણ સ્પર્ધા થતી હોય અને તેના પરિણામોમાં બંને જોડાયેલા પક્ષ દ્વારા નિર્ણય લેવાનો હોય ત્યારે સ્પર્ધાત્મક પરિણામ અસ્તિત્વમાં આવે છે. આ સ્પર્ધાત્મક પરિસ્થિતિને રમત કહે છે. રમત શબ્દ બે કે તેથી વધુ પક્ષો વચ્ચેની સ્પર્ધાનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

17.2 રમત સિદ્ધાંતનો અર્થ :

વ્યૂહાત્મક શબ્દ દર્શાવે છે કે દરેક સ્પર્ધક રમત દરમ્યાન એક ચોક્કસ સંપૂર્ણ આયોજનથી નક્કી કરેલ વ્યૂહોના ગણને દરેક રમત દરમ્યાન ભવિષ્યમાં થનારી શક્યતામાં તેનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો. દા.ત. સ્પર્ધક તેણે પસંદ કરેલ વ્યૂહોની યાદીમાંથી રમત દરમ્યાન રમતના નિયમ અનુસાર કોઈપણ વ્યૂહ લેવાનો નિર્ણય લઈ શકે છે.

આમ અમુક નિયમોને આધીન દરેક વ્યક્તિ વ્યૂહ અપનાવે છે અને આ વ્યૂહના અંતે કંઈક વળતર મેળવે છે. તેવા બે કે તેથી વધારે વ્યક્તિઓ વચ્ચે રમાતા ખેલને રમત કહે છે. આ રમતનો ખ્યાલ વધુ સ્પષ્ટ કરવા માટે કેટલીક વ્યાખ્યાઓ જોઈએ.

(i) રમત (Game) : રમવા માટેના નિશ્ચિત નિયમોના ગણને રમત કહી શકાય. અહીં રમત એ જુદી જુદી રીતે રમવા માટેની સંપૂર્ણ શ્રેણી દર્શાવે છે. (દા.ત. હોકીની રમત, ક્રિકેટની રમત, ટેનિસની રમત વગેરે)

(ii) દાવ અથવા ચાલ (Play) : ખેલાડી દ્વારા પસંદ કરાયેલ ક્રિયાને તે ખેલાડીની ચાલ કહે છે.

(iii) ખેલાડી (Player) : રમત કે સ્પર્ધામાં રોકાયેલી પ્રત્યેક વ્યક્તિને તે રમત માટેનો ખેલાડી કહે છે.

17.3 રમતના સિદ્ધાંતની ધારણાઓ :

(i) રમતમાં ખેલાડીઓની સંખ્યા પરિમિત હોય છે.

(ii) સ્પર્ધકો વચ્ચે સ્પર્ધા કરવાનો રસ હોય છે.

(iii) દરેક સ્પર્ધકને વ્યૂહ (દાવ) પસંદ કરવા માટે વ્યૂહોની સંખ્યા પરિમિત હોય છે. આ વ્યૂહોની યાદી સ્પર્ધક માટે જુદી જુદી હોઈ શકે, પરંતુ તે દરેક સ્પર્ધક જાણતો હોય છે.

(iv) દરેક ખેલાડી સ્વતંત્ર રીતે નિર્ણય લઈ શકે છે.

(v) દરેક સ્પર્ધક વ્યૂહ અપનાવે અથવા ચાલ ચાલે ત્યારે રમત શરૂ થઈ છે, એમ કહેવામાં આવે છે.

(vi) બધા જ દાવો એક સાથે ચાલવામાં આવે છે અને દરેક ખેલાડી બીજા ખેલાડી કયો દાવ રમશે તેનાથી અજાણ હોય છે.

(vii) તમામ વ્યૂહ પૂરા થયા બાદ (એટલે કે રમતના અંતે) દરેકને કંઈક વળતર મળે છે.

(viii) બધા જ સ્પર્ધક દ્વારા પસંદ કરાયેલ ક્રિયાને લાભકારક પરિણામો આવે છે.

17.4 રમતના પ્રકારો (Types of Games) :

(i) દ્વિવ્યક્તિ રમતો અને n-વ્યક્તિ રમતો :

દ્વિવ્યક્તિ રમતોમાં ખેલાડીઓ પાસે દરેક રમત માટે ઘણા બધા વ્યૂહો હોય છે. પરંતુ ખેલાડીઓ ફક્ત બે જ હોય છે અને જો બેથી વધુ ખેલાડીઓ હોય તો તેવી રમતને n-વ્યક્તિ રમત કહે છે.

(ii) શૂન્ય યોગ રમત :

શૂન્ય યોગ રમત એવી રમત છે કે દરેક ખેલાડીઓને મળતા વળતરનો સરવાળો શૂન્ય રહે છે. એટલે કે અમુક ખેલાડીઓ જે વળતર મેળવશે તેટલું જ વળતર બીજા ખેલાડીઓ ગુમાવશે. આવી રમતોને શૂન્ય યોગ રમત કહે છે.

(iii) દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્ય યોગ રમત (Two Person Zero Sum Game) :

જે રમતમાં ફક્ત બે વ્યક્તિઓ ભાગ લેતી હોય તે રમતને દ્વિ-વ્યક્તિ રમત કહે છે. જ્યાં કોઈ એક ખેલાડી જેટલી રકમ મેળવે તેટલી રકમ બીજો ખેલાડી ગુમાવે તો તેવી રમતને દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્યયોગ રમત કહે છે. તેને સમચોરસ રમત પણ કહે છે. કારણ કે તેના વળતર શ્રેણીક સમચોરસ આકારનો હોય છે. તેના કેટલાક લક્ષણો નીચે મુજબ છે.

(1) આ રમતમાં ફક્ત બે ખેલાડીઓ ભાગ લઈ શકે છે.

(2) દરેક ખેલાડી પરિમિત સંખ્યામાં વ્યૂહોનો ઉપયોગ કરી શકે છે.

(3) દરેક વ્યૂહના અંતે વળતર મળે છે.

(4) ખેલાડી A-ના વળતર અને ખેલાડી-Bના વળતરનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે. એટલે કે $a_{i_j} + b_{i_j} = 0$ થાય છે.

17.5 વળતર શ્રેણિક (Payoff Matrix) :

દરેક રમતના અંતે સ્પર્ધક (ખેલાડી) કંઈક મેળવે છે. હવે તે દરેક ચાલના અંતે જે મેળવે છે તેવા માપને વળતર શ્રેણિક કહેવામાં આવે છે.

જો ખેલાડી-Aની પાસે m વ્યૂહો અને ખેલાડી-Bની પાસે n વ્યૂહો હોય તો ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક મેળવવા માટેના પગથિયાં લઈશું.

(i) દરેક શ્રેણિકની હારની સંજ્ઞાઓ ખેલાડી-Aના વ્યૂહો દર્શાવે છે.

(ii) દરેક શ્રેણિકની સ્તંભની સંજ્ઞાઓ ખેલાડી-Bના વ્યૂહો દર્શાવે છે.

(iii) દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્યયોગ રમતમાં ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિકના ઘટકોના ચિહ્ન બદલવાથી Bનો વળતર શ્રેણિક મળે છે. એટલે કે જો ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક a_{i_j} હોય તો ખેલાડી-Bનો વળતર શ્રેણિક $-a_{i_j}$ મળે છે.

ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી-B

ખેલાડી-A

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ .. \\ . \\ a_i \\ .. \\ a_m \end{array} &
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
 & & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

આજ રીતે ખેલાડી-Bનો વળતર શ્રેણિક $b_{i_j} = -a_{i_j}$ હોય છે.

17.6 રમતના સિદ્ધાંતની મર્યાદાઓ :

(1) આ રમતના સિદ્ધાંતમાં જોખમ અને અનિશ્ચિતતાની ગણતરી થતી નથી.

(2) રમતમાં સ્પર્ધકોની સંખ્યા નક્કી હોય છે. પરંતુ ખરેખર એવું બનતું નથી. બજારમાં ઘણા બધા સ્પર્ધકો હોય છે.

(3) દરેક સ્પર્ધકના વ્યૂહ (દાવ)ની સંખ્યા પરિમિત હોય છે, એવી ધારણા કરવામાં આવે છે. પરંતુ જુદી-જુદી પરિસ્થિતિમાં તે અનંત હોઈ શકે છે.

(4) શૂન્યયોગ રમત એ વાસ્તવિક નથી.

(5) વળતર શ્રેણિકની અગાઉથી જાણકારી હોવી એ પણ વાસ્તવિક નથી.

(6) એક સ્પર્ધકની વ્યૂહોની યાદી બીજો સ્પર્ધક જાણતો હોય એવી ધારણા કરવામાં આવે છે. પરંતુ તેવું શક્ય ન પણ બને.

(7) બજારમાં માંગની પરિસ્થિતિ બદલાય છે. તેને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતી નથી.

