# એકમ 14

# કાર્યાત્મક સંશોધન
## Operation Research
### (વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા)


14.0 ઉદ્દેશો
14.1 પ્રાસ્તાવિક
14.2 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો અર્થ
14.3 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ
14.4 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના લક્ષણો
14.5 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું મહત્ત્વ
14.6 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલવાની રીતો
 14.6.1 વાયવ્ય ખૂણાની રીત
 (A) ઉદાહરણો
 14.6.2 ન્યૂનતમ શ્રેણીની રીત
 (A) ઉદાહરણો
 14.6.3 વૉગેલની અંદાજી રીત
 (A) ઉદાહરણો
14.7 તમારી પ્રગતિ ચકાસો.
 14.7.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો
 14.7.2 નીચેના વિધાનો સાચા છે કે ખોટા તે જણાવો
 14.7.3 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.
14.8 ચાવીરૂપ શબ્દો
● સંદર્ભગ્રંથ


**14.0 ઉદ્દેશો :**

કંપનીએ ઉત્પાદિત કરેલ વસ્તુનો જથ્થો જુદા જુદા વેચાણ કેન્દ્રો પર, તેની માંગ (જરૂરિયાત) અનુસાર નિયમિત રીતે પૂરો પાડવો પડે છે. તે માટે જે ખર્ચ થાય છે, તે ખર્ચ કેવી રીતે ઓછો કરી શકાય તે વિકટ પ્રશ્ન છે. આવા જુદા જુદા પ્રશ્નોનો અભ્યાસ કરી જુદી જુદી રીતો દ્વારા ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે. આવી રીતોનો અભ્યાસ કરી વિદ્યાર્થીઓ વ્યવહારિક રીતે પણ પરિવહન ખર્ચ ઘટાડી શકે તેવા હેતુ માટે આ પ્રકરણનો અભ્યાસ વિદ્યાર્થીઓને ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થશે.

**14.1 પ્રસ્તાવના :**

કાર્યાત્મક સંશોધનમાં વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એક આગવું સ્થાન ધરાવે છે. વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એ સુરેખ આયોજનની સમસ્યાનું એક વિશિષ્ટ સ્વરૂપ છે. વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મુખ્ય ઉદ્દેશ ઓછામાં ઓછા સમયે અને ખર્ચે કંપનીમાં ઉત્પાદિત થયેલ વસ્તુઓને વેચાણ કેન્દ્રો પર પહોંચાડવાનો હોય છે. દા.ત. કોઈ એક વસ્તુનું ઉત્પાદન કરતી કંપની જુદી જુદી ત્રણ ફેક્ટરીઓમાં વસ્તુનું ઉત્પાદન કરે છે અને 8 વેચાણ

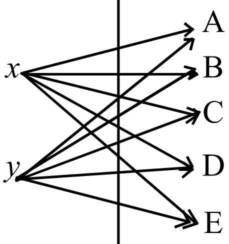
કેન્દ્રો પર તેનું વેચાણ કરવામાં આવે છે. હવે આ ફેક્ટરીઓ પરથી જે તે વેચાણ કેન્દ્રોની જરૂરિયાત અનુસાર કેટલા એકમોનો જથ્થો કઈ ફેક્ટરી પરથી કયા વેચાણ કેન્દ્રો પર પહોંચાડવાથી સમય અને ખર્ચ ઓછો થાય તે નક્કી કરવાનું છે, આવી સમસ્યાને વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા કહે છે.

## 14.2 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો અર્થ :

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એ ઉત્પાદિત થયેલ જથ્થાને વેચાણ કેન્દ્ર પર પહોંચાડવા થતાં ખર્ચને કઈ રીતે ઓછામાં ઓછો કરી શકાય તેની સાથે સંકળાયેલો છે. એક વસ્તુના જથ્થાને જુદા જુદા ઉદ્‌ભવસ્થાનો (જેમ કે કારખાનું, ફેક્ટરી, ઉત્પાદન કેન્દ્ર) પરથી જુદા જુદા પ્રાપ્તિસ્થાનો (જેવા કે વેચાણ કેન્દ્રો, ગોડાઉનો, વખાર, દુકાનો વગેરે) પર પહોંચાડવાનો હોય છે અને આ જથ્થો પહોંચાડવા માટે થતો ખર્ચ અને સમયને ઓછામાં ઓછો કરવાનો હોય છે, જેથી કંપનીને વધુમાં વધુ ફાયદો પ્રાપ્ત થઈ શકે.

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા સમજવા માટે નીચે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પરિસ્થિતિ તપાસીએ.

| પુરવઠો | ફેક્ટરી (ઉદ્‌ભવસ્થાન) | ગોડાઉન (પ્રાપ્તિસ્થાન) | જરૂરિયાત |
|---|---|---|---|
| | | A | $b_1$ |
| $a_1$ | $x$ | B | $b_2$ |
| | | C | $b_3$ |
| $a_2$ | $y$ | D | $b_4$ |
| | | E | $b_5$ |



અહીં ઉત્પાદક પાસે બે ફેક્ટરીઓ $x$ અને $y$ માં વસ્તુનું ઉત્પાદન થાય છે અને પાંચ વેચાણકેન્દ્રો A, B, C, D અને E પર આ ઉત્પાદિત જથ્થાને નિયમિતપણે પહોંચાડવાનો છે. દરેક ફેક્ટરીનો પુરવઠો $a_1$ અને $a_2$ એકમો છે. જ્યારે પ્રત્યેક વેચાણકેન્દ્રની જરૂરિયાત અનુક્રમે $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ અને $b_5$ એકમો છે. કોઈપણ ફેક્ટરી (ઉદ્‌ભવસ્થાન) પરથી કોઈપણ વેચાણકેન્દ્ર (પ્રાપ્તિસ્થાન) પર વસ્તુના એકમો મોકલવાનો એક એકમદીઠ ખર્ચ આપેલ હોય. તો કઈ ફેક્ટરીથી કયા વેચાણ કેન્દ્ર પર વસ્તુના કેટલા એકમો, જરૂરિયાત મુજબ મોકલવા જોઈએ કે જેથી વાહન-વ્યવહારના પરિવહનનો કુલ ખર્ચ ઓછામાં ઓછો (ન્યૂનતમ) થાય. આ પ્રશ્નને વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા કહેવામાં આવે છે. જ્યારે વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં ઘણા બધા ઉત્પત્તિસ્થાનો અને પ્રાપ્તિસ્થાનો હોય ત્યારે તેનો ચાર્ટ બનાવવાથી સમજવામાં અઘરો પડશે તેથી આપણે તેને કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરીશું. તેને વાહન વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ કહેવાય છે.

## 14.3 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતીક સ્વરૂપ :

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતીક સ્વરૂપ નીચે મુજબ મેળવી શકાય. ધારો કે, જુદા જુદા $m$ ઉદ્‌ભવસ્થાનો (ઉત્પાદન કેન્દ્રો) $O_1$, $O_2$ ........... $O_i$ .......... $O_m$ છે, જે દરેક ઉદ્‌ભવસ્થાનોના પુરવઠા અનુક્રમે $a_1$, $a_2$ ........ $a_i$ ........ $a_m$ એકમો છે અને જુદા જુદા $n$ પ્રાપ્તિસ્થાનો (વેચાણકેન્દ્રો) $D_1$, $D_2$ ........ $D_j$ ........ $D_n$ છે. જે દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત અનુક્રમે $b_1$, $b_2$ ........ $b_j$ ........ $b_n$ એકમો છે. ઉદ્‌ભવસ્થાન $O_i$ માંથી પ્રાપ્તિસ્થાન $D_j$ પર મોકલવામાં આવતા એકમોની સંખ્યા $x_{ij}$ વડે દર્શાવીએ. તેમજ ઉદ્‌ભવસ્થાન $O_i$ માંથી પ્રાપ્તિસ્થાન $D_j$ પર જથ્થો મોકલવા માટે થતા ખર્ચને $C_{ij}$ વડે દર્શાવીએ. તો દરેક ઉત્પાદન કેન્દ્રના પુરવઠાને ધ્યાનમાં રાખી પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરીયાત એવી રીતે સંતોષવામાં આવે છે કે જેથી વાહન-વ્યવહારના પરિવહનનો કુલ ખર્ચ ઓછામાં ઓછો (ન્યૂનતમ) થાય. આ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાને ગાણિતીક સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ લખી શકાય.

| ઉદ્ભવ સ્થાનો | પ્રાપ્તિસ્થાનો | | | | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| | $D_1$ | $D_2$ | $D_i$ | $D_n$ | $a_i$ |
| $O_1$ | $x_{11}$ $C_{11}$ | $x_{12}$ $C_{12}$ | $x_{1j}$ $C_{1j}$ | $x_{1n}$ $C_{1n}$ | $a_1$ |
| $O_2$ | $x_{21}$ $C_{21}$ | $x_{22}$ $C_{22}$ | $x_{2j}$ $C_{2j}$ | $x_{2n}$ $C_{2n}$ | $a_2$ |
| . | . . | . . | . . | . . | . |
| . | . . | . . | . . | . . | . |
| $O_i$ | $x_{i1}$ $C_{i1}$ | $x_{i2}$ $C_{i2}$ | $x_{ij}$ $C_{ij}$ | $x_{2n}$ $C_{in}$ | $a_i$ |
| . | . . | . . | . . | . . | . |
| . | . . | . . | . . | . . | . |
| $O_m$ | $x_{m1}$ $C_{m1}$ | $x_{m2}$ $C_{m2}$ | $x_{mj}$ $C_{mj}$ | $x_{mn}$ $C_{mn}$ | $a_m$ |
| જરૂરિયાત $b_j$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_j$ | $b_n$ | $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ |

ઉપરના કોષ્ટકમાં (i, j) ના ખાનામાં $x_{ij}$ એકમો દર્શાવેલ છે, જે i માં ઉદ્ભવસ્થાન $O_i$ થી j માં પ્રાપ્તિસ્થાન $D_j$ તરફ મોકલવાના એકમોની સંખ્યા દર્શાવે છે. $x_{ij}$ ની આવી $m \times n$ કિંમતો અજ્ઞાત છે. જે આપણે નક્કી કરવાની છે. જ્યારે $C_{ij}$ $i$ માં ઉદ્ભવ સ્થાનથી j ના નિર્ધારિત સ્થાન તરફ એ એકમ જથ્થો (માલ) મોકલવાનો એકમદીઠ ખર્ચ દર્શાવે છે. આવી $m \times n$ કિંમતો જ્ઞાત છે.

આ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા સંતુલિત છે. એટલે કે જેટલા એકમોનો પુરવઠો સંતુલિત છે. એટલે કે જેટલા એકમોનો પુરવઠો છે તેટલા જ એકમોની માંગ છે. આ સમસ્યાને ઉકેલ મેળવવા માટે એવી $x_{ij}$ (એકમોની ફાળવણી)ની કિંમત નક્કી કરો કે જેથી દરેક ઉદ્ભવસ્થાનો પરનો પુરવઠો પણ પૂર્ણ થાય અને દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત (માંગ) પણ સંતોષાય.

### 14.4 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના લક્ષણો અથવા ધારણાઓ :

(1) દરેક ઉત્પાદન કેન્દ્રો પર વસ્તુનો પ્રાપ્ય જથ્થો મર્યાદિત હોય છે.

(2) દરેક વેચાણ કેન્દ્રો પર વસ્તુઓની માંગ રહેલી હોય છે.

(3) દરેક ઉત્પાદન કેન્દ્ર પર વસ્તુનો પ્રાપ્ય જથ્થો અને દરેક વેચાણ કેન્દ્રની માંગના એકમો જાણીતા હોય છે.

