એકમ-4 નિશ્ચાયક અને શ્રેણિક

: રૂપરેખા :

4.0 ઉદ્દેશો

આ એકમના અભ્યાસથી તમે નીચેની બાબતોથી માહિતગાર થશો.

- નિશ્ચાયકના અર્થ વિશે જાણકારી મળશે.
- શ્રેણિક અને તેના પ્રકારોનો ખ્યાલ મળશે.

4.1 પ્રસ્તાવના

જટીલ અને વિશાળ આંકડાકીય માહિતીથી સરળ રજૂઆત અને ઝડપી ગણતરી માટે નિશ્ચાયક અને શ્રેણિકનો અભ્યાસ જરૂરી છે.

4.2 નિશ્ચાયકનો અર્થ :

નિશ્ચાયકએ બીજગણિતિય પદાવલીને ગાણિતિક રીતે રજૂ કરતી એક સાંકેતિક પદ્ધતિ છે. આ પદ્ધતિમાં સંકેત | | માં જુદા જુદા પદ કે ઘટકોને વ્યવસ્થિત રીતે સમાન સંખ્યાથી હાર અને સ્તંભમાં ગોઠવવામાં આવે છે. આ ગોઠવણીની નિશ્ચિત કિંમત હોય છે. આવી ગોઠવણીથી પ્રાપ્ત થતી રચનાને નિશ્ચાયક કહે છે.

નિશ્ચાયકની પ્રથમ હારના પ્રથમ ઘટકને અગ્રઘટક કહે છે અને અગ્રઘટકમાંથી પસાર થતી ત્રાંસી હારને અગ્રવિકર્ણ કહે છે તે જ રીતે નિશ્ચાયકથી પ્રથમ હારના છેલ્લા ઘટકને પ્રતિઘટક કહે છે અને પ્રતિઘટકમાંથી પસાર થતી ત્રાંસ હારને પ્રતિવિકર્ણ કહે છે.

4.3 દ્વિહાર નિશ્ચાયક અને તેનું વિસ્તરણ

જે નિશ્ચાયકમાં બે હાર અને બે સ્તંભ હોય તેવા નિશ્ચાયકને દ્વિહાર નિશ્ચાયક કહે છે. દ્વિહાર નિશ્ચાયકમાં કુલ ચાર ઘટકો હોય છે.

જો દ્વિહાર નિશ્ચાયક

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ હોય તો તેનું વિસ્તરણ નીચે મુજબ લખાય,

D = (અગ્ર વિકર્ણના ઘટકોનો ગુણાકાર) - (પ્રતિવિકર્ણના ઘટકોનો ગુણાકાર)

$= (a \times d) - (b \times c)$
$= ad - bc$

દા.ત. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (3 \times 1)$

$= 20 - 3$

$|A| = 17$

4.3.1 નિશ્ચાયકના ઉદાહરણ

(1) નીચેના નિશ્ચાયકોની કિંમત શોધો.

(i) $D = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= (5 \times 4) - (6 \times 2)$
$= 20 - 12$
$D = 8$

(ii) $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= (4 \times 5) - (-3 \times 2)$
$= 20 + 6$
$D = 26$

(iii) $D = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-5 \times 3) - (1 \times -4)$
$= -15 - (-4)$
$= -15 + 4$
$D = -11$

(iii) $D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$

$= (a+b)(a+b) - (a-b)(a-b)$
$= (a+b)^2 - (a-b)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$
$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$
$D = 4ab$

(2) જો $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 \\ x & x+3 \end{vmatrix} = 0$ હોય તો xની કિંમત શોધો.

$\therefore \quad (x-1)(x+3) - x(x+1) = 0$

$x^2 + 3x - x - 3 - x^2 - x = 0$

$x - 3 = 0$

$x = 3$

4.3.2 ક્રેમરના નિયમથી યુગપત સમીકરણોનો ઉકેલ :

બે ચલનાં યુગપત સમીકરણોનો ઉકેલ નિશ્ચાયકની મદદથી મેળવવાની રીતને ક્રેમરનો નિયમ કહે છે. ધારો કે બે યુગપત સમીકરણ નીચે મુજબ છે.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

હવે ક્રેમરના નિયમ મુજબ

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

આ ઉપરથી x અને y ની કિંમત મળે. સમીકરણ ઉકેલવાની આ રીતને ક્રેમરનો નિયમ કહે છે.