17.7 રમતની સમસ્યાના વ્યૂહો :

રમતની સમસ્યામાં બે પ્રકારના વ્યૂહોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. (1) સાદો વ્યૂહ (2) મિશ્ર વ્યૂહ

(1) સાદો વ્યૂહ :

જો ખેલાડી A કોઈ ચોક્કસ i મો વ્યૂહ સંભાવના 1 સાથે પસંદ કરે અને બાકીના વ્યૂહની સંભાવના શૂન્ય (0) તો i મો વ્યૂહ ખેલાડી A માટે સાદો વ્યૂહ બને છે. આવા સાદા વ્યૂહ માટે ગુરૂ-લઘુ કે લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત દ્વારા પલાણ્ય બિંદુવાળી રમતોનો પલાણ્ય બિંદુ દ્વારા ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

(2) મિશ્ર વ્યૂહ :

ધારો કે ખેલાડી A અને ખેલાડી B માટે અનુક્રમે m અને n વ્યૂહો ઉપલબ્ધ છે. હવે ખેલાડી A, i મો વ્યૂહ પસંદ કરે તેની સંભાવના P_i છે. એમ ધારો જ્યાં $i = 1, 2 .... m$ છે અને તેથી સંભાવના $P_1, P_2 .... P_m$ અને $\Sigma P_i = 1$ થાય. આમ ખેલાડી A જુદા જુદા વ્યૂહો જુદી જુદી સંભાવના સાથે પસંદ કરે છે. આવા વ્યૂહોને મિશ્ર વ્યૂહો કહે છે.

તેવી જ રીતે ખેલાડી B, j મો વ્યૂહ P_j સંભાવના સાથે પસંદ કરે છે. જ્યાં $j = 1, 2, ... n$ છે. તેથી સંભાવના $q_1, q_2, ... q_n$ અને $\Sigma q_j = 1$ થાય. આમ ખેલાડી B જુદા જુદા વ્યૂહો જુદી જુદી સંભાવના સાથે પસંદ કરે તેને ખેલાડી Bનો મિશ્ર વ્યૂહ કહે છે.

આમ ખેલાડી A અને ખેલાડી B જુદા જદા એક કે તેથી વધુ વ્યૂહો જુદી જુદી સંભાવનાઓ સાથે પસંદ કરી રમત રમે તેવા વ્યૂહોને મિશ્ર વ્યૂહ કહેવામાં આવે છે.

17.8 ગુરૂ-લઘુ અને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત (Maxi-Min and Mini-Max Principle) :

આ સિદ્ધાંતમાં બે ખેલાડીઓ દ્વારા ઈષ્ટતમ વ્યૂહ પસંદ કરી તેનો ઉપયોગ કરે છે. ધારો કે ખેલાડી A અને ખેલાડી B છે. ખેલાડી A, ખેલાડી Bના કોઈપણ વ્યૂહ માટે પોતાને મળતા ન્યૂનતમ વળતરને મહત્તમ બનાવે તે રીતે ખેલાડી A પોતાનો વ્યૂહ અપનાવે છે. તો આવા સિદ્ધાંતને ગુરૂ-લઘુ સિદ્ધાંત કહે છે.

બીજી તરફ ખેલાડી B, ખેલાડી Aના કોઈપણ વ્યૂહને લીધે થતાં મહત્તમ નુકસાનને ન્યૂનતમ બનાવે તેવા વ્યૂહ ખેલાડી B અપનાવે છે. તો આવા સિદ્ધાંતને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત કહે છે.

આમ, જો A નો વળતર શ્રેણિક A = a_{i_j} હોય તો ગુરૂ-લઘુ સિદ્ધાંત મુજબ ખેલાડી A ન્યૂનતમ a_{i_j} ને મહત્તમ બનાવે તેવો વ્યૂહ પસંદ કરશે. જ્યારે લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત અનુસાર ખેલાડી B મહત્તમ a_{i_j} ને લઘુત્તમ બનાવે તેવો વ્યૂહ અપનાવશે.

દા.ત. ખેલાડી Aનો વળતર શ્રેણિક નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. તે પરથી ગુરૂ-લઘુ અને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત મુજબ બંને ખેલાડીઓના વ્યૂહ નક્કી કરો.

ખેલાડી A નો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \\ 2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ :

ખેલાડી B

		B_1	B_2	B_3	હારમાં ન્યૂનતમ
ખેલાડી A	A_1	3	4	1	1
	A_2	0	–6	–4	–6
	A_3	2	8	–1	–1
સ્તંભમાં મહત્તમ		3	8	1	

અહીં દરેક હાર માટે ન્યૂનતમ (લઘુત્તમ) ઘટક 1, –6, –1 છે. તેમાં મહત્તમ 1 છે. જે પ્રથમ હારને આનુષંગિક છે. આથી ગુરૂ-લઘુ સિદ્ધાંત મુજબ ખેલાડી A પ્રથમ વ્યૂહ (A_1) અપનાવશે.

જ્યારે દરેક સ્તંભમાં મહત્તમ ઘટકો 3, 8, 1 છે. તેમાં ન્યૂનતમ ઘટક 1 છે. જે ત્રીજા સ્તંભને આનુષંગિક છે. તેથી લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત અનુસાર ખેલાડી B ત્રીજો વ્યૂહ (B_3) અપનાવશે.

17.9 પલાણ્ય બિંદુ અથવા જીન બિંદુ (Saddle Point) :

દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્યયોગ રમતના વળતર શ્રેણિકમાં જે સ્થાન ઉપરનો ઘટક તેની હારમાં ન્યૂનતમ હોય અને તેના સ્તંભમાં મહત્તમ હોય તે સ્થાન બિંદુને પલાણ્યબિંદુ કહે છે. પલાણ્ય બિંદુ ઉપરના ઘટકને રમતની કિંમત કહે છે.

ધારો કે ગુરૂ-લઘુ (a_{i_j}) = લઘુ-ગુરૂ $(a_{i_j}) = a_{r_s}$ હોય તો (r, s) રમતનું પલાણ્ય બિંદુ છે અને a_{r_s} રમતની કિંમત છે અને તેને v વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

17.9.1 પલાણ્ય બિંદુના લક્ષણો :

(i) જો રમતને પલાણ્ય બિંદુ હોય તો દરેક ખેલાડીનો શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ અને રમતની કિંમત આપે છે અને તેને રમતનો ઉકેલ કહેવામાં આવે છે.

(ii) દ્વિ-વ્યક્તિ શૂન્યયોગ રમતમાં એક કરતાં વધારે પલાણ્ય બિંદુઓ હોઈ શકે, પરંતુ રમતની કિંમત એક સરખી રહે છે.

(iii) રમતને પલાણ્ય બિંદુ હોય જ એવું જરૂરી નથી.

(iv) જો રમત સમતોલ હોય તો ગુરૂ-લઘુની કિંમત = લઘુ-ગુરૂની કિંમત = 0 થાય છે.

(v) જો રમત નિર્ણયાત્મક (Determinables) હોય તો લઘુ-ગુરૂ $(a_{i_j}) \le v \le$ ગુરૂ-લઘુ (a_{i_j}) થાય છે.

17.9.2 પલાણ્ય બિંદુ શોધવાની રીત :

પલાણ્ય બિંદુ શોધવા માટે નીચે મુજબ પગથિયાને અનુસરવામાં આવે છે. આ રીતે ગુરૂ-લઘુ કે લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત મુજબ રમતનો ઉકેલ આપે છે.

પગથિયું-1 : ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિકમાં દરેક હારમાં ન્યૂનતમ ઘટક પસંદ કરો અને તેની ફરતે વર્તુળ ○ કરો.

પગથિયું-2 : ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિકમાં દરેક સ્તંભમાં મહત્તમ ઘટક પસંદ કરો અને તેના પર ચોરસ $\square$ દોરો.

પગથિયું-3 : જે ઘટક પર વર્તુળ અને ચોરસ $\boxed{O}$ એક બીજા પર આવે તે ઘટકનું સ્થાનબિંદુ પલાણ્ય બિંદુ છે અને તે ઘટક રમતની કિંમત આપે છે. આ રમતની કિંમતને v વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

17.9.3 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

નીચે આપેલ રમતનું પલાણ્ય બિંદુ અને રમતની કિંમત મેળવો.

ખેલાડી B

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} -3 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right] \end{array}$$

ઉકેલ :

આ રમતનો ઉકેલ મેળવવા માટે સૌપ્રથમ આપણે પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયા અનુસરીશું.

ખેલાડી B

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} -3 & 0 & 1 & \boxed{7} \\ \boxed{4} & 3 & \boxed{2} & 6 \\ -3 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & \boxed{4} & -4 & -2 \end{array}\right] \end{array}$$

સમજૂતી :

પગથિયું-1 મુજબ સૌપ્રથમ દરેક હારમાં સૌથી નાની કિંમત ઉપર વર્તુળ ○ દોરવું. જે અહીં આપણે દરેક હારમાં અનુક્રમે –3, 2, –3 અને –4 પર દોરેલ છે.

નોંધ : ત્રીજી હારમાં –3, –2 અને 5 છે. તેમાં સૌથી નાની કિંમત –3 છે. તે જ રીતે ચોથી હારમાં –4 અને –2 માં –4 નાની કિંમત ગણાય.

પગથિયાં-2 મુજબ દરેક સ્તંભમાં સૌથી મોટી કિંમત ઉપર ચોરસ $\boxed{}$ દોરવું. અહીં દરેક સ્તંભમાં અનુક્રમે 4, 4, 2 અને 7 ઉપર દોરેલ છે.