(4) દરેક ઉત્પાદન કેન્દ્રો પરથી વેચાણ કેન્દ્ર પર વસ્તુનો એક એકમ પહોંચાડવાનો ખર્ચ આપેલ હોય છે.

(5) પ્રાપ્ય જથ્થો અને માંગ હંમેશા પૂર્ણાંક હોય છે.

(6) આ પ્રશ્નમાં શક્ય તેટલા ઓછા ખર્ચે જુદા જુદા વેચાણ કેન્દ્રોની માંગ જુદા જુદા ઉત્પાદન કેન્દ્રના જથ્થા દ્વારા સંતોષવાનો હોય છે.

### 14.5 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું મહત્ત્વ અથવા તેના ઉપયોગો :

(1) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના અભ્યાસ દ્વારા કોઈ પણ કંપની તેના ઉત્પાદિત વસ્તુને તે કંપની સાથે સંકળાયેલ વખારો કે ગોડાઉનોમાં મોકલવા માટેનું ઓછામાં ઓછા ખર્ચે આયોજન કરી શકે છે.

(2) જુદા જુદા બસ ડેપોમાં અમુક નિશ્ચિત સંખ્યામાં બસો ઉપલબ્ધ હોય છે. તેમને જુદા જુદા ટર્મિનલ સ્થાનો પર મોકલવાની હોય છે અને દરેક ટર્મિનલ સ્થાનની જરૂરિયાત કેટલી છે તે પણ જાણતા હોઈએ છીએ. આ બસો ડેપો પરથી જુદા જુદા ટર્મિનલ સ્થાનો પર કેવી રીતે મોકલવી જોઈએ કે જેથી કુલ પરિવહન ખર્ચ ઓછું થાય કે મુસાફરોને વધુ લાભ મળે તેનું આ પદ્ધતિથી આયોજન કરી શકાય છે.

(3) જુદા જુદા બંદરો પર ઉતરતા માલને અલગ અલગ ગોડાઉન પર ઓછામાં ઓછા ખર્ચે માલને પહોંચાડવાનું આયોજન કરી શકાય છે.

(4) રેલવે દ્વારા જુદા જુદા રેલવે સ્ટેશનો પર ઉતરતા માલને જે તે વસ્તુના વખારો તરફ ન્યૂનતમ સમય કે ખર્ચે મોકલવાનું આયોજન કરી શકાય છે.

(5) નાણાંકીય રોકાણો માટેની વિવિધ યોજનાઓમાં કયા પ્રકારની યોજનામાં કેટલું રોકાણ કરી શકાય કે જેથી તેમાંથી મળતું વળતર મહત્તમ થાય તે માટેનું આયોજન કરી શકાય છે.

(6) શસ્ત્રોના ભંડારોમાંથી યુદ્ધની સરહદ પર વિવિધ પ્રકારના સંરક્ષણના સાધનો તેમજ લશ્કરી એકમોની જરૂરિયાતવાળા લશ્કરી થાણાઓ ઉપર લઘુત્તમ સમયે શસ્ત્રો મોકલવાનું આયોજન કરી શકાય છે.

**14.6 વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલની રીતો :**

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો પ્રારંભિક મૂળભૂત પ્રાપ્ય ઉકેલ મેળવવા માટે જુદી-જુદી રીતોમાંથી આપણે નીચે પ્રમાણેની ત્રણ રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) વાયવ્ય ખૂણાની રીત (North-West Corner Method)

(2) ન્યૂનતમ શ્રેણિકની રીત (Least Cost Method)

(3) વૉગેલની અંદાજી રીત (Vogel's Approximation Method)

**14.6.1 વાયવ્ય ખૂણાની રીત :**

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો પ્રાથમિક મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવાની આ ખૂબ જ સરળ રીત છે. આ રીતમાં એકમદીઠ ખર્ચને ધ્યાનમાં લીધા વગર વસ્તુઓના એકમોની ફાળવણી કરવામાં આવે છે. આ રીતને નીચે મુજબ પગથીયામાં વિભાજીત કરી શકાય છે.

**પગથિયું-1 :** આ રીતમાં વાયવ્ય ખૂણા તરફ આવેલ ખાનામાં એટલે કે ડાબી બાજુ સૌથી ઉપરના ખાનામાં તેને અનુરૂપ હારનો (પ્રથમ હારનો) પુરવઠો અને પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત બંનેમાંથી જે ઓછા હોય તેટલા એકમો ફાળવવામાં આવે છે.

આમ આ રીતમાં (1, 1) ખાનાથી ફાળવણીની શરૂઆત થાય છે અને તેમાં પ્રથમ હારનો પુરવઠો $a_1$ અને પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત $b_1$ માંથી જે ઓછા એકમો હોય તેટલા એકમો (1,1) ખાનામાં ફાળવવામાં આવે છે. એટલે કે (1, 1) ખાનામાં લઘુત્તમ $(a_1, a_2)$ જેટલા એકમો ફાળવવામાં આવે છે.

**પગથિયું-2 (A) :** જો પગથિયા-1માં પ્રથમ હારનો પુરવઠો $a_1$ પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત $b_1$ કરતાં ઓછો હોય એટલે કે $a_1 < b_1$ હોય તો (1, 1) ખાનામાં $a_{11}$ એકમો ફાળવવામાં આવ્યા હોય છે, તેથી પ્રથમ હાર બંધ થશે. જ્યારે સ્તંભમાં $(b_1 - a_1)$ એકમો બાકી રહેશે. એટલે કે પ્રથમ હારના કોઈ પણ ખાનામાં ફાળવણી થઈ શકશે નહિ. હવે બીજી હારમાં પ્રથમ સ્તંભ (2, 1) ખાનામાં જાઓ અને તેમાં એકમોથી ફાળવણી કરવા માટે પગથિયું-1ને અનુસરો.

**(B)** જો પગથિયું-1માં પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત $b_1$ પ્રથમ હારની માંગ $a_1$ કરતાં ઓછી હોય એટલે કે $b_1 < a_1$ હોય તો (1, 1) ખાનામાં $b_1$ એકમો ફાળવવામાં આવતા હોય છે. તેથી પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે. જ્યારે પ્રથમ હારમાં $(a_1 - b_1)$ એકમો બાકી રહેશે. હવે બાજુમાં પ્રથમ હાર અને બીજા સ્તંભ એટલે કે (1, 2) ખાનામાં જાઓ અને તેમાં એકમોની ફાળવણી કરવા માટે પગથિયું-1 અનુસરો.

**પગથિયું-3 :** આપેલ ઉદ્‌ભવસ્થાનોના પુરવઠા દ્વારા બધા જ પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત સંતોષાય ત્યાં સુધી ઉપર મુજબની રીતનું પુનરાવર્તન કરો. એટલે કે વાહન-વ્યવહારના કોષ્ટકમાં જમણી બાજુના સૌથી નીચે (અગ્નિ ખૂણામાં)ના ખાનામાં એકમોની ફાળવણી કરવામાં ન આવે ત્યાં સુધી આ રીતનું પુનરાવર્તન કરો.

**પગથિયું-4 :** આ રીતે ફાળવાયેલ તમામ એકમો $x_{ij}$ ને ઉકેલ કહેવામાં આવે છે. આ ઉકેલ દ્વારા કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij} \cdot x_{ij}$ દ્વારા મેળવો.

**14.6.1 (A) ઉદાહરણો :**

**ઉદાહરણ-1 :** નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મૂળભૂત પ્રાપ્ય ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણાની રીતે મેળવો.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 8 | 6 | 14 | 30 |
| $O_2$ | 2 | 10 | 4 | 40 |
| $O_3$ | 8 | 18 | 10 | 40 |
| જરૂરિયાત | 45 | 35 | 30 | 110 |

**જવાબ :**

**પગથિયું-1 :** વાયવ્ય ખૂણામાં એકમોની ફાળવણીની શરૂઆત વાયવ્ય ખૂણાથી એટલે કે (1, 1) ખાનાથી કરવામાં આવે છે. પ્રથમ હાર $a_1$ નો પુરવઠો 30 એકમ અને પ્રથમ સ્તંભ $D_1$ ની જરૂરિયાત 45 એકમોની છે. તેથી લઘુત્તમ (30, 40) = 30 હોવાથી આ ખાનું (1, 1) માટે વધુમાં વધુ $x_{11}$ = 30 એકમો ફાળવી શકાય છે. આ ફાળવણી બાદ પ્રથમ હારના તમામ એકમો વપરાઈ ગયા હોવાથી પ્રથમ હાર બંધ થશે. પ્રથમ સ્તંભમાં બાકી વધેલા એકમો 45 – 30 = 15 રહેશે. (1, 1) ખાનામાં 30 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|
| $D_1$ | [30] 8 | – 6 | – 14 | ~~30~~ 0 |
| $D_2$ | 2 | 10 | 4 | 40 |
| $D_3$ | 8 | 18 | 10 | 40 |
| જરૂરિયાત | ~~45~~ 15 | 15 | 30 | 110 |

**પગથિયું-2 :** હવે વાયવ્ય ખૂણાનું ખાનું (2, 1) છે. તેમાં $O_2$ હારના કુલ એકમો 40 અને $D_1$ સ્તંભના કુલ એકમો 15 છે. તેમાં લઘુત્તમ (40, 15) = 15 હોવાથી અહીં $x_{21}$ એકમો ફાળવવામાં પ્રથમ સ્તંભની જરૂરિયાત પૂર્ણ થશે. તેથી તેને બંધ કરો. $O_2$ હારમાં પુરવઠો (40 – 15) = 25 એકમો વધશે.

**પગથિયું-3 :** પછીની ફાળવણી (2, 2) ખાના માટે કરો. અગાઉ પ્રમાણે અહીં લઘુત્તમ (25, 35) = 25 હોવાથી આ ખાનામાં $x_{22}$ = 25 એકમોની ફાળવણી થશે. $O_2$ મી હાર બંધ થશે અને $D_2$ સ્તંભની જરૂરિયાત (35 – 25) = 10 એકમો વધશે. હવે બાકીના કોષ્ટકમાં (3, 2) ખાનામાં ફાળવણી થશે. જે લઘુત્તમ (10, 40) = 10 થશે તેથી (3, 2) ખાનામાં $x_{32}$ = 10 એકમો ફાળવતાં $O_3$ ની હારમાં (40 – 10) = 30 એકમો વધશે અને $D_2$ મો સ્તંભ બંધ થશે હવે એક માત્ર (3, 3) ખાનું બાકી રહેતાં તેમાં 30 એકમોને ફાળવતાં આખા કોષ્ટકમાં ફાળવણી પૂર્ણ થશે. કોષ્ટકમાં વહેંચણી કરેલા એકમોનો ખાનાની ડાબી બાજુ ઉપર તરફ⌋ માં દર્શાવેલા છે.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|
| $D_1$ | [30] 8 | – 6 | – 14 | ~~30~~ 0 |
| $D_2$ | [15] 2 | [25] 10 | – 4 | ~~40~~ ~~25~~ 0 |
| $D_3$ | – 10 | [10] 30 | [30] 10 | ~~40~~ ~~30~~ 0 |
| જરૂરિયાત | ~~45~~ ~~15~~ 0 | ~~35~~ ~~10~~ 0 | ~~30~~ 0 | 110 |

**પગથિયું-4 :** ફાળવણી કરેલ ખાનાનો ઉકેલ નીચે મુજબ છે.

$x_{11} = 30, x_{21} = 15, x_{22} = 25, x_{32} = 10$ અને $x_{33} = 30$

આ ઉપરથી વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાને કુલ ખર્ચ નીચે મુજબ મળે છે.