ઉદા.3. નિશ્ચાયકનો ઉપયોગ કરી નીચેના સમીકરણ ઉકેલો.

$$3x + y = 6$$
$$2x - 3y = -7$$

જવાબ : $3x + y - 6 = 0$

$2x - 3y + 7 = 0$

હવે ક્રેમરના નિયમ મુજબ

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{7-18} = \frac{-y}{21+12} = \frac{1}{-9-2}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{-11} = \frac{-y}{33} = \frac{1}{-11}$$

હવે $\frac{x}{-11} = \frac{1}{-11} \qquad \frac{-y}{33} = \frac{1}{-11}$

$\therefore \quad x = \frac{11}{11} \qquad -y = \frac{33}{-11}$

$\therefore \quad x = 1 \qquad y = 3$

(4) નીચેના સમીકરણ ક્રેમરની રીતે ઉકેલો.

$$\frac{x}{3} + \frac{7y}{3} = 9 \qquad \frac{3x}{2} - \frac{y}{3} - 8 = 0$$

સૌપ્રથમ સમીકરણ (i) ને 3 વડે અને સમીકરણ (ii) ને 6 વડે ગુણતાં,

$x + 7y = 27 \qquad x + 7y - 27 = 0$

$9x - 2y - 48 = 0$

હવે ક્રેમરના નિયમ મુજબ

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 7 & -27 \\ -2 & -48 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} 1 & -27 \\ 9 & -48 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{-336-54} = \frac{-y}{-48+243} = \frac{1}{-2-63}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{-390} = \frac{-y}{195} = \frac{1}{-65}$$

$$\frac{x}{-390} = \frac{1}{-65} \qquad \frac{-y}{195} = \frac{1}{-65}$$

$$x = \frac{390}{65} \qquad y = \frac{195}{65}$$

$$x = 6 \qquad y = 3$$

4.4 શ્રેણિક (Matrix)નો ખ્યાલ

* **અર્થ :**

એકત્રિત કરેલી આંકડાકીય માહિતીને વ્યવસ્થિત રીતે ટૂંકાણમાં રજૂ કરવી જરૂરી છે. અમુક સંખ્યાઓને હાર અને સ્તંભમાં વ્યવસ્થિત ગોઠવવામાં આવે તો તે ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે. આ ગોઠવણીની કોઈ નિશ્ચિત કિંમત હોતી નથી. પરંતુ અમુક ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ માટે આવી ગોઠવણી ઉપયોગી હોય છે. શ્રેણિકમાં આવેલ સંખ્યાઓને તેના ઘટકો કહે છે. આ ઘટકોને [ ] વચ્ચે લખવામાં આવે છે. શ્રેણિકના ઘટકોને a, b, c વડે દર્શાવાય જ્યારે શ્રેણિકને A, B, C વડે દર્શાવાય.

* **વ્યાખ્યા :**

જો કુલ $m \times n$ સંખ્યાઓને m હાર અને n સ્તંભમાં દર્શાવવામાં આવે તો આ ગોઠવણીને $m \times n$ ક્રમનો શ્રેણિક કહે છે.

શ્રેણિક A નું સામાન્ય સ્વરૂપ નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

જ્યાં, $a_e = im$ મી હાર અને j મા સ્તંભમાં આવેલો ઘટક

શ્રેણિકમાં જે ઘટકો માટે $i = j$ હોય એટલે કે હાર અને સ્તંભ સમાન હોય તે ઘટકોને વિકર્ણી ઘટકો કહે છે.

દા.ત. a_{11}, a_{22}, a_{33}

4.5 શ્રેણિકના પ્રકારો

(1) સમાન શ્રેણિક : જો (i) બે શ્રેણિકના ક્રમ સમાન હોય અને (ii) બંને શ્રેણિકમાં અનુરૂપ ઘટકો પણ સમાન હોય તો તે બે શ્રેણિકને સમાન શ્રેણિક કહેવાય.