પગથિયાં-3 મુજબ જે ઘટક પર વર્તુળ અને ચોરસ આવે $\boxed{O}$ તે ઘટકનું સ્થાનબિંદુ પલાણ્ય બિંદુ છે. માટે અહીં પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_3) છે અને તે ઘટકની રમતની કિંમત છે. માટે અહીં રમતની કિંમત $v = 2$ છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_3) રમતની કિંમત $v = 2$

ઉદાહરણ-2 : નીચેની રમતનો ઉકેલ મેળવો.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{ખેલાડી B} \\
 & & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -7 & -8 & -3 \\ -6 & 22 & -9 \\ -2 & 17 & -2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

ઉકેલ :

આ રમતનો ઉકેલ મેળવવા માટે પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયા અનુસરીશું.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{ખેલાડી B} \\
 & & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -7 & -8 & -3 \\ -6 & \boxed{22} & -9 \\ \boxed{-2} & 17 & \boxed{-2} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

સમજૂતી :

આ રમતમાં દરેક હારમાં સૌથી નાની કિંમત પર વર્તુળ ○ દોરેલ છે, જે અહીં અનુક્રમે –8, –9 અને –2, –2 પર છે. નોંધ એક સરખી બે કે વધારે કિંમતો હોય તો બધી જ કિંમત પર ○ કે $\square$ દોરો.

ત્યારબાદ દરેક સ્તંભમાં સૌથી મોટી કિંમત પર ચોરસ $\square$ દોરેલ છે, જે અહીં અનુક્રમે –2, 22 અને –2 છે.

નોંધ : પ્રથમ સ્તંભમાં –7, –6 અને –2 છે. જેમાં –2 મોટી રકમ છે જે ધ્યાન રાખવું.

જે ઘટક પર $\boxed{O}$ હોય તે ઘટકનું સ્થાન બિંદુ પલાણ્ય બિંદુ બને છે અને તે ઘટકની કિંમત રમતની કિંમત છે. અહીં બે ઘટક પર $\boxed{O}$ છે. માટે બે પલાણ્ય બિંદુઓ મળશે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_3, B_1) અને (A_3, B_3) છે.

જ્યારે રમતની કિંમત $v = -2$ છે.

ઉદાહરણ-3 :

નીચે આપેલ શ્રેણીક ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણીક દર્શાવે છે. તેના ઉપરથી પલાણ્ય બિંદુ શોધી રમતની કિંમત મેળવો.

ખેલાડી Aનો વળતર શ્રેણીક

ખેલાડી B

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
\text{ખેલાડી A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 40 & 20 & 10 & 50 \\ -40 & -30 & 0 & 60 \\ 50 & 10 & -50 & -60 \end{array}\right]
\end{array}
$$

ઉકેલ :

પલાણ્ય બિંદુના પગથિયા અનુસરતાં;

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
\text{ખેલાડી A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 40 & 20 & \boxed{10} & 50 \\ -40 & \boxed{-30} & 0 & \boxed{60} \\ \boxed{50} & 10 & -50 & -60 \end{array}\right]
\end{array}
$$

સમજૂતી :

અહીં દરેક હારમાં નાની કિંમત પર $\bigcirc$ અને દરેક સ્તંભની મોટી કિંમત પર $\square$ દોરેલ છે. જે ઘટક પર $\boxed{O}$ આવે તેનું સ્થાનબિંદુ પલાણ્ય બિંદુ છે અને તે ઘટક રમતની કિંમત દર્શાવે છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_1, B_3)

રમતની કિંમત $v = 10$

ઉદાહરણ-4 : નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી-A	**ખેલાડી-B**	
	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$
A_1	–10	0
A_2	0	5

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુના પગથિયા અનુસરીશું.

ખેલાડી-A	**ખેલાડી-B**	
	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$
A_1	–10	0
A_2	$\boxed{0}$	$\boxed{5}$

સમજૂતિ : હારમાં અનુક્રમે –10 અને 0 નાની કિંમતો છે. તેના ઉપર ○ કરેલ છે. જ્યારે સ્તંભમાં અનુક્રમે 0 (શૂન્ય) અને 5 મોટી કિંમતો છે તેના ઉપર □ દોરેલ છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_1)

રમતની કિંમત $v = 0$

અહીં $v = 0$ છે, માટે રમત સમતોલ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-5 : નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી-A	**ખેલાડી-B**				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	3	2	4	2
A_2	2	4	3	8	4
A_3	5	6	3	7	8
A_4	6	7	9	8	7
A_5	4	2	8	4	3

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયા મુજબ;

ખેલાડી-A	**ખેલાડી-B**				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	3	2	4	2
A_2	2	4	3	$\boxed{8}$	4
A_3	5	6	3	7	$\boxed{8}$
A_4	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$	7
A_5	4	2	8	4	3

સમજૂતી :

હારમાં અનુક્રમે 2, 2, 3, 6 અને 2 નાની કિંમતો છે. તેના ઉપર ○ કરેલ છે. જ્યારે સ્તંભમાં અનુક્રમે 6, 7, 9, 8 અને 8 છે. જેના ઉપર □ દોરેલ છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (A_4, B_1)

રમતની કિંમત $v = 6$

ઉદાહરણ-6 : નીચેની રમતની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવો.

$$\begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{\text{ખેલાડી-B}} \\ & & P & Q \\ & a & & \\ \text{ખેલાડી-A} & b & & \\ & c & & \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \\ & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -8 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ખેલાડી-A: હાર a, b, c; ખેલાડી-B: સ્તંભ P, Q)

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયાં મુજબ;

ખેલાડી-B

$$\text{ખેલાડી-A} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -8 & 6 \\ \boxed{5} & \boxed{8} \end{bmatrix} \end{array}$$

સમજૂતી :

દરેક હારમાં સૌથી નાની કિંમતો અનુક્રમે –6, –8 અને 5 છે. જ્યારે દરેક સ્તંભમાં સૌથી મોટી કિંમતો 5 અને 8 છે.

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (C, P)

રમતની કિંમત $v = 5$

ઉદાહરણ-7 :

નીચે આપેલ ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિક ઉપરથી પલાણ્ય બિંદુની રીતનો ઉપયોગ કરી રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} I & II & III \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} & \begin{bmatrix} -3 & 16 & -3 \\ -6 & -7 & -5 \\ -4 & 21 & -9 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુની રીતના પગથિયા મુજબ;

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{ખેલાડી B} \\
 & \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\
\text{ખેલાડી A} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} &
\begin{bmatrix} \boxed{-3} & 16 & \boxed{-3} \\ -6 & -7 & -5 \\ -4 & \boxed{21} & -9 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુઓ (I, I) અને (I, III) છે. જ્યારે રમતની કિંમત $v = -3$ છે.

ઉદાહરણ-8 :

નીચેની રમતનો ઉકેલ મેળવો અને કેવા પ્રકારની છે તે જણાવો.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{ખેલાડી B} \\
 & \begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \end{array} \\
\text{ખેલાડી A} \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} &
\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુની રીતના પગથિયા મુજબ

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{ખેલાડી B} \\
 & \begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \end{array} \\
\text{ખેલાડી A} \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} &
\begin{bmatrix} -2 & 0 & \boxed{0} & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & \boxed{0} & \boxed{6} \\ \boxed{5} & \boxed{3} & -4 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

જવાબ :

પલાણ્ય બિંદુ (R, Y) રમતની કિંમત $v = 0$

અહીં રમતની કિંમત 0 (શૂન્ય) થતી હોવાથી આ રમત સમતોલ રમત છે. એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-9 : નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી-A નો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી B

$$
\text{ખેલાડી A} \quad
\begin{array}{c}
\\ A_1 \\ A_2 \\ A_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુ મેળવવાના પગથિયાને અનુસરતાં;

ખેલાડી B

$$
\text{ખેલાડી A} \quad
\begin{array}{c}
\\ A_1 \\ A_2 \\ A_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & \boxed{2} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

સમજૂતી :

અહીં હારમાં નાનામાં નાની કિંમત અનુક્રમે 1, –4 અને 1 છે, જેના પર ○ કરેલ છે. જ્યારે સ્તંભમાં મોટામાં મોટી કિંમત અનુક્રમે 2, 2 અને 2 છે, જેના પર $\boxed{}$ દોરેલ છે. પરંતુ અહીં કોઈ એક ઘટક પર વર્તુળ અને ચોરસ $\boxed{O}$ આવતું નથી તેથી આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ નથી. આવી રમતનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતોના ઉકેલની રીતોથી મેળવી શકાય છે. તેથી હવે આપણે પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતોનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવી શકાય છે, તેનો અભ્યાસ કરીશું.

17.10 પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતો મેળવવાની રીતો :

જ્યારે રમતના પ્રશ્નમાં પલાણ્ય બિંદુવાળી રમત દ્વારા ઉકેલ મળતો ન હોય એટલે કે રમતને પલાણ્ય બિંદુ ન હોય ત્યારે પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતનો ઉકેલ જુદી જુદી રીતો દ્વારા મેળવી શકાય છે અને તેમાં મિશ્ર વ્યૂહનો ઉપયોગ થાય છે.

પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતો (મિશ્ર વ્યૂહવાળી રમતો)નો ઉકેલ મેળવવાની જુદી જુદી રીતો નીચે મુજબ છે.