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\, x_{ij}$

$\therefore\ Z = (8 \times 30) + (2 \times 15) + (10 \times 25) + (18 \times 10) + (10 \times 30)$

$\therefore\ Z = 240 + 30 + 250 + 180 + 300$

$\therefore\ Z = 1000$

**ઉદાહરણ-2 :** નીચેની વાહન વ્યવહારની સમસ્યા વાયવ્ય ખૂણાની રીતે ઉકેલો અને કુલ પરિવહન ખર્ચ મેળવો.

| પ્લાન્ટ | ગોડાઉન | | | | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| | P | Q | R | S | |
| A | 8 | 16 | 14 | 20 | 80 |
| B | 8 | 12 | 10 | 06 | 50 |
| C | 10 | 15 | 04 | 12 | 70 |
| માંગ | 16 | 70 | 90 | 24 | 200 |

ઉકેલ : વાયવ્ય ખૂણાની રીતે આપેલ સમસ્યાનો પ્રાથમિક પ્રાપ્ય ઉકેલ નીચે મુજબ મળે છે.

| પ્લાન્ટ | ગોડાઉન | | | | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| | P | Q | R | S | |
| A | [16] 8 | [64] 16 | – 14 | – 20 | ~~80~~ ~~64~~ 0 |
| B | – 8 | [6] 12 | [44] 10 | – 6 | ~~50~~ ~~44~~ 0 |
| C | – 10 | – 15 | [46] 4 | [24] 12 | ~~70~~ ~~24~~ 0 |
| માંગ | ~~16~~ 0 | ~~70~~ ~~6~~ 0 | ~~90~~ ~~46~~ 0 | ~~24~~ 0 | 200 |

**સમજૂતિ :**

સૌપ્રથમ વાયવ્ય ખૂણામાં એટલે કે (1,1) ખાનામાં ફાળવણી કરેલ છે. તેથી $x_{11}$ = લઘુત્તમ (80,16) = 16 એકમોની ફાળવણી (1,1) ખાનામાં કરેલ છે. આમ પ્રથમ સ્તંભની માંગ સંતોષાશે તેથી પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે. હવે બીજી ફાળવણી (1,2) ખાનામાં થશે. તેથી $x_{12}$ = લઘુત્તમ (64,70) = 64 એકમોની ફાળવણી (1,2) ખાનામાં કરો. તેથી પ્રથમ હારનો પુરવઠો પૂર્ણ થશે, માટે પ્રથમ હાર બંધ થશે. ત્રીજી ફાળવણી (2,2) ખાનામાં $x_{22}$ = લઘુત્તમ (50,6) = 6 એકમોની કરો તેથી બીજો સ્તંભ બંધ થશે. ચોથી ફાળવણી (2,3) ખાનામાં $x_{23}$ = લઘુત્તમ (44, 90) = 44 એકમોની કરો. તેથી બીજી હાર બંધ થશે. પાંચમી ફાળવણી (3,3) ખાનામાં $x_{33}$ = લઘુત્તમ (70,46) = 46 એકમોની કરો, તેથી ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. છઠ્ઠી ફાળવણી (3,4) ખાનામાં $x_{34}$ = લઘુત્તમ (24,24) = 24 એકમોની કરો. તેથી ત્રીજી હાર અને ચોથો સ્તંભની ફાળવણી પણ પૂર્ણ થશે. આમ તમામ માંગ અને પુરવઠાની ફાળવણી પૂર્ણ થશે.

**મૂળભૂત ઉકેલ :** $x_{11} = 16, x_{12} = 64, x_{22} = 6, x_{23} = 44, x_{33} = 46$ અને $x_{34} = 24$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\, x_{ij}$

$= (8 \times 16) + (16 \times 64) + (12 \times 6) + (10 \times 44) + (4 \times 46) + (12 \times 24)$

$= 128 + 1024 + 72 + 440 + 184 + 288$

$= 2136$

**ઉદાહરણ-3 :** વાયવ્ય ખૂણાની રીતે નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મૂળભૂત પ્રારંભિક ઉકેલ મેળવો. તેમજ કુલ ખર્ચ પણ મેળવો.

| પ્રતિ તરફથી | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | પ્રાપ્ય જથ્થો |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 3 | 5 | 6 | 4 | 2 | 60 |
| $O_2$ | 2 | 1 | 5 | 8 | 7 | 50 |
| $O_3$ | 6 | 8 | 7 | 6 | 5 | 35 |
| $O_4$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 8 | 55 |
| માંગ | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | |

**ઉકેલ :**

| પ્રતિ તરફ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | પ્રાપ્ય જથ્થો |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 20 3 | 30 5 | 10 6 | – 4 | – 2 | ~~60~~ ~~40~~ ~~10~~ 0 |
| $O_2$ | – 2 | – 1 | 30 5 | 20 8 | – 7 | ~~50~~ ~~20~~ 0 |
| $O_3$ | – 6 | – 8 | – 7 | 30 6 | 5 5 | ~~35~~ ~~5~~ 0 |
| $O_4$ | – 4 | – 3 | – 2 | – 1 | 55 8 | ~~55~~ 0 |
| માંગ | ~~20~~ 0 | ~~30~~ 0 | ~~40~~ ~~30~~ 0 | ~~50~~ ~~30~~ 0 | ~~60~~ ~~55~~ 0 | 200 |

**ઉકેલ :**

$x_{11} = 20,\ x_{12} = 30,\ x_{13} = 10,\ x_{23} = 30,\ x_{24} = 20,\ x_{34} = 30,\ x_{35} = 5,\ x_{45} = 55$

$Z = (3 \times 20) + (5 \times 30) + (6 \times 10) + (5 \times 30) + (8 \times 20) + (6 \times 30) + (5 \times 5) + (8 \times 55)$

$= 60 + 150 + 60 + 150 + 160 + 180 + 25 + 440$

$\therefore Z = 1225$

### 14.6.2 ન્યૂનતમ શ્રેણિકની રીત અથવા લઘુત્તમ ખર્ચની રીત (Matrix-Minimum Method or Least Cost Method) :

વાયવ્ય ખૂણાની રીતમાં એકમોની ફાળવણી કરતી વખતે વસ્તુનો પુરવઠો અને જરૂરિયાતને જ ધ્યાનમાં લઈ ફાળવણી કરવામાં આવે છે. પરંતુ આ સમસ્યાનો મહત્ત્વનો એકમ, ખર્ચની અવગણના કરવામાં આવે છે. તેથી આ રીતમાં સમસ્યાનો ઉકેલ મળે છે. પરંતુ ખર્ચ ઓછો થતો નથી.

ન્યૂનતમ શ્રેણિકની રીતમાં વાયવ્ય ખૂણાની રીતની મર્યાદાઓ દૂર કરી આપેલ ખર્ચ શ્રેણિકમાંથી ન્યૂનતમ ખર્ચને ધ્યાનમાં લઈ ફાળવણી કરવામાં આવે છે અને તેથી ન્યૂનતમ શ્રેણિકની રીત એ વાયવ્ય ખૂણાની રીત કરતાં વધુ સારી રીત છે. આ રીતે મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવા માટે નીચે મુજબના પગથિયા કરવામાં આવે છે.

**પગથિયું-1 :** સૌપ્રથમ બધી જ હાર અને બધા જ સ્તંભમાંથી (માંગ અને પુરવઠાની કિંમત સિવાય) લઘુત્તમ ખર્ચ એટલે કે નાનામાં નાની કિંમત જે ખાનામાં હોય તે ખાનું પસંદ કરો. ધારો કે લઘુત્તમ ખર્ચ (i, j) ખાનામાં છે. તેથી તેને અનુરૂપ પુરવઠો $a_i$ અને માંગ $b_j$ એકમોમાંથી જે ઓછા હોય તેટલા એકમોની ફાળવણી (i, j) ખાનામાં કરો. આ ફાળવણીને $x_{ij}$ વડે દર્શાવીશું.

**પગથિયું-2 (A) :** જો i મી હારમાં પુરવઠો $a_i$ કરતાં j મા સ્તંભની માંગ $b_j$ ની કિંમત વધુ એટલે કે $[a_i < b_j]$ હોય તો $x_{ij} = a_i$ એકમોની ફાળવણી કરો તેથી i મી હારનો પુરવઠો પૂર્ણ થશે. માટે i મી હાર બંધ થશે. એટલે કે હવે i મી હારના કોઈપણ ખાનામાં ફાળવણી કરી શકાશે નહિ અને j માં સ્તંભની માંગ $b_j - a_i$ બાકી રહેશે.

**(B)** જો i મી હારનો પુરવઠો $a_i$ કરતાં j માં સ્તંભની માંગ $b_j$ ઓછી $[a_i > b_j]$ હોય તો $x_{ij} = b_j$ એકમોની ફાળવણી કરો, તેથી j માં સ્તંભની માંગ સંતોષાશે માટે j મો સ્તંભ બંધ થશે.

**(C)** જો લઘુત્તમ ખર્ચના ઘટકો એક કરતાં વધારે વખત આવતા હોય ત્યારે નીચે પ્રમાણે ફાળવણી કરો.

– લઘુત્તમ ખર્ચવાળા ખાનાઓમાંથી જે ખાનામાં વધુ એકમોની ફાળવણી થતી હોય તે ખાનું પસંદ કરી ફાળવણી કરો.

– જો લઘુત્તમ ખર્ચવાળા ખાનાઓમાં ફાળવણી પણ સરખા એકમોની થતી હોય તો કોઈપણ એક ખાનામાં ફાળવણી કરો.

**પગથિયું-3 :** આપેલ ઉત્પત્તિ સ્થાનના પુરવઠા દ્વારા બધા જ પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત ન સંતોષાય ત્યાં સુધી ઉપર મુજબની રીતનું પુનરાવર્તન કરો.

**14.6.2 (A) ઉદાહરણો :**

**ઉદાહરણ-4 :** નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મૂળભૂત પ્રાપ્ય ઉકેલ ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતથી મેળવો.

| ઉદ્ભવ | પ્રાપ્તિસ્થાન | | | | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| સ્થાન | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | |
| $O_1$ | 5 | 8 | 4 | 10 | 105 |
| $O_2$ | 6 | 1 | 12 | 3 | 60 |
| $O_3$ | 9 | 11 | 3 | 2 | 60 |
| માંગ | 30 | 75 | 90 | 30 | 225 |

**ઉકેલ :** સૌપ્રથમ આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ (ન્યૂનતમ) ખર્ચ ધરાવતું ખાનું શોધો.

આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ 1 એકમ છે, જે (2,2) ખાનામાં છે. માટે $x_{22}$ = લઘુત્તમ (60,75) = 60 (જ્યાં (60,75) એ લઘુત્તમ ખર્ચ ખાનાની હારનો પુરવઠો અને સ્તંભની જરૂરિયાત છે.) એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. તેથી બીજી હારનો પુરવઠો પૂર્ણ થશે. તેથી બીજી હાર બંધ થશે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

| ઉદ્ભવ સ્થાન | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 5 | 8 | 4 | 10 | 105 |
| $O_2$ | – 6 | [60] 1 | – 12 | – 3 | ~~60~~ 0 |
| $O_3$ | 9 | 11 | 3 | 2 | 60 |
| માંગ | 30 | ~~75~~ 15 | 90 | 30 0 | 225 |

હવે બાકીના કોષ્ટકમાં (બીજી હાર સિવાયના) લઘુત્તમ ખર્ચ (3,4) ખાનામાં 2 એકમ છે. આમ $x_{34}$ = લઘુત્તમ (60,30) = 30 એકમોની ફાળવણી કરીશું તેથી ચોથો સ્તંભ બંધ થશે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

| ઉદ્ભવ સ્થાન | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 5 | 8 | 4 | – 10 | 105 |
| $O_2$ | – 6 | [60] 1 | – 12 | – 3 | ~~60~~ 0 |
| $O_3$ | 9 | 11 | 3 | [30] 2 | ~~60~~ 30 |
| માગ | 30 | ~~75~~ 15 | 90 | ~~30~~ 0 | 225 |