દા.ત. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

આમ, A = B

(2) પ્રતિ શ્રેણિક (પરિવર્ત શ્રેણિક)

કોઈપણ શ્રેણિકમાં હારના ઘટકોને સ્તંભમાં અથવા સ્તંભના ઘટકોને હારમાં ગોઠવવાથી મળતા નવા શ્રેણિકને પ્રતિ શ્રેણિક કહે છે. શ્રેણિક Aના પ્રતિશ્રેણિકને A' અથવા A^T વડે દર્શાવાય.

દા.ત. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

$\therefore \quad A' = A^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

જો શ્રેણિક A નો ક્રમ $m \times n$ હોય તો પ્રતિ શ્રેણિક A' $n \times m$ ક્રમનો મળે.

(3) હાર (પંક્તિ) શ્રેણિક :

જે શ્રેણિકમાં હારની સંખ્યા એક જ હોય અને સ્તંભ ગમે તેટલા હોય તે શ્રેણિકને હાર શ્રેણિક કહે છે. આમ હાર શ્રેણિકમાં બધા ઘટકો એક જ હારમાં આવેલા હોય છે. દા.ત. $A = [a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots a_{1n}]$ એ $1 \times n$ ક્રમનો હાર શ્રેણિક છે.

(4) સ્તંભ શ્રેણિક :

જે શ્રેણિકમાં બધા જ ઘટકો એક જ સ્તંભમાં આવેલા હોય તે શ્રેણિકને સ્તંભ શ્રેણિક કહે છે.

દા.ત. $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ એ $m \times 1$ ક્રમનો સ્તંભ શ્રેણિક છે.

(5) શૂન્ય શ્રેણિક : જે શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય તેને શૂન્ય શ્રેણિક કહે છે.

$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

શૂન્ય શ્રેણિકનો ક્રમ ગમે તે હોઈ શકે.

(6) ચોરસ શ્રેણિક : જે શ્રેણિકમાં હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય તે શ્રેણિકને ચોરસ શ્રેણિક કહે છે.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{matrix}$

(7) સંમિત શ્રેણિક

જે ચોરસ શ્રેણિકનો પ્રતિ શ્રેણિક મૂળ શ્રેણિક જ મળતો હોય તે ચોરસ શ્રેણિકને સંમિત શ્રેણિક કહે છે.

સંમિત શ્રેણિક માટે A = A' થાય.

બીજા શબ્દોમાં જે ચોર શ્રેણિકના દરેક ઘટકો માટે $a_{ij} = a_{ji}$ હોય તે ચોરસ શ્રેણિકને સંમિત શ્રેણિક કહેવાય.

દા.ત. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 11 & 6 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

પ્રતિ શ્રેણિક માટે હારના ઘટકોને સ્તંભમાં લખતાં,

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 11 & 6 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

આમ, A = A' હોવાથી A શ્રેણિક સંમિત શ્રેણિક છે.

(8) વિસંમિત શ્રેણિક :

જે ચોરસ શ્રેણિકના વિકર્ણી ઘટકો શૂન્ય હોય અને તે સિવાયના ઘટકો માટે $a_{ij} = -a_{ji}$ હોય તે ચોરસ શ્રેણિકને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય. આમ જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિક A માટે A= –A' થાય તો શ્રેણિક A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય.

દા.ત. $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ હોય તો,

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

આમ, A = –A' થાય છે, તેથી A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય.

(9) એકમ શ્રેણિક :

જે ચોરસ શ્રેણિકના વિકર્ણી ઘટકો 1 હોય અને બાકીના ઘટકો શૂન્ય હોય તે ચોરસ શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક કહેવાય. સામાન્ય રીતે તેને સંકેતમાં I વડે દર્શાવાય છે.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(10) વિકર્ણી શ્રેણિક :

જે ચોરસ શ્રેણિકમાં વિકર્ણી ઘટકો ગમે તે સંખ્યાઓ હોય પરંતુ બાકીના ઘટકો શૂન્ય હોય તો તેવા ચોરસ શ્રેણિકને વિકર્ણી શ્રેણિક કહે છે.

દા.ત. $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4.6 બે શ્રેણિકના સરવાળા, બાદબાકી અને અચળાંક સાથેનો ગુણાકાર

જો બે શ્રેણિકનો ક્રમ સમાન હોય તો તે બે શ્રેણિકનો સરવાળો અને બાદબાકી કરી શકાય છે. બે શ્રેણિકનો સરવાળો કરવા તેમના અનુરૂપ ઘટકોનો સરવાળો અને બે શ્રેણિકની બાદબાકી કરવા તેમના અનુરૂપ ઘટકોની બાદબાકી કરવામાં આવે છે.