(1) બીજગણિતની રીત

(2) આલેખની રીત

(3) સુરેખ આયોજનની રીત

17.10.1 બીજગણિતની રીત :

આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત એક જ રીત બીજગણિતની રીતની મદદથી રમતના સિદ્ધાંતનો ઉકેલ મેળવતા શીખવાનું છે. આ રીતની સૌથી મોટી મર્યાદા એ છે કે આ રીત દ્વારા ફક્ત 2×2 ક્રમની રમત હોય ત્યારે જ ઉકેલ મેળવી શકાય છે. તેથી આપણે રમતના કદ ઘટાડવા માટેના સરસાઈના સિદ્ધાંતનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

બીજગણિતની રીતમાં બે રીતે ઉકેલ મળે છે જે બંને રીતો આપણે જોઈશું.

(A) ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B જુદા જુદા વ્યૂહો દ્વારા સંભાવનાની કિંમતો મેળવી રમતનો ઉકેલ મેળવવા માટે આ રીતનો ઉપયોગ કરે છે.

ધારો કે પલાણ્ય બિંદુ વગરની 2×2 શૂન્યયોગ રમત માટે ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક નીચે મુજબ છે.

$$\text{ખેલાડી B} \longrightarrow$$

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

આ રમતના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહો $S_A = \{P_1, P_2\}$ અને $S_B = \{q_1, q_2\}$ છે.

જ્યાં, $P_1 = \dfrac{d-c}{(a+d)-(b+c)}$

અને $P_1 + P_2 = 1$ થાય છે. તેથી $P_2 = 1 - P_1$ થશે.

$q_1 = \dfrac{d-b}{(a+b)-(b+c)}$

અને $q_1 + q_2 = 1$ તેથી $q_2 = 1 - q_1$ થશે. તેમજ
રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}$$

આ સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી રમતની કિંમત મેળવી શકાય છે.

અથવા

(B) નીચે આપેલ પગથિયાં દ્વારા પણ પલાણ્ય વગરની રમતનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

પગથિયાં :

(1) પ્રથમ હારની સામે બીજી હારના ઘટકોનો ઘન તફાવત શોધી લખો.

(2) બીજી હારની સામે પ્રથમ હારના ઘટકોનો ઘન તફાવત શોધો અને લખો.

(3) પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન ધફાવત લખો.

(4) બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત લખો.

(5) હારો અથવા સ્તંભોના તફાવતોનો સરવાળો કરો.

(6) ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહો માટે હારો સામેના તફાવતોને, તેમના સરવાળા વડે ભાગવાથી મળશે.

(7) ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહો માટે સ્તંભો સામેના તફાવતોને, તેમના સરવાળા વડે ભાગવાથી મળશે.

(8) રમતની કિંમત $v = \dfrac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$ સૂત્રની મદદથી મળશે.

17.10.2 સરસાઈનો સિદ્ધાંત (Principle of Dominance) :

આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ રમતનું કદ ઘટાડવા માટે થાય છે. કેટલીક વખત આપણે અવલોકન દ્વારા જાણી શકીએ છીએ કે કોઈપણ ખેલાડીઓના કોઈ એક વ્યૂહ દ્વારા મળતા વળતર પર બીજા વ્યૂહ દ્વારા મળતા વળતર ઉપર પ્રભુત્વ મેળવે છે. આવા પ્રભુત્વવાળા વ્યૂહને ચાલુ રાખી બીજા વ્યૂહને ખેલાડી દૂર કરશે. આમ વળતર શ્રેણિકનું કદ ઘટાડશે. ખેલાડીના આવા નિર્ણયને સરસાઈનો સિદ્ધાંત કહે છે. આપણે આ સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને વળતર શ્રેણિકનું કદ ઘટાડીશું.

સરસાઈના સિદ્ધાંતના સામાન્ય નિયમો નીચે મુજબ છે.

ધારો કે, ખેલાડી-A પાસે m વ્યૂહો છે અને ખેલાડી-B પાસે n વ્યૂહો છે. આમ, આ રમત $m \times n$ કદની છે. ખેલાડી-Aના વ્યૂહોને હારોમાં અને ખેલાડી-Bના વ્યૂહોને સ્તંભોમાં દર્શાવવામાં આવે છે.

(1) જો કોઈ એક હારના તમામ ઘટકો અન્ય કોઈ હારના તમામ અનુવર્તી ઘટકો કરતાં ઓછા અથવા તેમના જેટલા હોય તો આવી પ્રભાવી હાર (dominated row) કહેવાય છે અને તેને દૂર કરી શકાય છે. એટલે કે બે હારોની સરખામણી કરતાં કોઈ એક હારના ઘટકો બીજી હારના ઘટકો કરતાં નાના કે સમાન હોય તો મોટા ઘટકોવાળી હાર પર સરસાઈ મેળવે છે તેથી નાના ઘટકોવાળી હારને દૂર કરવામાં આવે છે.

(2) જો કોઈ એક સ્તંભના તમામ ઘટકો અન્ય કોઈ સ્તંભના તમામ અનુવર્તી ઘટકો કરતાં વધુ અથવા તેમના જેટલા હોય તો આવો સ્તંભ પ્રભાવી સ્તંભ (dominated column) કહેવાય છે અને તેને દૂર કરી શકાય છે. એટલે કે બે સ્તંભોની સરખામણી કરતાં કોઈ એક સ્તંભના ઘટકો બીજા સ્તંભના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા કે સમાન હોય તો નાના ઘટકોવાળો સ્તંભ મોટા ઘટકોવાળા સ્તંભ પર સરસાઈ મેળવે છે. તેથી મોટા ઘટકોવાળા સ્તંભને દૂર કરવામાં આવે છે.

(3) જો કોઈ હાર કે સ્તંભને અન્ય કેટલીક હારો કે સ્તંભોનું રૈખીય જોડાણ (સંયોજન) કરવાથી કોઈ એક હાર કે સ્તંભ પર સરસાઈ મેળવે તો તેવી હાર કે સ્તંભને દૂર કરવામાં આવે છે.

(4) આમ, વળતર શ્રેણિકનું કદ ઘટે છે અને જે હાર કે સ્તંભ રદ (દૂર) કરવામાં આવે છે. તેની આનુષંગિક સંભાવના શૂન્ય (0) લેવામાં આવે છે.

17.10.3 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-10 : નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

$$\begin{array}{cc} & \text{ખેલાડી B} \\ & \begin{array}{ccc} & B_1 & B_2 \\ \text{ખેલાડી A} \quad A_1 & & \\ A_2 & & \end{array} \end{array}$$

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉકેલ :

જો આ રમત પલાણ્ય બિંદુવાળી છે કે પલાણ્ય બિંદુ વગરની છે એમ કહેવામાં આવ્યું નથી તેથી આપણે આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ છે કે નહીં તે જોઈશું.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{7} & 3 \\ 5 & \boxed{6} \end{bmatrix} \end{array}$$

આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ નથી તેથી પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતને બીજગણિતીય રીતે ઉકેલ મેળવીશું. આ રમતનો ઉકેલ મેળવવાની બે પદ્ધતિ છે. આપણે બંને જોઈશું પછી તમને જે યોગ્ય લાગે તે પદ્ધતિથી તમે ગણતરી કરી શકો છો.

રીત-1 : આ રીતમાં આપણે સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી રમતનો ઉકેલ મેળવીશું.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{કરતાં}$$

$\therefore\ a = 7,\ b = 3,\ c = 5$ અને $d = 6$ થશે.

$$P_1 = \frac{d-c}{(a+b)-(b+c)}$$

$$\therefore\ P_1 = \frac{6-5}{(7+6)-(3+5)} = \frac{1}{13-8} = \frac{1}{5}$$

તેથી $P_2 = 1 - P_1$

$$\therefore\ P_2 = 1 - \tfrac{1}{5} = \frac{5-1}{5} = \tfrac{4}{5}$$

$$q_1 = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}$$

$$\therefore\ q_1 = \frac{6-3}{(7+6)-(3+5)} = \frac{3}{13-8} = \frac{3}{5}$$

તેથી $q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = {}^{2}\!/_{5}$

રમતની કિંમત $v = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}$

$$\therefore\ v = \frac{(7 \times 6)-(3 \times 5)}{(7+6)-(3+5)}$$

$$= \frac{42-15}{13-8}$$

$$= \frac{27}{5} = 5.4$$

ખેલાડી-Aનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ

જવાબ : $S_A = \left\{ {}^{1}\!/_{5}, {}^{4}\!/_{5} \right\}$

ખેલાડી-Bનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ $S_B = \left\{ {}^{3}\!/_{5}, {}^{2}\!/_{5} \right\}$

રમતની કિંમત $v = 5.4$

રીત-2 :

આ રીતમાં તફાવતો દ્વારા રમતનો ઉકેલ મેળવીશું.

$$\begin{array}{ccccc} & & \multicolumn{2}{c}{\text{ખેલાડી-B}} & \\ & & B_1 & B_2 & \text{તફાવત} \\ \text{ખેલાડી-A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} 7 & 3 \\ 5 & 6 \end{array}\right]} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \\ & \text{તફાવત} & 3 & 2 & \boxed{5} \end{array}$$

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ધન તફાવત લખો. એટલે કે $5 - 6 = -1$ થાય છે. પરંતુ આપણે 1 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજી હારની સામે પ્રથમ હારનો ધન તફાવત $(7 - 3 = 4)$ લખેલ છે.

પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત (3 – 6 = –3 થાય છે પરંતુ (ઘન) + 3) લખેલ છે. તે જ રીતે બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત (7 – 5 = 2) લખેલ છે.