હવે બાકીના કોષ્ટક (બીજી હાર અને ચોથો સ્તંભ સિવાયનો) લઘુત્તમ ખર્ચ (3,3) ખાનામાં 3 એકમ છે. માટે $x_{33}$ = લઘુત્તમ (30,90) = 30 એકમોની ફાળવણી થશે. તેથી ત્રીજી હાર પણ બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણિકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ (1,3) ખાનામાં 4 એકમ છે. માટે $x_{13}$ = લઘુત્તમ (105,60) = 60 એકમોની ફાળવણી થશે. હવે ન્યૂનતમ ખર્ચ (1,1) ખાનામાં 5 એકમ છે. માટે $x_{11}$ = લઘુત્તમ (45,30) = 30 એકમોની ફાળવણી થશે. હવે ફક્ત (1,2) ખાનું બાકી રહેશે. જ્યાં પુરવઠો = 15 એકમો બાકી રહે છે. માટે $x_{12}$ = 15 એકમોની ફાળવણી કરો. તેથી તમામ ફાળવણી પૂણ થશે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

| ઉદ્ભવ સ્થાન | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 30 5 | 15 8 | 60 4 | – 10 | ~~105~~ ~~45~~ ~~15~~ 0 |
| $O_2$ | – 6 | 60 1 | – 12 | – 3 | ~~60~~ 0 |
| $O_3$ | – 9 | – 11 | 30 3 | 30 2 | ~~60~~ ~~30~~ 0 |
| માંગ | ~~30~~ 0 | ~~75~~ ~~15~~ 0 | ~~90~~ ~~60~~ 0 | ~~30~~ 0 | 225 |

**ઉકેલ :** $x_{11} = 30, x_{12} = 15, x_{13} = 60, x_{22} = 60, x_{33} = 30$ અને $x_{34} = 30$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\, x_{ij}$

$= (5 \times 30) + (8 \times 15) + (4 \times 60) + (1 \times 60) + (3 \times 30) + (2 \times 30)$

$= 150 + 120 + 240 + 60 + 90 + 60$

$= 720$

**ઉદાહરણ-5 :** લઘુત્તમ ખર્ચની રીતે નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવો.

| ગોડાઉન | સ્ટોર | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | પુરવઠો |
| $G_1$ | 7 | 6 | 9 | 12 | 15 | 30 |
| $G_2$ | 18 | 8 | 14 | 5 | 14 | 15 |
| $G_3$ | 12 | 9 | 11 | 10 | 18 | 20 |
| $G_4$ | 6 | 11 | 10 | 7 | 9 | 5 |
| જરૂરિયાત | 14 | 12 | 16 | 10 | 18 | 70 |

**સમજૂતિ :**

સૌપ્રથમ આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ ધરાવતું ખાનું શોધો, જે ખાનું (2,4) માં 5 એકમ છે, માટે $x_{24}$ = લઘુત્તમ (15,10) = 10 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. તેથી ચોથો સ્તંભ બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ 6 એકમવાળા બે ખાના (1,2) અને (4,1) છે. જે બંને ખાનામાં ફાળવણી જોતાં (1,2) ખાનામાં (4,1) ખાના કરતાં વધુ ફાળવણી કરી શકાય છે. તેથી પ્રથમ $x_{12}$ = લઘુત્તમ (30,12) = 12 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. ત્યારબાદ $x_{41}$ = લઘુત્તમ (5,14) = 5 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. તેથી બીજો સ્તંભ અને ચોથી હાર બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ ખર્ચ 7 એકમ (1,1) ખાનામાં છે. માટે $x_{11}$ = લઘુત્તમ (18,9) = 9 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. તેથી પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ એકમ 9 છે. જે (1,3) ખાનામાં છે. માટે $x_{13}$ = લઘુત્તમ (9,16) = 9 એકમોની ફાળવણી થશે. તેથી પ્રથમ હાર બંધ થશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં લઘુત્તમ એકમ 9 છે. જે (3,3) ખાનામાં છે. માટે $x_{33}$ = લઘુત્તમ (20,7) = 7 એકમોની ફાળવરી થશે. તેથી ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. હવે ફક્ત પાંચમા સ્તંભમાં ઘટકો ફાળવી શકાશે તેથી પ્રથમ (2,5) ખાનામાં ફાળવણી $x_{25}$ = લઘુત્તમ (5,18) = 5 એકમોની થશે, જ્યારે છેલ્લે (3,5) ખાનું બાકી રહેશે. જેમાં

પુરવઠો અને જરૂરિયાત બંને 13 એકમ બાકી રહે છે. તેથી $x_{35}$ = 13 એકમોની ફાળવણી કરો. આમ, તમામ ફાળવણી પૂર્ણ થાય છે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

| ગોડાઉન | સ્ટોર | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | પુરવઠો |
| $G_1$ | [9] 7 | [12] 6 | [9] 9 | – 12 | – 15 | ~~30~~ ~~18~~ ~~9~~ 0 |
| $G_2$ | – 18 | – 8 | – 14 | [10] 5 | [5] 14 | ~~15~~ ~~5~~ 0 |
| $G_3$ | – 12 | – 9 | [7] 11 | – 10 | [13] 18 | ~~20~~ ~~13~~ 0 |
| $G_4$ | [5] 6 | – 11 | – 10 | – 7 | 9 | ~~5~~ 0 |
| જરૂરિયાત | ~~14~~ ~~9~~ 0 | ~~12~~ 0 | ~~16~~ ~~7~~ 0 | 10 0 | ~~18~~ ~~13~~ 0 | 70 |

**ઉકેલ :** $x_{11} = 9, x_{12} = 12, x_{13} = 9, x_{24} = 10, x_{25} = 5, x_{33} = 7, x_{35} = 13, x_{41} = 5$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\, x_{ij}$

$= (7 \times 9) + (6 \times 12) + (9 \times 9) + (5 \times 10) + (14 \times 5) + (11 \times 7) + (18 \times 13) + (6 \times 5)$

$= 63 + 72 + 81 + 50 + 70 + 77 + 234 + 30$

$= 677$

**ઉદાહરણ-6 :** નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ લઘુત્તમ ખર્ચની રીતે મેળવો.

| ઉદ્‌ભવ | પ્રાપ્તિસ્થાન | | | | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| સ્થાન | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | |
| $O_1$ | 4 | 6 | 7 | 4 | 40 |
| $O_2$ | 5 | 10 | 9 | 7 | 20 |
| $O_3$ | 8 | 6 | 5 | 8 | 20 |
| જરૂરિયાત | 25 | 10 | 15 | 30 | 80 |

**સમજૂતિ :**

આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 4 બે ખાના (1,1) અને (1,4)માં આવે છે. પરંતુ ખાના (1,1)માં 25 એકમોની અને ખાના (1,4)માં 30 એકમોની ફાળવણી થઈ શકે છે. તેથી જે ખાનામાં વધુ એકમો ફાળવી શકાતા હોય તેવા ખાનામાં પ્રથમ ફાળવણી કરવા માટે $x_{14}$ = લઘુત્તમ (40,30) = 30 એકમોની ફાળવણી થશે. તેથી ચોથો સ્તંભ બંધ થશે. બીજી ફાળવણી (1,1) ખાનામાં કરો. પરંતુ પ્રથમ હારમા (40-30) = 10 એકમો બાકી રહે છે. માટે $x_{11}$ = લઘુત્તમ (10,25) = 10 એકમોની ફાળવણી થશે. તેથી પ્રથમ હાર પણ બંધ થશે. હવે બાકીના ખર્ચ શ્રેણીકમાં સૌથી નાનો ઘટક 5 બે વખત ખાના (2,1) અને (3,3)માં આવે છે. જે બંને ખાનામાં ફાળવણી પણ સરખી એટલે 15 એકમોની થાય છે. તેથી ગમે તે એક ખાનું પસંદ કરી ફાળવણી કરી શકાય. અહીં આપણે $x_{21}$ = લઘુત્તમ (20,15) = 15 એકમોની ફાળવણી કરેલ છે. પછી $x_{33}$ = લઘુત્તમ (20,15) = 15 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી પ્રથમ અને ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. હવે ફક્ત બીજા સ્તંભમાં બે ખાનાઓ બાકી રહેશે. જેમાં ફાળવણી કરતાં $x_{32}$ = લઘુત્તમ (5,10) = 5 $x_{22}$ = લઘુત્તમ (5,5) = 5 એકમોની ફાળવણી કરતાં ફાળવણી પૂર્ણ થશે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

| ઉદ્ભવ સ્થાન | પ્રાપ્તિસ્થાન $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 10   4 | –   6 | –   7 | 30   4 | ~~40~~ ~~10~~ 0 |
| $O_2$ | 15   5 | 5   10 | –   9 | –   7 | ~~20~~ ~~5~~ 0 |
| $O_3$ | –   8 | 5   6 | 15   5 | –   8 | ~~20~~ ~~5~~ 0 |
| જરૂરિયાત | ~~25~~ ~~15~~ 0 | ~~10~~ ~~5~~ 0 | ~~15~~ 0 | ~~30~~ 0 | 80 |

**ઉકેલ :** $x_{11} = 10, x_{14} = 30, x_{21} = 15, x_{22} = 5, x_{32} = 5, x_{33} = 15$

કુલ લઘુત્તમ ખર્ચ = $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\, x_{ij}$

$\therefore Z = (4 \times 10) + (4 \times 30) + (5 \times 15) + (10 \times 5) + (6 \times 5) + (5 \times 15)$

$= 40 + 120 + 75 + 50 + 30 + 75$

$= 390$

**14.6.3 વૉગેલની અંદાજી રીત (Vogel's Approximation Method [VAM]) :**

વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના પ્રારંભિક ઉકેલ માટેની બધી જ રીતો કરતાં આ રીત વધુ ચઢિયાતી છે, કારણ કે આ રીત દ્વારા મળતો મૂળભૂત પ્રાપ્ય ઉકેલ, ઇષ્ટ ઉકેલની વધુ નજીક હોય છે. બાકીની રીતોની સરખામણીમાં વૉગેલની રીતે મેળવેલ ઉકેલમાં કુલ ખર્ચ પણ ઓછો થાય છે. વૉગેલની રીતની સમજૂતી નીચે મુજબ છે.

**પગથિયું-1 :** સૌપ્રથમ આપેલ સમસ્યાના ખર્ચ શ્રેણીકની દરેક હાર માટે ખર્ચની સૌથી બે નાની કિંમતો (એટલે કે હારની સૌથી નાની કિંમત અને તેના પછી આવતી નાની કિંમત) વચ્ચે તફાવત શોધવામાં આવે છે. આ તફાવતોને જે તે હારની જમણી બાજુએ છેલ્લે "હારના તફાવત" એમ મથાળા હેઠળ લખવામાં આવે છે.

**પગથિયું-2 :** હારના તફાવતો લખ્યા બાદ દરેક સ્તંભમાં ખર્ચની સૌથી બે નાની કિંમતો (એટલે કે સ્તંભની સૌથી નાની કિંમત અને તેના પછી આવતી નાની કિંમત. નોંધ : બે નાની કિંમતો સમાન હોય તો તફાવત 0 (શૂન્ય) આવશે.) વચ્ચેના તફાવત શોધવામાં આવે છે. આ તફાવતોને જે તે સ્તંભની નીચે "સ્તંભના તફાવત" મથાળા હેઠળ લખવામાં આવે છે.

**પગથિયું-3 :** હાર અને સ્તંભના તફાવતો મેળવ્યા બાદ આ બંનેમાં સૌથી મોટો તફાવત હોય તે હાર કે સ્તંભને પસંદ કરવામાં આવે છે. હવે પસંદ કરેલ હાર અથવા સ્તંભમાંથી સૌથી ઓછો ખર્ચ ધરાવતું ખાનું શોધવામાં આવે છે. ધારે કે (i, j) ખાનામાં સૌથી ઓછો ખર્ચ છે, તેથી પુરવઠો $a_i$ અને માંગ $b_j$ માંથી જે ઓછા હોય તેટલા એકમો (i, j) ખાનામાં ફાળવણી કરવામાં આવે છે. હવે જે હારનો પુરવઠો કે સ્તંભની જરૂરિયાત સંતોષાય હોય તે હાર કે સ્તંભ બંધ કરવામાં આવે છે.