શ્રેણિકનો કોઈ અચળાંક સાથે ગુણાકાર કરવા શ્રેણિકના બધા જ ઘટકોને તે અચળાંક સાથે ગુણવામાં આવે છે.

4.7 બે શ્રેણિકનો ગુણાકાર

જો પ્રથમ શ્રેણિકમાં સ્તંભની સંખ્યા અને બીજા શ્રેણિકમાં હારની સંખ્યા સમાન હોય તો જ તે બે શ્રેણિકનો ગુણાકાર કરી શકાય.

જો A શ્રેણિકનો ક્રમ $m \times n$ હોય અને B શ્રેણિકનો ક્રમ $n \times p$ હોય તો A અને B શ્રેણિકનો ગુણાકાર શક્ય છે અને આ ગુણાકાર શ્રેણિક AB એ $m \times p$ ક્રમનો શ્રેણિક મળે.

બે શ્રેણિકનો ગુણાકાર કરવા પ્રથમ શ્રેણિકમાંથી હાર અને બીજા શ્રેણિકમાંથી સ્તંભ પસંદ કરવામાં આવે છે. આ પસંદ કરેલ હાર અને સ્તંભના ઘટકોના ગુણાકારોનો સરવાળો કરતાં ગુણાકાર શ્રેણિકના ઘટકો મળે.

4.8 શ્રેણિક અને નિશ્ચાયક વચ્ચેનો તફાવત

નિશ્ચાયક અને શ્રેણિક બંને સંખ્યાઓને હાર અને સ્તંભમાં ગોઠવવાની પદ્ધતિ છે. પરંતુ તેમની વચ્ચેના તફાવતના મુખ્ય મુદ્દા નીચે મુજબ છે.

શ્રેણિક	નિશ્ચાયક
1. શ્રેણિક એ માત્ર સંખ્યાઓની હાર અને સ્તંભમાં ગોઠવણી છે. આ ગોઠવણીની કોઈ કિંમત હોતી નથી.	1. નિશ્ચાયક એ સંખ્યાઓની હાર અને સ્તંભમાં ગોઠવણી છે પરંતુ આ ગોઠવણીની નિશ્ચિત કિંમત હોય છે.
2. શ્રેણિકમાં હાર અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય અથવા ન પણ હોય.	2. નિશ્ચાયકમાં હાર અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન જ હોય.
3. શ્રેણિકમાં ઘટકોને [ ] વચ્ચે લખવામાં આવે છે.	3. નિશ્ચાયકમાં ઘટકોને | | વચ્ચે લખવામાં આવે છે.

4.9 શ્રેણિકનાં ઉદાહરણ

ઉદાહરણ :

(1) જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ હોય તો

(i) A + B (ii) A + C (iii) 3C – 2A

(iv) 2B + 5C અને (v) 2A + 3B' માંથી જે શક્ય હોય તે શોધો.

જવાબ : (i) $A : 2 \times 3$

$B : 3 \times 2$

અહીં A અને B શ્રેણિકના ક્રમ સમાન નથી, તેથી A + B શક્ય નથી.

(ii) $A : 2 \times 3$

$C : 2 \times 3$

A + C : શક્ય છે.

હવે, $A + C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

અનુરૂપ ઘટકોનો સરવાળો કરતાં,

$$A + C = \begin{bmatrix} 2+1 & 5+(-3) & 1+4 \\ (-3)+2 & 4+5 & 7+(-1) \end{bmatrix}$$

$$A + C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

(iii) શ્રેણિક 3C માટે શ્રેણિક Cના બધા ઘટકોને 3 વડે અને શ્રેણિક 2A માટે શ્રેણિક A ના બધા ઘટકોને 2 વડે ગુણાય.