પછી હાર કે સ્તંભનો સરવાળો $\boxed{5}$ લખેલ છે.

હવે ખેલાડી-A નો ઈષ્ટતમ ઉકેલ માટે હારની સામેની કિંમતને સરવાળા વડે ભાગતાં મળે છે. તે જ રીતે ખેલાડી-Bનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ માટે સ્તંભની નીચેની કિંમતને સરવાળા વડે ભાગતાં મળે છે.

જવાબ :

ખેલાડી-Aનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ $S_A = \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

ખેલાડી-Bનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ $S_B = \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right\}$

રમતની કિંમત $v = \dfrac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$

$$= \frac{(7 \times 6) - (3 \times 5)}{(7 + 6) - (3 + 5)}$$

$$= \frac{42 - 15}{13 - 8} = \frac{27}{5} = 4.5$$

તમે બેમાંથી કોઈપણ એક રીતનો ઉપયોગ કરી દાખલો ગણી શકો છો.

ઉદાહરણ-11 :

નીચે આપેલ રમતનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતના ઉકેલ દ્વારા મેળવો.

$$\text{ખેલાડી-B}$$

$$\text{ખેલાડી-A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉકેલ : આ રમતનો ઉકેલ તફાવતવાળી રીતે મેળવીશું.

$$\text{ખેલાડી-B}$$

$$\text{ખેલાડી-A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \text{તફાવત} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} 5 & 11 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{તફાવત} \\ 4 \\ 12 \\ \boxed{16} \end{array}$$

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ઘન તફાવત = (–3) – (–1) = –3 –1 = –4 પરંતુ (ઘન તફાવત) = 4 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજી હાર સામે પ્રથમ હારનો ઘન તફાવત = (8) – (–4) = 8 + 4 = 12 લખેલ છે. પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત = (–4) – (–1) = –4 –1 = –5 પરંતુ 5 લખેલ છે. બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત = (8) – (–3) = 8 + 3 = 11 લખેલ છે. અહીં સરવાળો 16 થાય છે.

હવે ખેલાડી-A અને Bના ઈષ્ટતમ વ્યૂહો માટે જે તે હાર કે સ્તંભ સામેની કિંમતને સરવાળા વડે ભાગતાં;

જવાબ :

ખેલાડી-Aનો ઈષ્ટતમ વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{4}{16}, \frac{12}{16}\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$ છે.

ખેલાડી-Bનો ઈષ્ટતમ વ્યૂહ $S_B = \left\{\frac{5}{16}, \frac{11}{16}\right\}$ છે.

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$$

$$= \frac{(8 \times 1) - (-4 \times -3)}{(8 + 1) - (-4 - 3)}$$

$$= \frac{8 - 12}{9 + 7}$$

$$= \frac{-4}{16}$$

$$= -\frac{1}{4} = -0.25$$

ઉદાહરણ-12 :

નીચેની રમતનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમત દ્વારા મેળવો.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{ખેલાડી B} \\ & & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉકેલ :

આ રમત 3×3 ક્રમની છે. તેથી સૌપ્રથમ આ રમતને 2×2 ક્રમની બનાવવા માટે સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરવો પડશે. સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ અહીં બીજી હારના તમામ ઘટકો ત્રીજી હારના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના કે સમાન છે. આથી બીજી હાર દૂર કરવામાં આવે છે. માટે નીચે પ્રમાણે શ્રેણિક મળશે.

$$\text{ખેલાડી } B$$

$$\text{ખેલાડી } A \quad \begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & -4 & 6 & 3 \\ A_3 & 2 & -3 & 4 \end{array}$$

હવે ત્રીજી સ્તંભના ઘટકો પ્રથમ સ્તંભના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે. તેથી ત્રીજો સ્તંભ દૂર કરવામાં આવે છે. તેથી નવો શ્રેણિક નીચે મુજબ મળશે.

$$\text{ખેલાડી } B$$

$$\text{ખેલાડી } A \quad \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & -4 & 6 \\ A_3 & 2 & -3 \end{array}$$

હવે આ શ્રેણિક 2×2 ક્રમનો છે તેથી બીજગણિતીય રીતે ઉકેલ મળશે.

$$\text{ખેલાડી-}B$$

$$\text{ખેલાડી-}A \quad \begin{array}{c|cc|c} & B_1 & B_2 & \text{તફાવત} \\ \hline A_1 & -4 & 6 & 5 \\ A_2 & 2 & -3 & 10 \\ \hline \text{તફાવત} & 9 & 6 & \boxed{15} \end{array}$$

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ઘન તફાવત $= (2) - (-3) = 2 + 3 = 5$ લખેલ છે. તે જ રીતે બીજી હારની સામે પ્રથમ હારનો ઘન તફાવત $= -4 -6 = -10$ માટે 10 લખેલ છે. પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત $= (6) - (-3) = 6 + 3 = 9$ અને બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત $= -4 -2 = -6 = 6$ લખેલ છે. તફાવતનો સરવાળો 15 છે.

જવાબ :

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{5}{15}, \frac{10}{15}, 0\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{\frac{9}{15}, 0, \frac{6}{15}\right\} = \left\{\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right\}$

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$$

$$= \frac{(-4 \times -3) - (6 \times -2)}{(-4 - 3) - (6 + 2)}$$

$$= \frac{12 - 12}{-7 - 8}$$

$$= \frac{0}{-15} = 0$$

ઉદાહરણ-13 : નીચેની રમતનો ઉકેલ મેળવો.

$$\begin{array}{cc} & \text{ખેલાડી B} \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{ખેલાડી A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 40 & -80 \\ 0 & 15 & -20 \\ 90 & 20 & 50 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉકેલ :

દાખલામાં કઈ રીતે ઉકેલ મેળવવો તે સ્પષ્ટ ન હોય ત્યારે સૌપ્રથમ પલાણ્ય બિંદુ છે કે નહિ તે ચેક કરવું. તે મુજબ હારમાં નાની કિંમત પર ○ અને સ્તંભની મોટી કિંમત પર $\boxed{}$ કરતાં.

$$\begin{array}{cc} & \text{ખેલાડી B} \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{ખેલાડી A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & \boxed{40} & -80 \\ 0 & 15 & -20 \\ \boxed{90} & 20 & \boxed{50} \end{bmatrix} \end{array}$$

અહીં કોઈ ઘટક પર $\boxed{O}$ આવતું નથી તેથી આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ નથી તેથી પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમત દ્વારા ઉકેલ મેળવવો પડશે.

આ રમત 3×3 ક્રમની છે, તેને 2×2 ક્રમની બનાવવા માટે સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરવો પડશે.

સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ બીજી હારના ઘટકો ત્રીજી હારના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના હોવાથી ત્રીજી હાર બીજી પર સરસાઈ મેળવે છે. $\therefore$ બીજી હાર દૂર કરીશું.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 40 & -80 \\ 90 & 20 & 50 \end{bmatrix} \end{array}$$

પ્રથમ સ્તંભના ઘટકો ત્રીજા સ્તંભના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા હોવાથી, ત્રીજો સ્તંભ પ્રથમ સ્તંભ પર સરસાઈ મેળવે છે માટે પ્રથમ સ્તંભ દૂર કરીશું.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & -80 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \end{array}$$

અહીં રમત 2×2 ક્રમની થાય છે તેથી બીજગણિતીય રીતે ઉકેલ મળશે.

ખેલાડી-B

$$\text{ખેલાડી-A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \text{તફાવત} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & -80 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} 130 & 20 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{તફાવત} \\ 30 \\ 120 \\ \boxed{150} \end{array}$$

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ધનફળ (20 – 50 = 30) 30 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજી હારની સામે પ્રથમ હારનો ઘન તફાવત {(40) – (–80)} = 40 + 80 = 120 લખેલ છે.

પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત {(–80) – (50) = –80 – 50 = –130} = 130 લખેલ છે. તે જ રીતે બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત 40 – 20 = 20 લખેલ છે. આ તફાવતોનો સરવાળો 150 થાય છે.

જવાબ :

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{30}{150}, 0, \frac{120}{150}\right\} = \left\{\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{0, \frac{130}{150}, \frac{20}{150}\right\} = \left\{0, \frac{13}{15}, \frac{2}{5}\right\}$

નોંધ : મિશ્ર વ્યૂહ માટે હાર કે સ્તંભની સામેના તફાવતને સરવાળા વડે ભાગવાથી મળે છે અને જે હાર કે સ્તંભ રદ થઈ હોય તેની સંભાવના 0 લેવામાં આવે છે તેથી આ દાખલામાં $A_2 = 0$ અને $B_1 = 0$ લીધા છે.

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a+d)-(b+c)}$$

$$= \frac{(40 \times 50) - (-80 \times 20)}{(40 + 50) - (-80 + 20)}$$

$$= \frac{2000 + 1600}{90 + 60}$$

$$= \frac{3600}{150}$$

$\therefore\ v = 24$

ઉદાહરણ-14 : નીચેની રમતનો ઉકેલ મેળવો.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉકેલ : પલાણ્ય બિંદુ તપાસતાં

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \boxed{7} & 2 \\ \boxed{6} & 2 & \boxed{7} \end{bmatrix} \end{array}$$

પલાણ્ય બિંદુ નથી તેથી પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતથી ઉકેલ મળશે તે માટે 2×3 ક્રમની રમતને 2×2 ક્રમમાં ફેરવવા માટે સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ સ્તંભ 3ના તમામ ઘટકો સ્તંભ 1ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ 3 પર સ્તંભ 1 સરસાઈ મેળવે છે. તેથી સ્તંભ 3 દૂર થશે.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

આ રમત 2×2 ક્રમની થઈ છે તેથી હવે બીજગણિતીય રીતે ઉકેલ મળશે.