- જો લઘુત્તમ ખર્ચ ધરાવતાં ખાના પણ એક કરતાં વધુ વખત આવતા હોય તો લઘુત્તમ ખર્ચવાળા ખાનાઓમાં વધુ એકેમોની ફાળવણી કરી શકાતી હોય તેવું ખાનું પસંદ કરી ફાળવણી કરવામાં આવે છે.
- હવે જો પસંદ કરેલ લઘુત્તમ ખર્ચવાળા ખાનામાં પણ સરખા એકમોની ફાળવણી થતી હોય તેવા સંજોગોમાં તેમાંથી કોઈપણ એક ખાનું પસંદ કરી ફાળવણી કરવામાં આવે છે.

**પગથિયું-4 :** આપેલ સમસ્યામાં ઉત્પત્તિસ્થાનના પુરવઠા દ્વારા બધા જ પ્રાપ્તિસ્થાનોની જરૂરિયાત ન સંતોષાય ત્યાં સુધી પગથિયું-1થી પગથિયું-3ની પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરતા રહો.

**14.6.3 (A) ઉદાહરણો :**

**ઉદાહરણ-7 :** વૉગેલની અંદાજી રીતે નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મૂળભૂત ઉકેલ મેળવો.

ઉદ્ભવ પ્રાપ્તિસ્થાન પુરવઠો

| સ્થાન | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 5 | 9 | 8 | 6 | 30 |
| $O_2$ | 4 | 7 | 6 | 9 | 25 |
| $O_3$ | 10 | 8 | 3 | 7 | 45 |
| જરૂરિયાત | 20 | 40 | 30 | 10 | 100 |

**સમજૂતિ :**

સૌપ્રથમ આપેલ ખર્ચ શ્રેણીકની દરેક હાર અને દરેક સ્તંભ માટે સૌથી નાની કિંમત અને તેના પછી આવતી નાની કિંમત વચ્ચેનો તફાવત શોધવામાં આવે છે. હાર માટેના તફાવતોને જે તે હારની સામે જમણી બાજુએ છેલ્લે "હારના તફાવત" મથાળા હેઠળ અને સ્તંભ માટેના તફાવતોને જે તે સ્તંભની નીચે "સ્તંભ તફાવત" મથાળા હેઠળ નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 5 | 9 | – 8 | 6 | 30 | 1 |
| $O_2$ | 4 | 7 | – 6 | 9 | 25 | 2 |
| $O_3$ | 10 | 8 | [30] 3 | 7 | ~~45~~ 15 | (4) |
| માંગ | 20 | 40 | ~~30~~ 0 | 10 | 100 | |
| સ્તંભ તફાવત | 1 | 1 | 3 | 1 | | |

**સમજૂતિ :**

હાર અને સ્તંભના બધા જ તફાવતોમાં સૌથી મોટો તફાવત ત્રીજી હારમાં 4 છે. ત્રીજી હારમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 3 છે, જે (3,3) ખાનામાં છે. તેથી $x_{33}$ = લઘુત્તમ (45,30) = 30 એકમોની ફાળવણી કરો. જેથી ત્રીજા સ્તંભની માંગ સંતોષાશે અને ત્રીજી હારમાં 45 – 30 = 15 એકમોનો પુરવઠો બાકી રહેશે. અને ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. બાકી રહેલા ખર્ચ શ્રેણીક માટે ફરીથી આ રીતનું પુનરાવર્તન કરો.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | – 5 | 9 | 6 | 30 | 1 |
| $O_2$ | [20] 4 | 7 | 9 | ~~25~~ 5 | (3) |
| $O_3$ | – 10 | 8 | 7 | 15 | 1 |
| માંગ | ~~20~~ 0 | 40 | 10 | 100 | |
| સ્તંભ તફાવત | 1 | 1 | 1 | | |

**સમજૂતિ :**

હાર અને સ્તંભના તફાવતોમાં હવે સૌથી મોટો તફાવત બીજી હારમાં 3 છે. આ બીજી હારમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 4 છે જે (2,1) ખાનામાં છે, તેથી $x_{21}$ = લઘુત્તમ (25,20) = 20 એકમોની ફાળવણી કરો, જેથી પ્રથમ સ્તંભની માંગ સંતોષાશે. તેથી પ્રથમ સ્તંભ બંધ કરો અને બીજી હારમાં 25 – 20 = 5 એકમોનો પુરવઠો બાકી રહેશે. ફરીથી આ રીતનું પુનરાવર્તન કરો.

| | $D_2$ | $D_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 9 | 10 6 | ~~20~~ | (3) |
| $O_2$ | 7 | – 9 | 5 | 2 |
| $O_3$ | 8 | – 7 | 15 | 1 |
| માંગ | 40 | ~~10~~ 0 | | |
| સ્તંભના તફાવત | 1 | 1 | | |

**સમજૂતિ :**

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના બધા જ તફાવતો જોતાં હવે પ્રથમ હારમાં સૌથી મોટો તફાવત 3 છે. આ પ્રથમ હારમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 6 છે. જે (1,4) ખાનામાં છે. માટે $x_{14}$ = લઘુત્તમ (30,10) = 10 એકમોની ફાળવણી કરતાં ચોથો સ્તંભ બંધ થશે અને પ્રથમ હારમાં 30 – 10 = 20 એકમો બાકી રહેશે. હવે શ્રેણીકમાં ફક્ત એક જ સ્તંભ બાકી રહેશે. તેથી તફાવત શોધવાની જરૂર નથી. આ (બીજા) સ્તંભમાં સૌથી નાના ઘટકોના ક્રમ અનુસાર નીચે મુજબ ફાળવણી કરો.

| | $D_2$ | | પુરવઠો |
|---|---|---|---|
| $O_1$ | 20 | 9 | ~~20~~ 0 |
| $O_2$ | 5 | 7 | ~~5~~ 0 |
| $O_3$ | 15 | 8 | ~~15~~ 0 |
| માંગ | ~~40~~ ~~35~~ ~~20~~ 0 | | |

**ઉકેલ :** કોષ્ટક

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | – 5 | 20 9 | – 8 | 10 6 | ~~30~~ ~~20~~ 0 |
| $O_2$ | 20 4 | 5 7 | – 6 | – 9 | ~~25~~ ~~5~~ 0 |
| $O_3$ | – 10 | 15 8 | 30 3 | – 7 | ~~45~~ ~~15~~ 0 |
| માંગ | ~~20~~ 0 | ~~40~~ ~~25~~ ~~20~~ 0 | ~~30~~ 0 | ~~10~~ 0 | 100 |

**ઉકેલ :** $x_{12} = 20, x_{14} = 10, x_{14} = 10, x_{21} = 20, x_{22} = 5, x_{32} = 15, x_{33} = 30$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\, x_{ij}$

$Z = (9 \times 20) + (6 \times 10) + (4 \times 20) + (7 \times 5) + (8 \times 15) + (3 \times 30)$

$= 180 + 60 + 80 + 35 + 120 + 90$

$Z = 565$

**ઉદાહરણ-8 :** નીચેની વાહનવ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની અંદાજી રીતથી (VAM થી) મેળવી કુલ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

| પ્લાન્ટ | માર્કેટ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ |
| $P_1$ | 190 | 300 | 500 | 100 |
| $P_2$ | 700 | 300 | 400 | 600 |
| $P_3$ | 400 | 100 | 600 | 200 |

દરેક પ્લોટનો પુરવઠો અનુક્રમે 140, 180 અને 360 એકમો છે અને દરેક માર્કેટની માંગ અનુક્રમે 100, 160, 140 અને 280 એકમોની છે.

**જવાબ :** સૌપ્રથમ આ પ્રશ્નને ગાણિતીક સ્વરૂપે ગોઠવતાં પ્લાન્ટના પુરવઠાને જમણીબાજુ અને દરેક માર્કેટની માંગને શ્રેણિકની નીચે લખીશું.

| પ્લાન્ટ | માર્કેટ | | | | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | |
| $P_1$ | 190 | 300 | 500 | 100 | 140 |
| $P_2$ | 700 | 300 | 400 | 600 | 180 |
| $P_3$ | 400 | 100 | 600 | 200 | 360 |
| માંગ | 100 | 160 | 140 | 280 | 680 |

સૌ પ્રથમ ખર્ચ શ્રેણીકના દરેક હાર અને દરેક સ્તંભની સૌથી બે નાની કિંમતો વચ્ચેનો તફાવત શોધી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું.

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | [100] 190 | 300 | 500 | 100 | ~~140~~ 40 | 90 |
| $P_2$ | – 700 | 300 | 400 | 600 | 180 | 100 |
| $P_3$ | – 400 | 100 | 600 | 200 | 360 | 100 |
| માંગ | ~~100~~ 0 | 160 | 140 | 280 | 680 | |
| સ્તંભના તફાવત | (220) | 200 | 100 | 100 | | |

**સમજૂતિ :**

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના તફાવતોમાં સૌથી મોટો તફાવત પ્રથમ સ્તંભમાં 220 છે. પ્રથમ સ્તંભમાં સૌથી નાની ખર્ચની કિંમત 190 છે. તેથી $x_{11}$ = લઘુત્તમ (140, 100) = 100 એકમોની ફાળવણી કરતાં પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે અને પ્રથમ હારમાં 140 – 100 = 40 એકમો બાકી રહેશે. હવે બાકીના શ્રેણીકમાં ફરીથી ગણતરી કરીશું.

| | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | – 300 | 500 | 100 | 40 | (200) |
| $P_2$ | – 300 | 400 | 600 | 180 | 100 |
| $P_3$ | [160] 100 | 600 | 200 | ~~360~~ 200 | 100 |
| માંગ | ~~160~~ 0 | 140 | 200 | | |
| સ્તંભના તફાવત | (200) | 100 | 100 | | |

**સમજૂતિ :**

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભમાં સૌથી મોટો તફાવત $P_1$ (પ્રથમ હાર) અને $M_2$ સ્તંભમાં 200 છે. પરંતુ $P_1$ હારમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 100 છે. અને $M_2$ સ્તંભમાં પણ સૌથી નાનો ઘટક 100 છે, તેથી ક્યાં પ્રથમ ફાળવણી કરવી તે નક્કી થતું નથી. તેથી (1,4) ખાનામાં $x_{14}$ = લઘુત્તમ (40, 280) = 40 એકમો, જ્યારે (3,2) ખાનામાં $x_{32}$ = લઘુત્તમ (360, 160) = 160 એકમો ફાળવણી થાય છે. જે (1,4) ખાના કરતાં વધુ છે. તેથી આપણે સૌપ્રથમ $M_2$ સ્તંભ પસંદ કરી (3,2) ખાનામાં 160 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી $M_2$ સ્તંભ બંધ થશે અને $P_3$ હારમાં 360 – 160 = 200 એકમો બાકી રહેશે.

| | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | – 500 | [40] 100 | ~~40~~ 0 | (400) |
| $P_2$ | 400 | 600 | 180 | 200 |
| $P_3$ | 600 | 200 | 200 | (400) |
| માંગ | 140 | ~~280~~ 240 | | |
| સ્તંભના તફાવત | 100 | 100 | | |