$\therefore \quad 3C - 2A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 6 & 15 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 10 & 2 \\ -6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-4 & -9-10 & 12-2 \\ 6-(-6) & 15-8 & -3-7 \end{bmatrix}$$

$$3C - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -19 & 10 \\ 12 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

(iv) $B : 3 \times 2$
$C : 2 \times 3$
આમ, B અને C શ્રેણિકના ક્રમ જુદા જુદા હોવાથી $2B + 5C$ શોધી શકાય નહીં.

(v) $A : 2 \times 3 \qquad B : 3 \times 2$
$B' : 2 \times 3$
અહીં A અને B' નો ક્રમ સમાન હોવાથી $2A + 3B'$ શક્ય છે.

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B' = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 2 \\ -6 & 8 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 15 & 0 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+12 & 10+15 & 2+0 \\ -6+(-3) & 8+(-6) & 14+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 25 & 2 \\ -9 & 2 & 23 \end{bmatrix}$$

(2) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $3(A + B) = 3A + 3B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3(A + B) = \begin{bmatrix} 9 & 21 & -6 \\ -12 & 24 & 18 \end{bmatrix} \ldots \text{(i)}$$

હવે, $3A + 3B = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -3 & 9 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -9 & 15 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 21 & -6 \\ -12 & 24 & 18 \end{bmatrix} \ldots \text{(ii)}$$

આમ, પરીણામ (i) અને (ii) પરથી સાબિત થાય છે કે $3(A + B) = 3A + 3B$

(3) જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો શ્રેણિક C એવો શોધો કે જેથી $2A - 3B + 5C = 0$ થાય.

અહીં આપેલ છે કે

$2A - 3B + 5C = 0$

$5C = 3B - 2A$

$$C = \frac{3B - 2A}{5} = \frac{1}{5}(3B - 2A)$$

હવે સૌપ્રથમ 3B – 2A શોધીએ.

$$3B - 2A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 \\ 15 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 4 & 8 \\ -6 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -16 & 1 \\ 21 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

હવે શ્રેણિક C શોધવા 3B – 2A ના દરેક ઘટકનો 5 વડે ભાગાકાર કરીએ.

$$\therefore \quad C = \frac{1}{5}(3B - 2A)$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -7 & -16 & 1 \\ 21 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -7/5 & -16/5 & 1/5 \\ 21/5 & 1/5 & -10/5 \\ 9/5 & 4/5 & 16/5 \end{bmatrix}$$

(4) જો $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો a, b, c અને d ની કિંમત શોધો.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -15 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં,

$a = 2, \quad -b = -15, \quad c = -4, \quad d = 2, \quad \therefore b = 15$

(5) $A = \begin{bmatrix} x & a & -5 \\ 2 & y & b \\ c & 4 & z \end{bmatrix}$ છે. જો (i) A એ સંમિત શ્રેણિક હોય તો a, b અને c ની કિંમત શોધો.

(ii) A એ વિસંમિત શ્રેણિક હોય તો a, b, c, x, y અને z ની કિંમત શોધો.

$$A = \begin{bmatrix} x & a & -5 \\ 2 & y & b \\ c & 4 & z \end{bmatrix} \text{ છે.}$$

(i) **સંમિત શ્રેણિકમાં**

$aij = aji$ હોય છે.

$a_{12} = a_{21}$ $\quad a_{23} = a_{32}$ $\quad a_{31} = a_{13}$

$a = 2$ $\quad b = 4$ $\quad c = -5$

(ii) **વિસંમિત શ્રેણિક માટે,**

વિકર્ણી ઘટકોની કિંમત શૂન્ય હોય છે.

$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

અન્ય ઘટકો માટે

$aij = -aji$

$a_{12} = -a_{21}$ $\quad a_{23} = -a_{32}$ $\quad a_{31} = -a_{13}$

$a = -2$ $\quad b = -4$ $\quad c = -(-5)$

$= 5$

(6) જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1-4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો AB, BA, A'B અને AB' માંથી જે શક્ય હોય તે મેળવો.

(i) $A : 2 \times 3$

$B : 2 \times 2$

અહીં શ્રેણિક A માં સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક B માં હારની સંખ્યા સમાન નથી તેથી ગુણાકાર શ્રેણિક AB શક્ય નથી.

(ii) $B : 2 \times 2$

$A : 2 \times 3$

$\therefore$ BA : શક્ય છે.