ખેલાડી-B

$$
\begin{array}{lccc}
 & B_2 & B_3 & \text{તફાવત} \\
\text{ખેલાડી-A} \quad A_1 & 1 & 7 & 4 \\
A_2 & 6 & 2 & 6 \\
\text{તફાવત} & 5 & 5 & \boxed{10}
\end{array}
$$

સમજૂતી :

પ્રથમ હારની સામે બીજી હારનો ઘન તફાવત $(6 - 2) = 4$ લખેલ છે. બીજી હારની સામે પ્રથમ હારનો ઘન તફાવત $(1 - 7 = 6)$ 6 લખેલ છે. પ્રથમ સ્તંભની નીચે બીજા સ્તંભનો ઘન તફાવત $7 - 2 = 5$ લખેલ છે અને બીજા સ્તંભની નીચે પ્રથમ સ્તંભનો ઘન તફાવત $(1 - 6 = -5) = 5$ લખેલ છે. તફાવતનો સરવાળો 10 થાય છે.

જવાબ :

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right\} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{\frac{5}{10}, \frac{5}{10}, 0\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a+d) - (b+c)}$$

$$= \frac{(1 \times 2) - (7 \times 6)}{(1 + 2) - (7 + 6)}$$

$$= \frac{2 - 42}{3 - 13}$$

$$= \frac{-40}{-10} = 4$$

ઉદાહરણ-15 :

નીચેની રમતમાં સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી રમતનું કદ ઘટાડો અને આ રમતને 2×2 ક્રમમાં ફેરવો.

$$\begin{array}{cc} & \text{ખેલાડી B} \\ \text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ A_2 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ A_3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ A_4 & 3 & 3 & 5 & 2 \end{array} \end{array}$$

ઉકેલ :

સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ હાર 3ના તમામ ઘટકો હાર 4ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના છે તેથી હાર 3 પર હાર 4 સરસાઈ મેળવે છે માટે હાર 3 રદ થશે.

$$\begin{array}{cc} & \text{ખેલાડી B} \\ \text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ A_2 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ A_4 & 3 & 3 & 5 & 2 \end{array} \end{array}$$

હારમાં સરસાઈ ન મળે તો સ્તંભ ચેક કરો. અહીં સ્તંભ 2ના તમામ ઘટકો સ્તંભ 4ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ 2 રદ થશે.

$$\begin{array}{cc} & \text{ખેલાડી B} \\ \text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c|ccc|} & B_1 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 3 & 4 & 2 \\ A_2 & 5 & 2 & 4 \\ A_4 & 3 & 5 & 2 \end{array} \end{array}$$

સ્તંભ-1ના તમામ ઘટકો સ્તંભ 3(B_4)ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ-1 દૂર થશે.

$$\begin{array}{cc} & \text{ખેલાડી B} \\ \text{ખેલાડી A} & \begin{array}{c|cc|} & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 4 & 2 \\ A_2 & 2 & 4 \\ A_3 & 5 & 2 \end{array} \end{array}$$

હાર-1ના તમામ ઘટકો હાર 3(A_4)ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના કે સમાન છે. તેથી હાર 1 રદ થશે.

$$\text{ખેલાડી B}$$

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

આમ સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી રમતને 2×2 ક્રમમાં ફેરવેલ છે.

ઉદાહરણ-16 : નીચેની રમતનો ઉકેલ પાલણ્ય બિંદુ વગરની રીતથી મેળવો.

	ખેલાડી-B					
ખેલાડી-A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	3	–1	4	2	–5
A_2	–3	5	6	1	2	0

ઉકેલ :

સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ બીજા સ્તંભના ઘટકો પ્રથમ સ્તંભના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી બીજો સ્તંભ રદ થશે.

સ્તંભ-4ના ઘટકો સ્તંભ-1ના ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ-4 રદ થશે.

સ્તંભ-5 ના ઘટકો સ્તંભ-1ના ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ-5 રદ થશે.

સ્તંભ-3 ના ઘટકો સ્તંભ-6ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં મોટા છે તેથી સ્તંભ-3 રદ થશે.

ખેલાડી-A	**ખેલાડી- B**	
	B_1	**B_6**
A_1	1	–3
A_2	–5	0

આ રમત 2×2 ક્રમની થઈ છે તેથી ગણિતીય રીતે ઉકેલ મેળવીશું.

	ખેલાડી-B		
ખેલાડી-A	**B_1**	**B_6**	**તફાવત**
A_1	1	–3	5
A_2	–5	0	4
તફાવત	3	6	9

જવાબ :

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{ \frac{5}{9}, \frac{4}{9} \right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{ \frac{3}{9}, 0, 0, 0, 0, \frac{6}{9} \right\} = \left\{ \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, \frac{2}{3} \right\}$

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a+d)-(b+c)}$$

$$= \frac{0 - 15}{1 - 8}$$

$$= -\frac{15}{9}$$

$$= -\frac{5}{3}$$

ઉદાહરણ-17 : નીચેની રમતનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની રીતથી મેળવો.

	ખેલાડી-B	
ખેલાડી-A	**B_1**	**B_2**
A_1	1	2
A_2	5	4
A_3	–7	9
A_4	–4	–3
A_5	2	1

ઉકેલ :

અહીં પાંચ હારો અને બે સ્તંભો છે તેથી સૌપ્રથમ આપણે ત્રણ હારો ઓછી કરી રમતનું કદ ઘટાડવું પડશે. તે માટે સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીશું.

હાર-1, હાર-4 અને હાર-5ના તમામ ઘટકો હાર-2ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના છે તેથી હાર-1, હાર-4 અને હાર-5 રદ થશે.

	ખેલાડી-B	
ખેલાડી-A	**B_1**	**B_2**
A_2	5	4
A_3	–7	9

હવે બીજગણિતીય રીત મુજબ

ખેલાડી-A	ખેલાડી-B		
	B_1	B_2	તફાવત
A_2	5	4	16
A_3	–7	9	1
તફાવત	5	12	17

જવાબ :

$$S_A = \left\{0, \frac{16}{17}, \frac{1}{17}, 0\right\}$$

$$S_B = \left\{\frac{5}{17}, \frac{12}{17}\right\}$$

રમતની કિંમત $v = \dfrac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$

$$= \frac{45 + 28}{14 + 3}$$

$$= \frac{73}{17}$$

ઉદાહરણ-18 :

ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B એક રમત રમે છે. જેમાં બંને ખેલાડીઓ પાસે રૂપિયા 2, રૂપિયા 5 અને રૂપિયા 10 વાળા એમ ત્રણ સિક્કાઓ છે. દરેક ખેલાડી બીજા ખેલાડીના સિક્કાની પસંદગીની જાણ વગર પોતે એક સિક્કો બતાવે છે.

જો બંને એ બતાવેલા સિક્કાઓની કિંમતનો સરવાળો એકી સંખ્યા થાય. તો ખેલાડી-A, ખેલાડી-Bનો સિક્કો જીતી લે છે.

જો બંનેએ બતાવેલા સિક્કાઓની કિંમતનો સરવાળો બેકી સંખ્યા થાય તો ખેલાડી-B, ખેલાડી-Aનો સિક્કો જીતી લે છે.

ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક લખો અને દરેક ખેલાડીનો ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ શોધી રમતની કિંમત મેળવો.

ઉકેલ :

જો ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B બંને રૂ. 2 નો સિક્કો બતાવે તો બંનેના સિક્કાઓનો સરવાળો (2 + 2) = 4 થશે. જે બેકી સંખ્યા છે. તેથી ખેલાડી-B, ખેલાડી-Aનો સિક્કો જીતી લે છે. આથી ખેલાડી-A રૂ. 2 ગુમાવે છે. માટે ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણીકના ખાનું (1, 1)માં –2 લખીશું.

જો ખેલાડી-A રૂ. 2 અને ખેલાડી-B રૂ. 5નો સિક્કો બતાવે તો બંનેના સિક્કાઓનો સરવાળો

(2 + 5 = 7) થશે. જે એકી સંખ્યા છે. તેથી ખેલાડી-A, ખેલાડી-B એ બતાવેલ રૂ. 5 નો સિક્કો જીતી લે છે. આથી ખેલાડી-Aના વળતર શ્રેણિકના ખાનું (1, 2) માં 5 લખીશું.

જો ખેલાડી-A રૂ. 2 અને ખેલાડી-B રૂ. 10 નો સિક્કો બતાવે તો બંનેના સિક્કાનો સરવાળો (2 + 10 = 12) બેકી સંખ્યા થાય છે તેથી ખેલાડી-B, ખેલાડી-Aનો રૂ. 2 નો સિક્કો જીતી લે છે. તેથી વળતર શ્રેણિકના (1,3) ખાનામાં –2 લખીશું.

જો ખેલાડી - A રૂ. 5 નો અને ખેલાડી - B રૂ. 2નો સિક્કો બતાવે તો બંનેના સિક્કાઓનો સરવાળો 7 એટલે કે એકી સંખ્યા થશે તેથી ખેલાડી-A, ખેલાડી-B નો સિક્કો જીતી લે છે. માટે વળતર શ્રેણીકના (2, 1) ખાનામાં 2 લખીશું.