**સમજૂતિ :**

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં સૌથી મોટો તફાવત $P_1$ અને $P_3$ હારમાં 400 છે. પરંતુ $P_1$ હારમાં $P_3$ હાર કરતાં ખર્ચનો ઘટક નાનો છે. જે (1,4) ખાનામાં 100 એકમ છે. $\therefore x_{14}$ = લઘુત્તમ (40, 280) = 40 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી $P_1$ હાર બંધ થશે અને $M_4$ સ્તંભમાં 280 – 40 = 240 એકમો બાકી રહેશે.

| | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|
| $P_2$ | 400 | 600 | 180 | 200 |
| $P_3$ | – 600 | [200] 200 | ~~200~~ 0 | (400) |
| માંગ | 140 | ~~240~~ 40 | | |
| સ્તંભના તફાવત | 200 | (400) | | |

**સમજૂતિ :**

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં સૌથી મોટો તફાવત $P_3$ હાર અને $M_4$ સ્તંભમાં 400 છે. જે હાર અને સ્તંભમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક (3,4) ખાનામાં 200 છે. તેથી $x_{34}$ = લઘુત્તમ (200, 240) = 200 ફાળવણી કરીશું. તેથી $P_3$ હાર બંધ થશે. હવે ફક્ત $P_2$ હાર બાકી રહે છે. માટે તફાવત શોધવાની જરૂર રહેતી નથી. $P_2$ હારના બંને ખાનામાં ફાળવણી કરો.

| | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|
| $P_2$ | [140] 400 | [40] 600 | ~~180~~ ~~40~~ 0 |
| માંગ | ~~140~~ 0 | ~~40~~ 0 | |

ઉકેલ : કોષ્ટક

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | [100] 190 | – 300 | – 500 | 40 100 | ~~140~~ ~~40~~ 0 |
| $P_2$ | – 700 | – 300 | [140] 400 | [40] 600 | ~~180~~ ~~40~~ 0 |
| $P_3$ | – 400 | [160] 100 | – 600 | [200] 200 | ~~360~~ ~~200~~ 0 |
| માંગ | ~~100~~ 0 | ~~160~~ 0 | ~~140~~ 0 | ~~280~~ ~~240~~ ~~40~~ 0 | 680 |

**ઉકેલ :** $x_{11} = 100, x_{14} = 40, x_{23} = 140, x_{24} = 40, x_{32} = 160, x_{34} = 200$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\ x_{ij}$

$Z = (190 \times 100) + (100 \times 40) + (400 \times 140) + (600 \times 40) + (100 \times 160) + (200 \times 200)$
$= 19000 + 4000 + 56000 + 24000 + 16000 + 40000$

$Z = 159000$

**ઉદાહરણ-9 :** નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની અંદાજી રીતથી મેળવો.

| | બજાર | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ફેક્ટરી | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો |
| $F_1$ | 3 | 2 | 4 | 1 | 20 |
| $F_2$ | 2 | 4 | 5 | 3 | 15 |
| $F_3$ | 3 | 5 | 2 | 6 | 25 |
| $F_4$ | 4 | 3 | 1 | 3 | 40 |
| માંગ | 30 | 20 | 25 | 25 | 100 |

**જવાબ :** સૌ પ્રથમ આપેલ પ્રશ્નના ખર્ચની કિંમતો લઈ હાર અને સ્તંભના તફાવતો શોધીશું.

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 3 | 2 | – 4 | 1 | 20 | 1 |
| $F_2$ | 2 | 4 | – 5 | 3 | 15 | 1 |
| $F_3$ | 3 | 5 | – 2 | 6 | 25 | 1 |
| $F_4$ | 4 | 3 | [25] 1 | 3 | ~~40~~ 15 | (2) |
| માંગ | 30 | 20 | ~~25~~ 0 | 25 | 100 | |
| સ્તંભના તફાવત | 1 | 1 | 1 | (2) | | |

**સમજૂતિ :**

ઉપરના કોષ્ટકમાં હાર અને સ્તંભના તફાવતોમાં સૌથી મોટો તફાવત 2 ચોથી હાર અને ચોથી સ્તંભમાં છે. અને $F_4$ હારમાં સૌથી નાની ખર્ચની કિંમત 1 એકમ (4,3) ખાનામાં છે. તેમજ $M_4$ સ્તંભમાં પણ સૌથી નાની ખર્ચની કિંમત 1 એકમ (1,4) ખાનામાં છે. પરંતુ (1,4) ખાના કરતાં (4,3) ખાનામાં ફાળવણી વધુ થાય છે, તેથી આપણે ચોથી હાર પસંદ કરી $x_{43}$ = લઘુત્તમ (40, 25) = 25 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી ત્રીજા સ્તંભની માંગ સંતોષાશે. માટે ત્રીજો સ્તંભ બંધ થશે. જ્યારે ચોથી હારમાં 40 – 25 = 15 એકમોનો પુરવઠો બાકી રહેશે. હવે બાકીના શ્રેણીક માટે ફરીથી તફાવતો શોધીશું.

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | – 3 | – 2 | [20] 1 | ~~20~~ 0 | 1 |
| $F_2$ | 2 | 4 | 3 | 15 | 1 |
| $F_3$ | 3 | 5 | 6 | 25 | (2) |
| $F_4$ | 4 | 3 | 3 | 15 | 0 |
| માંગ | 30 | 20 | ~~25~~ 5 | | |
| સ્તંભના તફાવત | 1 | 1 | | (2) | |

**સમજૂતિ :**

હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં સૌથી મોટો તફાવત 2 છે. જે $F_2$ હાર અને $F_3$ સ્તંભમાં છે. પરંતુ $F_3$ હારમાં લઘુત્તમ ખર્ચનો ઘટક 3 એકમ છે. જ્યારે $M_4$ સ્તંભમાં લઘુત્તમ ખર્ચનો ઘટક 1 એકમ છે. તેથી $M_4$ સ્તંભ પસંદ કરી $x_{14}$ = લઘુત્તમ (20, 25) = 20 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી $F_1$ હારનો પુરવઠો પૂર્ણ થશે. તેથી $F_1$ હાર બંધ થશે. $M_4$ સ્તંભમાં 25 – 20 = 5 એકમોની જરૂરીયાત (માંગ) બાકી રહેશે.

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_2$ | 2 | 4 | 3 | 15 | 1 |
| $F_3$ | [25] 3 | – 5 | – 6 | ~~25~~ 0 | (2) |
| $F_4$ | 4 | 3 | 3 | 15 | (0) |
| માંગ | ~~30~~ 5 | 20 | 5 | | |
| સ્તંભના તફાવત | 1 | 1 | 0 | | |

**સમજૂતિ :**

હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં સૌથી મોટો તફાવત $F_3$ હારમાં છે. આ હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 3 (3,1) ખાનામાં છે. તેથી $x_{31}$ = લઘુત્તમ (35, 30) = 25 એકમોની ફાળવણી કરતાં $F_3$ નો પુરવઠો પૂર્ણ થશે. તેથી $F_3$ હાર બંધ થશે અને $M_1$ સ્તંભમાં 30 – 25 = 5 એકમો બાકી રહેશે.

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_2$ | [5] 2 | 4 | 3 | ~~15~~ 10 | 1 |
| $F_4$ | – 4 | 3 | 3 | 15 | 0 |
| માંગ | ~~5~~ 0 | 20 | 5 | | |
| સ્તંભના તફાવત | (2) | 1 | 0 | | |

**સમજૂતિ :**

હાર અને સ્તંભના તફાવત જોતાં $M_1$ સ્તંભમાં સૌથી મોટો તફાવત 2 છે. તેથી $M_1$ સ્તંભમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક જોતાં તે 2 (2,1) ખાનામાં આવેલ છે. તેથી $x_{21}$ = લઘુત્તમ (15,5) = 5 એકમોની ફાળવણી કરતાં $M_1$ સ્તંભ બંધ થશે અને $F_2$ હારમાં 15 – 5 = 10 એકમોનો પુરવઠો બાકી રહેશે.

| | $M_2$ | $M_4$ | પુરવઠો | હારના તફાવત |
|---|---|---|---|---|
| $F_2$ | 4 | 3 | 10 | (1) |
| $F_4$ | [15] 3 | 3 | ~~15~~ 0 | 0 |
| માંગ | ~~20~~ 5 | 5 | | |
| સ્તંભના તફાવત | (1) | 0 | | |

**સમજૂતિ :**

હાર અને સ્તંભના તફાવતો જોતાં $F_2$ હારમાં અને $M_2$ સ્તંભમાં સૌથી મોટો તફાવત 1 છે અને બંનેમાં ખર્ચની કિંમત પણ સરખી છે. પરંતુ $M_2$ માં (4,2) ખાનામાં ફાળવણી વધુ થતી હોવાથી $x_{42}$ = લઘુત્તમ (15, 20) = 15 એકમોની ફાળવણી કરીશું. તેથી $F_2$ હાર બંધ થશે. હવે એક જ હાર બાકી રહેતી હોવાથી તફાવત શોધવાની જરૂર રહેતી નથી બંને ખાનામાં ફાળવણી નીચે મુજબ થશે.

| | $M_2$ | $M_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|
| $F_2$ | [5] 4 | [5] 3 | ~~10~~ 5 |
| માંગ | ~~5~~ 0 | ~~5~~ 0 | |

ઉકેલ : કોષ્ટક

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | – 3 | – 2 | – 4 | [20] 1 | ~~20~~ 0 |
| $F_2$ | [5] 2 | [5] 4 | – 5 | [5] 3 | ~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0 |
| $F_3$ | [25] 3 | – 5 | – 2 | 6 | ~~25~~ 0 |
| $F_4$ | – 4 | [15] 3 | [25] 1 | 3 | ~~40~~ ~~25~~ 0 |
| માંગ | ~~30~~ ~~5~~ 0 | ~~20~~ ~~5~~ 0 | ~~25~~ 0 | ~~25~~ ~~5~~ 0 | 100 |

**ઉકેલ :** $x_{14} = 20, x_{21} = 5, x_{22} = 5, x_{24} = 5, x_{31} = 25, x_{42} = 15, x_{43} = 25$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij}\, x_{ij}$

$Z = (1 \times 20) + (2 \times 25) + (4 \times 5) + (3 \times 5) + (3 \times 25) + (3 \times 15) + (1 \times 25)$

$= 20 + 10 + 20 + 15 + 75 + 45 + 25$

$Z = 210$

**ઉદાહરણ-10 :** નીચે આપેલ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની રીતે મેળવી કુલ ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | પ્રાપ્ય જથ્થો |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 5 | 7 | 6 | 9 | 10 | 20 |
| $O_2$ | 11 | 8 | 10 | 4 | 12 | 35 |
| $O_3$ | 12 | 12 | 9 | 7 | 8 | 40 |
| $O_4$ | 8 | 6 | 7 | 10 | 8 | 15 |
| જરૂરિયાત | 15 | 10 | 20 | 30 | 35 | 110 |

**જવાબ :**

આ સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની રીતથી ઉકેલ મેળવવા માટે સૌપ્રથમ દરેક હાર તેમજ દરેક સ્તંભમાંથી સૌથી બે નાની કિંમતો વચ્ચેનો તફાવત મેળવીશું અને ફાળવણી કરતાં જઈશું. અગાઉ ગણતરી કરેલ ઉદાહરણનીજેમ અલગ અલગ કોષ્ટકમાં ફાળવણી દર્શાવી શકાય. પરંતુ આપણે અહીં એક જ કોષ્ટકમાં ફાળવણી દર્શાવેલ છે. આ રીતે પણ દાખલો ગણી શકાય છે.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | પ્રાપ્ય જથ્થો | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | [15] 5 | – 7 | [5] 6 | – 9 | 10 | ~~20~~ ~~5~~ 0 | 1 | 1 | 1 | (1) | – | – |
| $O_2$ | – 1 | [5] 8 | – 10 | [30] 4 | 12 | ~~35~~ ~~5~~ 0 | (4) | 2 | (2) | – | – | – |
| $O_3$ | – 12 | – 12 | [5] 9 | – 7 | [35] 8 | ~~40~~ ~~35~~ 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $O_4$ | – 8 | [5] 6 | [10] 7 | – 10 | 8 | ~~15~~ ~~10~~ 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| જરૂરિયાત | ~~15~~ 0 | ~~10~~ ~~50~~ | ~~20~~ ~~15~~ ~~50~~ | ~~30~~ 0 | 35 | 110 | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | 3 | 1 | 1 | 3 | 0 |
| $d_2$ | (3) | 1 | 1 | – | 0 |
| $d_3$ | – | 1 | 1 | – | 0 |
| $d_4$ | – | 1 | 1 | – | 0 |
| $d_5$ | – | (6) | 2 | – | 0 |
| $d_6$ | – | – | 2 | – | 0 |

**સમજૂતિ :**

ઉપરના કોષ્ટકમાં જોતાં સૌપ્રથમ તફાવત $d_1$ માં સૌથી મોટો તફાવત $O_2$ હારમાં 4 છે. તેથી $O_2$ હારમાં સૌથી નાના ઘટક 4 ની સામે 30 એકમો ફાળવેલ છે. જેથી $D_4$ બંધ થશે.