$BA : 2 \times 3$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1-4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (6 \times 3) + (-2 \times 2) & 6(1) + (-2)(0) & 6(-4) + (-2)(1) \\ (0 \times 3) + (4 \times 2) & 0(1) + 4(0) & 0(-4) + 4(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18-4 & 6+0 & -24-2 \\ 0+8 & 0+0 & 0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 6 & -26 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

(iii) $A : 2 \times 3$

$A' : 3 \times 2$

$B : 2 \times 2$

અહીં શ્રેણિક A' માં સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક B માં હારની સંખ્યા સમાન છે. તેથી A' અને B શ્રેણિકનો ગુણાકાર શક્ય છે.

$$A'B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18+0 & -6+8 \\ 6+0 & -2+0 \\ -24+0 & 8+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 6 & -2 \\ -24 & 12 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

(iv) $A : 2 \times 3 \quad B : 2 \times 2$

$B' : 2 \times 2$

અહીં શ્રેણિક A માં સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક B' માં હારની સંખ્યા સમાન નથી. તેથી AB' શક્ય નથી.

(7) જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ બતાવો કે, $(AB)' = B'.A'$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+0 & 24-2 & 0-3 \\ 21+0 & 42+6 & 0+9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 22 & -3 \\ 21 & 48 & 9 \end{bmatrix}$$

હવે, $(AB)' = \begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 22 & 48 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ ...(i)

હવે, $B'.A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 12+0 & 21+0 \\ 24-2 & 42+6 \\ 0-3 & 0+9 \end{bmatrix}$$

$B'.A' = \begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 22 & 48 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ ... (ii)

આમ પરીણામ (i) અને (ii) પરથી સાબિત થાય છે કે $(AB)' = B'.A'$

(8) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે

$A^2 - 3A + 2I = 0$

સૌપ્રથમ આપણે A^2 શોધીએ.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & -2+0-4 \\ 2+4+0 & 0+4+0 & -4+8+8 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 6 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

શ્રેણિક 3A મેળવવા A શ્રેણિકના દરેક ઘટકોનો 3 વડે ગુણાકાર કરાય, જ્યારે શ્રેણિક 2I માટે 3×3 ક્રમના એકમ શ્રેણિકના દરેક ઘટકનો 2 વડે ગુણાકાર કરાય.

$$\therefore \quad A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 6 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 6 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-3+2 & 0-0+0 & -6+6+0 \\ 6-6+0 & 4-6+2 & 12-12+0 \\ 0-0+0 & 0-0+0 & 4-6+2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

આમ, $A^2 - 3A + 2I = 0$

(9) જો શ્રેણિક $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ હોય તો શ્રેણિક A એવો શોધો કે જેથી $A = a \times I_3 + bU + CU^2$ થાય.

$$a \times I_3 = a \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$b \times U = b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

હવે, $U^2 = U \times U$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CU^2 = c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

હવે, A $= a \times I_3 + bu + cu^2$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

- **વ્યસ્ત શ્રેણિક : Inverse of a matrix :**

જો આપેલા ચોરસ શ્રેણિક માટે બીજો શ્રેણિક B એવો શોધી શકાય કે જેથી AB = BA = I થાય તો શ્રેણિક Bને Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહેવાય. સંકેતમાં તેને A^{-1} વડે દર્શાવાય.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times adj.A$$

નોંધ : (i) ચોરસ શ્રેણિક માટે જ વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધી શકાય.

(ii) જો $|A| \neq 0$ હોય તો જ વ્યસ્ત શ્રેણિક મળે.

- **સહઅવયજ શ્રેણિક Adjoint matrix :**

દરેક ઉપનિશ્ચાયકને યોગ્ય નિશાની આપવાથી જે તે ઘટકનો સહઅવયજ શોધી શકાય.

કોઈપણ ઘટકનો ઉપનિશ્ચાયક શોધવા તે ઘટકમાંથી પસાર થતી હાર અને સ્તંભ દૂર કરવામાં આવે છે. ત્યારબાદ બાકી રહેતા નિશ્ચાયકને તે ઘટકનો ઉપનિશ્ચાય કહે છે.

દા.ત. $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ છે.