આજ રીતે વળતર શ્રેણિકના બીજા ઘટકો લખેલ છે.

ખેલાડી-A નો વળતર શ્રેણિક

	ખેલાડી-B			
	સિક્કો બતાવે	**રૂ. 2**	**રૂ. 5**	**રૂ. 10**
	રૂ. 2	–2	5	–2
ખેલાડી-A	રૂ. 5	2	–5	10
	રૂ. 10	–10	5	–10

આ રમતને પલાણ્ય બિંદુ નથી માટે પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમત દ્વારા ઉકેલ મેળવીશું.

સૌપ્રથમ સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ હાર-3ના ઘટકો હાર-1ના અનુવર્તી ઘટકો કરતાં નાના કે સમાન છે. તેથી હાર-3 રદ કરીશું.

	ખેલાડી-B			
		રૂ. 2	**રૂ. 5**	**રૂ. 10**
ખેલાડી-A	રૂ. 2	–2	5	–2
	રૂ. 5	2	–5	10

સ્તંભ-3ના ઘટકો સ્તંભ-1ના ઘટકો કરતાં મોટા કે સમાન છે તેથી સ્તંભ-3 પર સ્તંભ-1 સરસાઈ મોટો છે માટે સ્તંભ-3 દૂર કરતાં;

	ખેલાડી-B	
ખેલાડી-A	**રૂ. 2**	**રૂ. 5**
રૂ. 2	–2	5
રૂ. 5	2	–5

હવે બીજગણિતીય રીત મુજબ;

	ખેલાડી-B		
ખેલાડી-A	**રૂ. 2**	**રૂ. 5**	**રૂ. 10**
રૂ. 2	–2	5	7
રૂ. 5	2	–5	7
તફાવત	10	4	14

ખેલાડી-Aના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_A = \left\{\frac{7}{14}, \frac{7}{14}, 0\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

ખેલાડી-Bના ઈષ્ટતમ મિશ્ર વ્યૂહ $S_B = \left\{\frac{10}{14}, \frac{4}{14}, 0\right\} = \left\{\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right\}$

રમતની કિંમત

$$v = \frac{ad - bc}{(a+d) - (b+c)}$$

$$= \frac{(-2 \times -5) - (5 \times 2)}{(-2 - 5) - (5 + 2)}$$

$$= \frac{10 - 10}{-7 - 7}$$

$$= \frac{0}{14}$$

$$= 0$$

$\therefore$ રમત સમતોલ છે એમ કહેવાય.

17.11 તમારી પ્રગતિ ચકાસો :

17.11.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) રમતના સિદ્ધાંતનો અર્થ સમજાવી રમતના સિદ્ધાંતની ધારણાઓ જણાવો.

(2) રમતના પ્રકારો સમજાવો.

(3) રમતના સિદ્ધાંત માટે વળતર શ્રેણિક લખો.

(4) રમતનો સિદ્ધાંત એટલે શું ? તેની મર્યાદાઓ જણાવો.

(5) રમતની સમસ્યાના વ્યૂહો સમજાવો.

(6) ગુરૂ-લઘુ અને લઘુ-ગુરૂ સિદ્ધાંત સમજાવો.

(7) પલાણ્ય બિંદુ એટલે શું ? પલાણ્ય બિંદુ શોધવાની રીત સમજાવો.

(8) પલાણ્ય બિંદુ વગરની બીજગણિતની રીત સમજાવો.

(9) સરસાઈના સિદ્ધાંત પર ટૂંકનોંધ લખો.

(10) સરસાઈનો સિદ્ધાંત એટલે શું ? તેના સામાન્ય નિયમો લખો.

(11) નીચે આપેલ રમતોમાં પલાણ્ય બિંદુ શોધી તેમનો ઉકેલ મેળવો.

(i)

$$\begin{array}{ccc} & & \text{ખેલાડી } B \\ & & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \text{ખેલાડી } A & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii)

ખેલાડી A	ખેલાડી B		
	I	**II**	**III**
1	6	8	6
2	4	12	3

(iii)

ખેલાડી A	ખેલાડી B	
	B_1	**B_2**
A_1	**–1**	**2**
A_2	–1	3
A_3	1	2

(iv)

	ખેલાડી B					
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
ખેલાડી A	A_1	20	0	0	50	30
	A_2	40	20	10	20	50
	A_3	–40	–30	0	–30	60
	A_4	50	10	–50	–20	–60

(v)

	ખેલાડી B					
ખેલાડી A		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	2	4	3	8	4
	A_2	5	6	3	7	8
	A_3	6	7	9	8	7
	A_4	4	2	8	4	3

(vi)

ખેલાડી B / ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	15	12	35
A_2	25	14	8	10
A_3	40	2	10	5
A_4	–5	4	11	0

(vii)

ખેલાડી B / ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3
A_1	–2	14	–2
A_2	–5	–6	–4
A_3	–6	20	–8

(viii)

ખેલાડી B / ખેલાડી A	1	2	3
I	–1	2	–4
II	6	4	–6

(12) નીચેની રમતોમાં સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી રમતનું કદ 2×2 ક્રમમાં ફેરવો.

(i)

ખેલાડી B / ખેલાડી A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	6	4	2
A_2	5	8	2	4
A_3	3	2	4	0
A_4	3	3	5	2

(ii)

ખેલાડી y / ખેલાડી x	y_1	y_2	y_3
x_1	10	5	–2
x_2	13	12	15
x_3	16	14	10

(iii)

ખેલાડી Q

ખેલાડી P

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -7 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iv)

ખેલાડી y

ખેલાડી x

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -50 & 100 & 200 \\ 50 & -100 & -100 \\ 50 & -200 & -200 \end{bmatrix} \end{array}$$

(13) નીચેની રમતોનો ઉકેલ પલાણ્ય બિંદુ વગરની બીજગણિતીય રીતે મેળવો.

ખેલાડી B

(i) ખેલાડી A

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

ખેલાડી B

(ii) ખેલાડી A

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iii)

ખેલાડી P	ખેલાડી Q		
	Q_1	Q_2	Q_3
P_1	1	7	2
P_2	5	1	6
P_3	6	2	7

(iv)

ખેલાડી y

$$\text{ખેલાડી } x \quad \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 14 & 12 & 15 \\ 18 & 14 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

(v)

	ખેલાડી B	
ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	2	–1
A_2	–1	1

(vi)

	ખેલાડી B	
ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	1	3
A_2	5	2

(14) નીચેની રમતોનો ઉકેલ મેળવો.

(i) ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	1	8
A_2	6	2

(ii) ખેલાડી B

ખેલાડી A	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	4	1

(iii)

$$\text{ખેલાડી A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \overset{\text{ખેલાડી B}}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array}}$$

(iv)

$$\text{ખેલાડી } x\quad \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \overset{\text{ખેલાડી } y}{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & 9 \\ 7 & 8 & 6 & 10 \\ 6 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \end{array}}$$

(v)

$$\text{ખેલાડી P}\quad \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \overset{\text{ખેલાડી Q}}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{Q_1} & \mathbf{Q_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \end{array}}$$

(vi)

$$\begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \overset{\text{ખેલાડી B}}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -5 & 10 & 20 \\ 5 & -10 & -10 \\ -5 & -20 & -20 \end{bmatrix} \end{array}}$$

(vii)

$$\text{ખેલાડી A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \overset{\text{ખેલાડી B}}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}}$$

(viii)

$$\begin{array}{cc} & \text{ખેલાડી B} \\ & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \text{ખેલાડી A} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 4 & 2 & 9 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 9 \\ 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

(15) બે ખેલાડીઓ x અને y પાસે એક એક સિક્કો છે. બંને ખેલાડીઓ એક બીજાની જાણ કર્યા વગર ટેબલ પર છાપ (H) અથવા કાંટો (T) ઉપર બાજુ પર રહે તે પ્રમાણે સિક્કો મૂકે છે.

જો બંને સિક્કાઓ H બતાવે તો ખેલાડી x ને ખેલાડી y પાસેથી રૂ. 20 મળે છે અને જો બંને સિક્કાઓ T બતાવે તો ખેલાડી x ને ખેલાડી y પાસેથી રૂ. 8 મળે છે. જો એક સિક્કો H અને બીજા સિક્કો T હોય તો ખેલાડી y ને ખેલાડી x પાસેથી રૂ. 10 મળે છે.

ખેલાડી x નો વળતર શ્રેણિક લખો. તેમજ ખેલાડી x અને yના ઈષ્ટતમ વ્યૂહો શોધી. રમતની કિંમત મેળવો.

(16) ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B પાસે એક એક સમઘન પાસો છે. બંને ખેલાડીઓ એક સાથે બંને પાસાઓ ઉછાળે છે, જો બંને પાસા પરના અંક એકી સંખ્યા હોય તો ખેલાડી-A, ખેલાડી-B પાસેથી રૂ. 15 જીતે છે અને બંને પાસાઓ પરના અંક બેકી સંખ્યા હોય તો ખેલાડી-A, ખેલાડી-B પાસેથી રૂ. 10 જીતે છે અને જો એક પાસા પર એકી સંખ્યા અને બીજા પાસા પર બેકી સંખ્યા હોય તો ખેલાડી-B, ખેલાડી-A પાસેથી રૂ. 12 જીતે છે. ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક લખી રમતનો ઉકેલ મેળવો.