- બીજો તફાવત $d_2$ જોતાં સૌથી મોટો તફાવત $D_1$ સ્તંભમાં છે. જે સ્તંભમાં સૌથી નાની કિંમત 5 સામે 15 એકમો ફાળવેલ છે. જેથી $D_1$ બંધ થશે.
- તફાવત $d_3$ જોતાં સૌથી મોટો તફાવત $O_2$ હારમાં છે. આ હારમાં સૌથી નાની ખર્ચની કિંમત 8 સામે 5 એકમોની ફાળવણી કરી છે. $\therefore$ $O_2$ હાર બંધ થશે.
- $d_4$ જોતાં સૌથી મોટો તફાવત 1 છે. ન્યૂનતમ ખર્ચ 6 છે. $\therefore$ 6 ની સામે 5 એકમો ફાળવણી કરતાં $O_1$ હાર બંધ થશે.
- $d_5$ જોતાં સૌથી મોટો તફાવત 6 છે. જે સ્તંભમાં સૌથી નાની કિંમત 6 છે. $\therefore$ 6 ની સામે 5 એકમો ફાળવતાં $D_2$ સ્તંભ બંધ થશે.
- $d_6$ જોતાં સૌથી મોટો તફાવત 2 છે. જે $D_3$ સ્તંભમાં સૌથી નાનો ખર્ચનો ઘટક 7 છે. $\therefore$ 7 ની સામે 10 એકમો ફાળવતાં $O_4$ હાર બંધ થશે. હવે ફક્ત $O_3$ એક જ હાર બાકી રહે છે. માટે ત્યાં ફાળવણી ફરજીયાત થશે.

**ઉકેલ :** $x_{11} = 5, x_{13} = 5, x_{22} = 5, x_{24} = 30, x_{33} = 5, x_{35} = 35, x_{42} = 5, x_{43} = 10$

કુલ ખર્ચ $Z = \Sigma\Sigma C_{ij} x_{ij}$

$Z = (5 \times 15) + (6 \times 5) + (8 \times 5) + (4 \times 30) + (9 \times 5) + (8 \times 35) + (6 \times 5) + (7 \times 10)$

$= 75 + 30 + 40 + 120 + 45 + 280 + 30 + 70$

$Z = 690$

## 14.7 તમારી પ્રગતિ ચકાસો (સ્વાધ્યાય) :

### 14.7.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

(1) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એટલે શું ?

(2) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનું ગાણિતીક સ્વરૂપ લખો.

(3) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના લક્ષણો અને ધારણાઓ લખો.

(4) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના મૂળભૂત ઉકેલ માટેની રીતો જણાવો અને તેમાંથી કોઈપણ એક રીત સવિસ્તાર સમજાવો.

(5) વાહન વ્યવહારની સમસ્યાનો પ્રાથમ મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવા માટે કઈ કઈ રીતનો ઉપયોગ થાય છે. આ રીતોમાં કઈ રીત ચઢિયાતી છે ? શા માટે ?

(6) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના પ્રાથમિક મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવા માટેની વાયવ્ય ખૂણાની રીત સમજાવો.

(7) વાહન-વ્યવહારની પ્રારંભિક ઉકેલ માટેની ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીત વર્ણવો.

(8) વૉગેલની અંદાજી રીત સમજાવો.

(9) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાને ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(10) વાયવ્ય ખૂણાની રીતનો ઉપયોગ કરી નીચેના વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી કુલ ખર્ચ શોધો.

| ઉદ્ભવ | પ્રાપ્તિ સ્થાન | | | | | | પ્રાપ્ય |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| સ્થાન | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $D_6$ | જથ્થો |
| $O_1$ | 5 | 4 | 6 | 3 | 1 | 2 | 30 |
| $O_2$ | 8 | 6 | 7 | 5 | 9 | 7 | 20 |
| $O_3$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 8 | 9 | 40 |
| $O_4$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 50 |
| જરૂરિયાત | 40 | 30 | 20 | 10 | 30 | 10 | 140 |

(11) નીચેની વાહન વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણાની રીતે મેળવી કુલ ખર્ચ શોધો.

| | ગોડાઉન | | | | પ્રાપ્ય |
|---|---|---|---|---|---|
| ફેક્ટરી | $W_1$ | $W_2$ | $W_3$ | $W_4$ | જથ્થો |
| $F_1$ | 8 | 10 | 12 | 18 | 25 |
| $F_2$ | 6 | 15 | 9 | 14 | 35 |
| $F_3$ | 12 | 8 | 7 | 10 | 15 |
| $F_4$ | 20 | 22 | 10 | 15 | 25 |
| માંગ | 20 | 30 | 40 | 10 | 100 |

(12) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણાથી મેળવો અને વાહન-વ્યવહારનું કુલ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

| પ્રતિ / તરફથી | P | Q | R | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 8 | 9 | 6 |
| 2 | 12 | 8 | 4 | 10 |
| 3 | 8 | 12 | 12 | 3 |
| માંગ | 10 | 4 | 5 | 19 |

(13) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે મેળવો, તેમજ કુલ ખર્ચ શોધો.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 4 | 8 | 9 | 7 | 45 |
| $S_2$ | 3 | 6 | 5 | 8 | 20 |
| $S_3$ | 8 | 7 | 2 | 8 | 35 |
| જરૂરિયાત | 10 | 30 | 40 | 20 | 100 |

(14) નીચેની સમસ્યાનો ઉકેલ ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે મેળવો.

| ગોડાઉન / તરફથી | $W_1$ | $W_2$ | $W_3$ | $W_4$ | $W_5$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 4 | 1 | 3 | 7 | 4 | 60 |
| $P_2$ | 2 | 5 | 2 | 6 | 3 | 35 |
| $P_3$ | 5 | 7 | 2 | 4 | 5 | 40 |
| જરૂરિયાત | 22 | 45 | 20 | 10 | 30 | 135 |

(15) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો પ્રારંભિક મૂળભૂત ઉકેલ ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે મેળવી, કુલ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

| | A | B | C | D | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 1 | 2 | 1 | 4 | 20 |
| Q | 3 | 3 | 2 | 1 | 40 |
| R | 4 | 2 | 5 | 9 | 20 |
| S | 5 | 3 | 6 | 10 | 20 |
| માંગ | 20 | 40 | 30 | 10 | 100 |

(16) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની રીતે મેળવી, કુલ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પ્રાપ્ય જથ્થો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 9 | 4 | 1 | 5 | 14 |
| $O_2$ | 8 | 9 | 2 | 7 | 16 |
| $O_3$ | 4 | 3 | 6 | 2 | 5 |
| માંગ | 6 | 10 | 15 | 4 | 35 |

(17) નીચેની વાહન-વ્યવહરની સમસ્યાનો ઉકેલ વૉગેલની અંદાજી રીતે (VAM) મેળવો.

| ગોડાઉન / પ્લાન્ટ | I | II | III | IV | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 5 | 2 | 0 | 13 |
| B | 7 | 10 | 3 | 8 | 17 |
| C | 5 | 4 | 7 | 3 | 5 |
| માંગ | 5 | 11 | 15 | 4 | 35 |

(18) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણા, ન્યૂનતમ શ્રેણીક અને વૉગેલની અંદાજી રીતે મેળવી ત્રણેયનો પરિવહન ખર્ચ શોધો. કઈ રીતે ચઢિયાતી છે, તે પણ જણાવો.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 10 | 4 | 8 | 3 | 5 |
| $O_2$ | 2 | 7 | 1 | 6 | 15 |
| $O_3$ | 9 | 10 | 7 | 10 | 50 |
| $O_4$ | 5 | 2 | 4 | 9 | 30 |
| માંગ | 25 | 20 | 35 | 20 | 100 |

(19) નીચેની વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ વાયવ્ય ખૂણા, ન્યૂનતમ શ્રેણીક અને વૉગેલની અંદાજી રીતે મેળવી ત્રણેયનો પરિવહન ખર્ચ શોધો. આ ત્રણેય રીતમાં કઈ રીત ચઢિયાતી છે ? કેમ ?

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 3 | 2 | 4 | 1 | 20 |
| $O_2$ | 2 | 4 | 5 | 3 | 15 |
| $O_3$ | 3 | 5 | 2 | 6 | 25 |
| $O_4$ | 4 | 3 | 1 | 4 | 40 |
| માંગ | 30 | 20 | 25 | 25 | |

(20) નીચેના વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો ઉકેલ કોઈપણ બે રીતે મેળવો. તેમજ તેમનો કુલ પરિવહન ખર્ચ પણ શોધો.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | પુરવઠો |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 8 | 9 | 12 | 2 | 15 |
| $O_2$ | 3 | 11 | 6 | 10 | 50 |
| $O_3$ | 5 | 1 | 4 | 7 | 55 |
| માંગ | 40 | 35 | 25 | 20 | 120 |

**જવાબો :**

10. $x_{11} = 30, x_{21} = 10, x_{22} = 10, x_{32} = 20, x_{33} = 20, x_{44} = 10, x_{45} = 30$, અને $x_{46} = 10$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 640$

11. $x_{11} = 20, x_{12} = 5, x_{22} = 25, x_{23} = 10, x_{33} = 15, x_{13} = 15$ અને $x_{44} = 10$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 1080$

12. $x_{11} = 6, x_{21} = 4, x_{22} = 4, x_{23} = 2, x_{33} = 3$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 160$

13. $x_{12} = 25, x_{14} = 20, x_{21} = 10, x_{22} = 5, x_{23} = 5, x_{33} = 35$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 495$

14. $x_{12} = 45, x_{15} = 15, x_{21} = 22, x_{25} = 13, x_{33} = 20, x_{34} = 18$ અને $x_{35} = 2$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 310$

15. $x_{11} = 20, x_{23} = 30, x_{24} = 10, x_{32} = 20$ અને $x_{42} = 20$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 20$

16. $x_{12} = 10, x_{14} = 4, x_{21} = 1, x_{23} = 15$ અને $x_{31} = 5$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 118$

17. $x_{12} = 9, x_{14} = 4, x_{21} = 2, x_{23} = 15, x_{31} = 3$ અને $x_{32} = 2$
કુલ પરિવહન ખર્ચ $Z = 127$

18. (1) વાયવ્ય ખૂણાની રીતે : $x_{11} = 5, x_{21} = 15, x_{31} = 5, x_{32} = 2, x_{33} = 25, x_{43} = 10$, અને $x_{44} = 20$
$Z = 720$

(2) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે : $x_{14} = 5, x_{23} = 15, x_{31} = 25, x_{33} = 10, x_{34} = 15, x_{42} = 20$ અને $x_{43} = 10$

Z = 555

(3) વૉગેલની રીતે : $x_{14} = 5, x_{23} = 15, x_{31} = 15, x_{33} = 20, x_{34} = 15, x_{41} = 10$ અને $x_{42} = 20$

Z = 545

વૉગેલની અંદાજી રીત ચઢિયાતી છે. કારણ કે ત્રણેય રીતમાં કુલ પરિવહન ખર્ચ Zની કિંમત વૉગેલની રીતમાં સૌથી ઓછી છે.