તો 2 નો ઉપનિશ્ચાયક = $|8|$

5 નો ઉપનિશ્ચાયક = $|4|$

4 નો ઉપનિશ્ચાયક = $|5|$

8 નો ઉપનિશ્ચાયક = $|2|$

જો $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ હોય તો

2 નો ઉપનિશ્રાયક $= \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$

5 નો ઉપનિશ્રાયક $= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

-1 નો ઉપનિશ્રાયક $= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$

સહઅવયજ શોધવા ઉપનિશ્રાયકોને યોગ્ય નિશાની આપવામાં આવે છે. આ માટે સહઅવયજને $(-1)^{i+j}$ વડે ગુણાય; જ્યાં i હારની સંખ્યા અને j સ્તંભની સંખ્યા દર્શાવે છે.

નોંધ : જો 2×2 ક્રમનો શ્રેણિક આપેલ હોય તો વિકર્ણી ઘટકોના સ્થાન અને અન્ય ઘટકોની નિશાની બદલવાથી સહઅવયજ શ્રેણિક સહેલાઈથી લખી શકાય.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ માટે

$adj.A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ થાય.

(9) જો $A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ હોય તો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો.

વ્યસ્ત શ્રેણિકમાં નિશ્રાયક A અને સહઅવયજ શ્રેણિક શોધાય.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad adj.A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= (5 \times 1) - (4 \times 2)$$
$$= 5 - 8$$
$$= -3$$

હવે $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \times adj.A$

$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{bmatrix}$$

યુગપત સમીકરણના ઉકેલમાં વ્યસ્ત શ્રેણિકનો ઉપયોગ સામાન્ય રીતે લોપની રીતે સુરેખ સમીકરણ ઉકેલવામાં આવે છે પરંતુ વ્યસ્ત શ્રેણિકની મદદથી પણ સુરેખ સમીકરણો ઉકેલી શકાય.

ધારો કે બે યુગપત સમીકરણ નીચે મુજબ છે.

$$a_1x + b_1y = C_1$$
$$a_2x + b_2y = C_2$$

હવે, આ સમીકરણને શ્રેણિકના સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

સંકેતમાં $A \cdot X = D$

$\therefore \quad X = A^{-1}.D$

આમ, વ્યસ્ત શ્રેણિક પરથી ચલ x અને y ની કિંમત મેળવી શકાય.

(10) વ્યસ્ત શ્રેણિકની મદદથી સમીકરણ ઉકેલો.

$5x + 3y = 25$

$x + 4y = 22$

સૌપ્રથમ આપેલ સમીકરણને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં રજૂ કરાય.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = D$$

$$\therefore \quad X = A^{-1}.D$$

હવે A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધીએ.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 20 - 3$$

$$|A| = 17 \qquad adj.\ A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

હવે $X = A^{-1}.D$

$$X = \frac{1}{|A|} \times adj.\ A \times D$$

$$X = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 100 - 66 \\ -25 + 110 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 34 \\ 85 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

આમ, $x = 2$ અને $y = 5$

(11) વ્યસ્ત શ્રેણિકની મદદથી નીચેના સમીકરણ ઉકેલો.

$4x - 3y - 13 = 0$

$y = 2 - 5x$

સૌપ્રથમ સમીકરણને યોગ્ય સ્વરૂપમાં લખતાં,

$4x - 3y = 13$

$5x + y = 2$

હવે આ સમીકરણોને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં રજૂ કરીએ.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

સંકેતમાં, $\quad A \cdot X = D$

$$X = A^{-1}.D$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad adj.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$= 4 - (-15)$

$|A| = 19$

હવે $X = A^{-1}.D$

$$X = \frac{1}{|A|} \times adj.\, A \times D$$

$$= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 13 + 6 \\ -65 + 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 19 \\ -57 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

આમ, $x = 1$ અને $y = -3$

4.10 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

1. શ્રેણિકનો અર્થ સમજાવો.
2. શ્રેણિક અને નિશ્ચાયક વચ્ચેનો તફાવત લખો.
3. બે શ્રેણિકના સરવાળા, બાદબાકી અને ગુણાકાર માટેની શરત જણાવો.
4. સમજાવો : પ્રતિ શ્રેણિક, સંમિત શ્રેણિક, વિસંમિત શ્રેણિક, એકમ શ્રેણિક, વ્યસ્ત શ્રેણિક
5. જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો (i) A + B અને (ii) 3B – 2A શોધો.
6. જો $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(A + B)' = A' + B'$
7. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો શ્રેણિક B એવો શોધો કે જેથી $5A' + 3B = 0$ થાય.
8. જો $A = [3 \;\; 5 \;\; -1]$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ હોય તો AB અને BA નાં મૂલ્ય શોધો.
9. જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ હોય તો A^2 અને AA' શોધો.
10. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે ($A^2 - 4A + 57 = 0$) અને AA' શોધો.

11. જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ માટે AB = BA હોય તો a અને b ની કિંમત શોધો.

12. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $A^3 - 2A^2 - 9A = 0$

13. જો $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ હોય તો શ્રેણિક A એવો શોધો કે જેથી $A = a \times I_3 + bU + CU^2$ થાય.

14. જો $[5 \;\; 2 \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [x \;\; 2 \;\; 5]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ હોય તો x ની કિંમત શોધો.

15. નીચેના શ્રેણિક પરથી વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

16. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો $A + A^T + A^{-1}$ શોધો.

17. નીચેના સમીકરણ વ્યસ્ત શ્રેણિકની મદદથી ઉકેલો.

(1) $2x - 3y = 5$ (2) $4x - y = 11$

$3x + y = 2$ $2x - 3y = 3$

18. એક કંપની M_1 અને M_2 એમ બે યંત્ર ઉપર A અને B બે વસ્તુ બનાવે છે. A વસ્તુનો એક એકમ બનાવવા M_1 યંત્ર 3 કલાક અને M_2 યંત્ર 5 કલાક ચલાવવું પડે છે. જ્યારે B વસ્તુનો એક એકમ બનાવવા M_1 યંત્ર 2 કલાક અને M_2 યંત્ર 10 કલાક ચલાવવું પડે છે. આ બંને યંત્રને દર અઠવાડીયે વધુમાં વધુ અનુક્રમે 36 કલાક અને 80 કલાક ચલાવી શકાય છે. તો દર અઠવાયડીયે A અને B વસ્તુના કેટલા એકમો બનાવવા જોઈએ તે વ્યસ્ત શ્રેણિકની મદદથી શોધો.

19. એક કંપનીની અમદાવાદ, વડોદરા અને રાજકોટ શહેરમાં શાખા છે. અમદાવાદ શાખામાં 2 મેનેજર, 8 કલાર્ક અને 2 પટ્ટાવાળા છે. વડોદરા ઓફિસમાં 1 મેનેજર, 6 કલાર્ક અને 1 પટ્ટાવાળા છે અને રાજકોટ ઓફિસમાં 1 મેનેજર અને 4 કલાર્ક છે. જો દરેક મેનેજર, ક્લાર્ક અને પટ્ટાવાળાનો પગાર અનુક્રમે 15,000, 9,000 અને 4,500 હોય તો દરેક બ્રાન્ચનું કુલ માસિક પગાર શોધો.

જવાબ :

(5) $A + B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $3B - 2A = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 1 \\ 4 & 15 & -10 \end{bmatrix}$

(7) $B = -\frac{5}{3}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(8) $AB = [27], BA = \begin{bmatrix} 12 & 20 & -4 \\ 9 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(9) $A^2 = \begin{bmatrix} 27 & 3 & -14 \\ 26 & -1 & -7 \\ 28 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

$AA' = \begin{bmatrix} 30 & 24 & 9 \\ 24 & 20 & 10 \\ 9 & 10 & 26 \end{bmatrix}$

(11) $a = 7, b = 2$

(13) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

(14) $x = \frac{91}{2}$

(15) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(16) $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(17) (1) $x = 1, y = -1$ (2) $x = 3, y = 1$

(18) $x = 10, y = 3$

(19) $\begin{bmatrix} 1,11,000 \\ 73.500 \\ 51,000 \end{bmatrix}$

સંકેત	**ઉચ્ચારણ**
| |	નિશ્ચાયક
[ ]	શ્રેણિક
A^{-1}	A inverse (inverse matrix of A) (Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક)
Adj·A	Adjoint Matrix of A (Aનો સહઅવયવ શ્રેણિક)
f: $A \to B$	f is from A to B

❖