(17) બે કંપનીઓ એક જ પ્રકારની વસ્તુઓ માટે હરિફાઈ કરે છે. તેમના જુદા જુદા વ્યૂહ અને કંપની-Aનો વળતર (રૂપિયા કરોડમાં) નીચે આપેલ છે. આ રમતનો ઉકેલ મેળવો.

કંપની-Aનો વળતર શ્રેણિક

કંપની-A	**કંપની-B**		
	જાહેરાત કરતી નથી	**મધ્યમસર જાહેરાત કરાય છે.**	**વિશાળ પાયા પર જાહેરાત કરાય છે.**
જાહેરાત કરતી નથી.	60	50	40
મધ્યમ સર જાહેરાત કરાય છે.	70	70	50
વિશાળ પાયા પર જાહેરાત કરાય છે.	60	60	75

જવાબો :

(11) (i) પલાણ્ય બિંદુ (A_1, B_1) અને (A_1, B_3)

રમતની કિંમત $v = 1$

(ii) પલાણ્ય બિંદુ (1, I) અને (1, III)

રમતની કિંમત $v = 6$

(iii) પલાણ્ય બિંદુ (A_3, B_1) રમતની કિંમત $v = 1$

(iv) પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_3) રમતની કિંમત $v = 10$

(v) પલાણ્ય બિંદુ (A_3, B_1) રમતની કિંમત $v = 6$

(vi) પલાણ્ય બિંદુ (A_1, B_3) રમતની કિંમત $v = 12$

(vii) પલાણ્ય બિંદુ (A_1, B_1) રમતની કિંમત $v = -2$

(viii) પલાણ્ય બિંદુ (I, 3) રમતની કિંમત $v = -4$

(12) (i)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_2 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 14 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Q_1 & Q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} -50 & 100 \\ -50 & -100 \end{bmatrix} \end{array}$$

(13) (i) $S_A = \left\{\frac{6}{13}, \frac{7}{13}\right\}, S_B = \left\{\frac{8}{13}, \frac{5}{13}\right\}, v = \frac{69}{13}$

(ii) $S_A = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}, S_B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, v = \frac{5}{2}$

(iii) $S_A = \left\{\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}\right\}, S_B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}, v = 4$

(iv) $S_A = \left\{0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right\}, S_B = \left\{0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right\}, v = \frac{90}{7}$

(v) $S_A = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}, S_B = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}, v = 15$

(vi) $S_A = \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right\}, S_B = \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}, v = \frac{13}{5}$

(14) (i) $S_A = \left\{\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right\}, S_B = \left\{\frac{6}{11}, \frac{5}{11}\right\}, v = \frac{46}{11}$

(ii) $S_A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, S_B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}, v = 3$

(iii) પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_1), $v = 4$

(iv) પલાણ્ય બિંદુ (x_2, y_3), $v = 6$

(v) પલાણ્ય બિંદુ (P_1, Q_1), $v = 1$

(vi) $S_A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}, S_B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\}, v = 0$

(vii) $S_A = \left\{\frac{4}{15}, \frac{11}{15}\right\}, S_B = \left\{\frac{4}{15}, \frac{11}{15}\right\}, v = \frac{1}{15}$

(viii) પલાણ્ય બિંદુ (A_2, B_3), $v = 5$

(15) ખેલાડી-xનો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી y

$$\text{ખેલાડી } x \quad \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \hline 20 & -10 \\ -10 & 8 \end{array}$$

$S_A = \left\{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right\}, S_B = \left\{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right\}, v = \frac{5}{4}$

(16) ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક

ખેલાડી B

	એકીસંખ્યા	બેકીસંખ્યા
એકીસંખ્યા	15	–12
બેકીસંખ્યા	–12	10

$$S_A = \left\{\frac{22}{49}, {}^{27}\!/_{49}\right\}, S_B = \left\{\frac{22}{49}, {}^{27}\!/_{49}\right\}, v = \frac{6}{49}$$

(17) $S_A = \left\{0, {}^{1}\!/_{3}, {}^{2}\!/_{3}\right\}, S_B = \left\{0, \frac{7}{9}, {}^{2}\!/_{9}\right\}, v = 63.33$

17.11.2 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો :

(1) રમતનું મૂલ્ય $v =$ .... હોય ત્યારે રમતને સમતોલ રમત કહેવાય.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) –1

(2) રમતનું મૂલ્ય .... સમીકરણને સંતોષે છે.

(a) લઘુ-ગુરૂ $\leq v \leq$ ગુરૂ લઘુ (b) લઘુ-ગુરૂ $> v >$ ગુરૂ લઘુ

(c) લઘુ-ગુરૂ $\geq v \geq$ ગુરૂ લઘુ (d) આપેલમાંથી એક પણ નહીં

(3) જ્યારે ગુરૂ-લઘુ = લઘુ-ગુરૂ હોય ત્યારે -

(a) પલાણ્ય બિંદુ મળતું નથી. (b) પલાણ્ય બિંદુ મળે છે.

(c) પલાણ્ય બિંદુ શૂન્ય થાય છે. (d) પલાણ્ય બિંદુ એક થાય છે.

(4) ખેલાડી-A અને ખેલાડી-B દ્વારા વિવિધ વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ કરીને સંભાવનાની કિંમત નક્કી કરવા માટે .... પદ્ધતિનો ઉપયોગ થાય છે.

(a) હંગેરિયન(b) જહોન્સન

(c) બીજ ગણિતીય (d) આપેલમાંથી એક પણ નહીં

(5) પલાણ્ય બિંદુ વગરની રમતનું નિરાકરણ .... થાય છે.

(a) સાદા વ્યૂહથી (b) પલાણ્ય બિંદુના વ્યૂહથી

(c) મિશ્ર વ્યૂહથી (d) આપેલમાંથી એક પણ નહીં

(6) નીચે આપેલ રમતની સમસ્યાનો ઉકેલ માટે પલાણ્ય બિંદુ અનુરૂપ ઈષ્ટતમ વ્યૂહ જણાવો.

ખેલાડી B

$$\text{ખેલાડી A} \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 5 & 6 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \\ 2 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) (A_1, B_2) (b) (A_2, B_1) (c) (A_3, B_3) (d) (A_1, B_3)

(7) નીચે આપેલ સમસ્યાનો ઉકેલ માટે પલાણ્ય બિંદુને અનુરૂપ રમતનું મૂલ્ય જણાવો.

ખેલાડી B

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 9 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & 0 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) –6 (b) 4 (c) 5 (d) 3

(8) …….. માટે સરસાઈના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ થાય છે.

(a) રમતનું કદ વધારવા (b) રમતનું કદ ઘટાડવા

(c) કિંમત ઘટાડવા (d) કિંમત વધારવા

(9) જો ખેલાડી-Aનો વળતર શ્રેણિક a_{i_j} હોય તો ખેલાડી-Bનો વળતર શ્રેણિક = ……..

(a) 0 (b) 1 (c) a_{i_j} (d) $-a_{i_j}$

(10) નીચેની રમતની કિંમત v = …….. છે.

ખેલાડી Q

$$\text{ખેલાડી P} \quad \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Q_1 & Q_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) –2 (b) –6 (c) 5 (d) 7

(11) નીચે આપેલ રમત …….. છે.

ખેલાડી y

$$\text{ખેલાડી } x \quad \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) અસમતોલ (b) સમતોલ

(c) પલાણ્ય બિંદુ વગરની (d) ઉપરના બધા જ

(12) જો ખેલાડી-A સરસાઈના સિદ્ધાંત મુજબ તેનો પહેલો વ્યૂહ એટલે કે A_1 રદ કરે છે તો તેના પહેલા વ્યૂહ (A_1)ની સંભાવના .... થાય.

(a) 0 (b) 1 (c) –1 (d) 2

જવાબો :

(1) – a	(2) – a	(3) – b	(4) – c	(5) – c	(6) – d
(7) – d	(8) – b	(9) – d	(10) – c	(11) – b	(12) – a

17.12 ચાવીરૂપ શબ્દો :

V = **રમતની કિંમત**

રમત – **નિશ્ચિત નિયમોનો ગણ**

દાવ – **ચાલ, રમતનો વારો, વ્યૂહ**

ખેલાડી – **સ્પર્ધામા રોકાયેલી વ્યક્તિ**

પરિમિતિ – **ગણતરી કરી શકાય તેવી ઘન સંખ્યા**

શૂન્ય યોગ – **શૂન્ય સરવાળો**

પલાણ્ય બિંદુ : (હારનો ન્યૂનત્તમ પૈકી મહત્તમ અને સ્તંભમાં મહત્તમ પૈકી લઘુત્તમ ઘટક ધરાવતુ સ્થાન બિંદું)

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) ક્રિયાત્મક સંશોધનની ઈષ્ટતમ પદ્ધતિઓ, યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય, અમદાવાદ-6 (1990)
સ્વ. પ્રા. રમેશચંદ્ર એન. દેસાઈ, ડૉ. ભરતભાઈ બી. જાની

(2) કાર્યાત્મક સંશોધન, અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ (2016)
લેખક : ડૉ. મહેન્દ્ર એચ. મૈસુરીયા
ડૉ. દિનેશ એમ. પટેલ
પ્રા. ધર્મેન્દ્ર એમ. પ્રજાપતિ

★ ★ ★