19. (1) વાયવ્ય ખૂણાની રીતે : $x_{11} = 20, x_{21} = 10, x_{22} = 5, x_{32} = 15, x_{33} = 10, x_{43} = 15$ અને $x_{44} = 25$

Z = 310

(2) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે : $x_{14} = 20, x_{21} = 15, x_{31} = 15, x_{32} = 5, x_{34} = 5, x_{42} = 15$ અને $x_{43} = 25$

Z = 220

(3) વૉગેલની રીતે : $x_{14} = 20, x_{21} = 5, x_{22} = 5, x_{24} = 5, x_{31} = 25, x_{42} = 15$ અને $x_{43} = 25$

Z = 210

આ ત્રણેય રીતોમાં વૉગેલની અંદાજી રીત ચઢિયાતી છે. કારણ કે વૉગેલની રીતમાં કુલ પરિવહન Z ની કિંમત સૌથી ઓછી થાય છે.

20. (1) વાયવ્ય ખૂણાની રીતે : $x_{11} = 15, x_{21} = 25, x_{22} = 25, x_{32} = 10, x_{33} = 25$ અને $x_{34} = 20$

Z = 720

(2) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે : $x_{14} = 15, x_{21} = 40, x_{23} = 5, x_{24} = 5, x_{32} = 35$ અને $x_{33} = 20$

Z = 345

(3) વૉગેલની અંદાજી રીતે : $x_{14} = 15, x_{21} = 40, x_{23} = 10, x_{32} = 35, x_{33} = 15, x_{34} = 5$

Z = 340

**14.7.2 નીચેના વિધાનો સાચા છે કે ખોટા તે જણાવો. :**

(1) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ મેળવવા માટેની વાયવ્ય ખૂણાની રીત ખર્ચાળ છે.

(2) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની વૉગેલની અંદાજી રીત સૌથી શ્રેષ્ઠ રીત છે.

(3) વાહન-વ્યવહારના કોષ્ટકમાં હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા હંમેશા સરખી હોય છે.

(4) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં કોઈ એક ઉદ્ભવ સ્થાનેથી બધા જ પ્રાપ્તિ સ્થાનોને ઉત્પાદિત એકમો જથ્થો મોકલી શકાય છે.

(5) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મુખ્ય હેતુ કુલ પરિવહન ખર્ચ મહત્તમ કરવાનો હોય છે.

(6) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતમાં એકમ દંડ (તફાવત) લેવામાં આવે છે.

(7) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાનો મુખ્ય ઉદ્દેશ ઉત્પાદિત એકમોને જુદા જુદા ઉદ્ભવ સ્થાનેથી જુદા જુદા પ્રાપ્તિ-સ્થાનોએ એવી રીતે મોકલવાનો હોય છે, કે જેથી કુલ પરિવહન ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય.

(8) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં વૉગેલની અંદાજી રીતનું બીજું નામ એકમદંડની રીત છે.

(9) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા માટેના ઉકેલની રીતો પૈકી ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતમાં કુલ પરિવહન ખર્ચ સૌથી ઓછું આવે છે.

(10) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા એ સુરેખ આયોજનની સમસ્યાનું એક વિશિષ્ટ સ્વરૂપ છે.

(11) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાની ત્રણેય રીતો પૈકી વાયવ્ય ખૂણાની રીત સૌથી અઘરી રીત છે.

**જવાબો :**

(1) સાચું (2) સાચું (3) ખોટું (4) સાચું (5) ખોટું (6) ખોટું (7) સાચું
(8) સાચું (9) ખોટું (10) સાચું (11) ખોટું

**14.7.3 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.**

(1) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની વૉગેલની રીત ........ ને ન્યૂનતમ બનાવે છે.
(a) કુલ માંગ (b) કુલ પુરવઠો (c) પ્રાપ્તિ સ્થાનોની સંખ્યા (d) કુલ પરિવહન ખર્ચ

(2) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતમાં ....... ને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.
(a) પુરવઠો (b) માંગ (c) ન્યૂનતમ ખર્ચ ઘટક (d) ઉપરના બધા જ

(3) $5 \times 4$ ક્રમના વાહન-વ્યવહારના શ્રેણીકમાં કુલ કેટલા સ્વતંત્ર ઉકેલ મળવા જોઈએ ?
(a) 20 (b) 9 (c) 8 (d) 1

(4) સામાન્ય રીતે ન્યૂનતમ પરિવહન ખર્ચ કઈ રીત દ્વારા મળે છે ?
(a) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીતે (b) વૉગેલની રીતે (c) વાયવ્ય ખૂણાની રીતે (d) એકપણ નહીં

(5) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના પ્રાપ્ય ઉકેલ માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $\Sigma a_i$ __ $\Sigma b_j$ છે.
(a) = (b) ≠ (c) < (d) >

(6) વાહન-વ્યવહારના કોષ્ટકનો ઉપયોગ શેના માટે કરાય છે ?
(a) નજીકની ટ્રાન્સપોર્ટ ઓફિસ શોધવા માટે
(b) ન્યૂનતમ પરિવહન ખર્ચ શોધવા માટે
(c) બે શહેરો વચ્ચે પરિવહન ખર્ચ શોધવા માટે
(d) ઉપરોક્ત બધા જ

(7) વાયવ્ય ખૂણાની રીતમાં જરૂરી એકમોની ફાળવણીની શરૂઆત આપણે ક્યાંથી કરીએ છીએ ?
(a) કોષ્ટકમાં જમણી બાજુના નીચેના ખૂણાથી
(b) કોષ્ટકમાં જમણી બાજુના ઉપરના ખૂણાથી
(c) કોષ્ટકમાં ડાબી બાજુના ઉપરના ખૂણાથી
(d) કોષ્ટકમાં સૌથી મોટો ખર્ચનો ઘટક હોય તે ખાનાથી

(8) વાહન-વ્યવહારના ઉકેલ માટેની વૉગેલની રીતમાં હાર અને સ્તંભ માટે દંડનું મૂલ્ય (તફાવત) કેવી રીતે મેળવાય છે ?
(a) દરેક હાર અને સ્તંભમાંથી સૌથી નાના બે એકમ ખર્ચ વચ્ચેનો તફાવત શોધીને
(b) દરેક હાર અને સ્તંભમાંથી સૌથી મોટા બે એકમ ખર્ચ વચ્ચેનો તફાવત શોધીને
(c) દરેક હાર અથવા સ્તંભમાંથી સૌથી મોટા બે એકમ ખર્ચ વચ્ચેનો તફાવત શોધીને
(d) આપેલમાંથી એક પણ નહીં

(9) વાયવ્ય ખૂણાની રીતમાં ........ ધ્યાનમાં લેવાનો નથી.
(a) ખર્ચને (b) માંગને (c) પુરવઠાને (d) એકપણ નહીં

(10) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના ઉકેલની રીતો પૈકી સૌથી ફાયદાકારક રીત કઈ છે ?
(a) વાયવ્ય ખૂણાની રીત (b) ન્યૂનતમ હારની રીત
(c) ન્યૂનતમ શ્રેણીકની રીત (d) વૉગેલની અંદાજી રીત

(11) એક સમતોલ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા માટે $a_1 = 70$ એકમ, $a_2 = 100$ એકમ, $a_3 = 110$ એકમ અને ચાર પ્રાપ્તિ સ્થાનોની જરૂરિયાત અનુક્રમે $x$, $2x$, $x$ અને $3x$ છે. તો $b_1$ (પ્રથમ પ્રાપ્તિ સ્થાનની જરૂરિયાત) = ........
(a) 120 (b) 100 (c) 40 (d) 80

(12) સમતોલ વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં કુલ ........ અને કુલ ....... બંને સરખા છે.

(a) સ્તંભ, પંક્તિ (b) પુરવઠાના એકમ, જરૂરિયાતના એકમ

(c) પ્રાપ્તિ સ્થાન, ઉત્પત્તિ સ્થાન (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

(13) m ઉત્પત્તિ સ્થાન અને n પ્રાપ્તિ સ્થાન વાળા એક વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાના કુલ ........ પ્રારંભિક ઉકેલ મળે.

(a) $m + n - 1$ (b) $m + n$ (c) $m - n$ (d) $m \times n$ એકપણ નહીં

(14) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યાની વાયવ્ય ખૂણાની રીતમાં મૂળભૂત ઉકેલ મેળવવાની રીતનો એક ગેરફાયદો ........ છે.

(a) તેનો ઉકેલ થોડો અઘરો પડે છે. (b) તે આપણને એક વિકૃત મૂળભૂત ઉકેલ આપે છે.

(c) પરિવહન ખર્ચને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતો નથી.

(d) ઉપરના બધા જ

(15) વાહન-વ્યવહારની સમસ્યામાં જ્યારે કુલ ફાળવણી, પુરવઠા અને જરૂરિયાત સાથે સંગત થાય છે, ત્યારે તે ઉકેલને ........ ઉકેલ કહે છે.

(a) સમતોલ (b) મૂળભૂત

(c) અસમતોલ (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

**જવાબો :**

(1) d (2) d (3) c (4) b (5) a (6) b (7) c

(8) a (9) a (10) d (11) c (12) b (13) a (14) c

(15) b

નોંધ : (11) ની સમજૂતી : કુલ જરૂરિયાત = કુલ પુરવઠો = 280 છે. હવે જરૂરિયાત $x + 2x + x + 3x = 7x$ છે. માટે $7x = 280$ થવા જોઈએ.

માટે $x = \frac{280}{7}$

માટે $x = 40$

## 14.8 ચાવીરૂપ શબ્દો :

**વાહન-વ્યવહારની સમસ્યા :** પરિવહનનો પ્રશ્ન એટલે કે એક સ્થળેથી બીજા સ્થળે વસ્તુનો જથ્થો પહોંચાડવાના પ્રશ્નો.

**ઉત્પત્તિસ્થાન :** ઉદ્ભવસ્થાન - કોઈપણ વસ્તુનું ઉત્પાદન થતું હોય તે સ્થળ કે જ્યાં પુરવઠો ઉપલબ્ધ હોય.

**પ્રાપ્તિસ્થાન :** જે જગ્યા પર વસ્તુની માંગ મુજબ પુરવઠો મેળવવાનો થતો હોય તે સ્થળ.

**ઈષ્ટતમ ઉકેલ :** કોઈપણ પ્રશ્નમાં મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો પ્રાપ્ત થાય તેને ઈષ્ટતમ ઉકેલ કહેવાય.

**શ્રેણીક :** ગણિતમાં સંખ્યાઓની ચોરસ કે લંબચોરસ ગોઠવણી.

**: સંદર્ભ ગ્રંથ :**

(1) 'કાર્યાત્મક સંશોધન', અક્ષર પ્રકાશન, અમદાવાદ (2016)
લેખક : ડૉ. એમ.એચ. મૌસુરીયા, ડૉ. દિનેશભાઈ એમ. પટેલ

(2) ક્રિયાત્મક સંશોધનની ઈષ્ટતમ પદ્ધતિઓ, યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય, અમદાવાદ-6
સ્વ. પ્રા. રમેશચંદ્ર એન. દેસાઈ, ડૉ. ભરતભાઈ બી. જાની (1990)

(3) Operation Research & Quantitative Techniques, K. Shridharee Bhat, Himalaya Publishing House. (2001)