એકમ-2 ગણ

રૂપરેખા

1.0 ઉદ્દેશો :

આ એકમ બહુ ઉપયોગી એકમ છે તે શીખવાથી તમને ઘણા બધા કન્સેપ્ટ જાણવા - સમજવામાં ફાયદો થશે.

- ગણ સિદ્ધાંતથી સંભાવના સમજવામાં સરળતા રહેશે.
- ગણ સિદ્ધાંતથી નિદર્શ અને સમષ્ટિનો ખ્યાલ સ્પષ્ટ થશે.
- ભવિષ્યના અભ્યાસ માટે ખૂબ જ ઉપયોગી થશે ગણ સિદ્ધાંત.

2.1 પ્રસ્તાવના :

આ એકમનો મૂળભૂત હેતુ ગણની જુદી જુદી સંજ્ઞાઓના સ્પષ્ટ ખ્યાલ મેળવવાનો છે. ગણ સિદ્ધાંત સારી રીતે સમજવાથી સમષ્ટિ, નિદર્શ તેમજ સંભાવના ખૂબ જ સારી રીતે સમજવામાં અત્યંત ઉપયોગી થશે. સંભાવનાને સમજવામાં ગણ સિદ્ધાંતની સમજણ બહોળા પ્રમાણમાં ઉપયોગી થશે.

2.2 ગણનો ખ્યાલ અને તેના ઘટકો

સરળ ભાષામાં ગણનો અર્થ સમૂહ કે જથ્થો એવો થાય છે. મનુષ્ય એ સામાજિક પ્રાણી છે. સમાજમાં રહેવા માટે તેને ‘જૂથ’ કે ‘સમુહ’ માં રહેવું પડે છે. મનુષ્યોને મિત્રનું જૂથ હોય છે. તે જ રીતે વકીલોનું જૂથ, અધ્યાપકોનું જૂથ, ડૉક્ટરોનું જૂથ, પ્રાણીઓનું જૂથ, પુસ્તકોનું જૂથ વગેરે.. આમ, વ્યવહારમાં આપણે સજીવ અને નિર્જીવ વસ્તુઓનું જૂથ અથવા સમૂહ થતું જોઈએ છીએ.

નીચેના કેટલાક ઉદાહરણો પરથી ગણનો ખ્યાલ વધુ સરળતાથી સમજી શકીશું.

1. જુદાં જુદાં પ્રાણીઓનો ગણ
2. જુદાં જુદાં ફળોનો ગણ
3. અમદાવાદ શહેરની કોમર્સ કૉલેજોનો ગણ
4. મુંબઈની મીલોનું જૂથ

આ ઉદાહરણો સહેજ બારીકાઈથી તપાસીએ, તો માલુમ પડશે કે પ્રાણીઓના ગણ (1) માં કુતરું, બિલાડી આવી શકે. પરંતુ પોપટ કે કોયલ ના આવી શકે.

જુદાં જુદાં ફળોના ગણમાં ચીકુ, મોસંબી, નારંગી, અનાનસ આવી શકે પરંતુ દૂધી, રીંગણ, ફલાવર ના આવી શકે. અમદાવાદ શહેરની કોમર્સ કૉલેજોના ગણમાં નડિયાદ કે મહેસાણાની કોમર્સ કૉલેજો ના આવી શકે વગેરે.....

અહીં એક વાત સ્પષ્ટ કરવી જરૂરી છે કે કોઈપણ ગણમાં એક જ પ્રકારની વસ્તુઓ હોવી જોઈએ એવું નથી. દા.ત.

A = {ટેબલ, ખુરશી, ગુલાબ, પેન} પણ ગણ કહેવાય.

આમ, વ્યાખ્યાયિત વસ્તીઓના સમુહને ગણ કહેવામાં આવે છે. જે વસ્તુઓ ગણમાં આવેલી હોય તે દરેકને ગણનો ઘટક યા સભ્ય કહેવાય. દા.ત. ઉપરના ઉદાહરણમાં કુતરું, બિલાડી વગેરે ગણના ઘટકો છે.

ગણ ગણિતમાં ગણને સામાન્ય રીતે A, B, C ..... X, Y, Z વગેરે સંજ્ઞાઓ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તેમાં આવેલા ઘટકોને a, b, c ..... x, y, z સંજ્ઞાઓ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. કોઈ ઘટક x, ગણ A માં સમાયેલો છે. તે દર્શાવવામાં તેને $X \in A$ સંકેતથી દર્શાવાય છે. આ સંકેતને x ગણ A માં સમાયેલો છે તેમ વંચાય છે. (x belongs to A) તે જ રીતે જો ઘટક b ગણ B માં સમાયેલો નથી તે દર્શાવવા $b \neq B$ સંકેત વાપરીશું. આનો અર્થ ઘટક b, ગણ B માં સમાયેલો નથી. તે દર્શાવવા $b \notin B$ સંકેત વાપરીશું. આનો અર્થ ઘટક b, ગણ B સમાયેલો નથી તેમ થાય. (b dose not belong to B)

2. ગણને દર્શાવવાની રીત :

ગણ ગણિતમાં ગણને બે રીતે દર્શાવી શકાય છે.

(1) કોષ્ટક સ્વરૂપ (2) બંધારણ સ્વરૂપ

(1) કોષ્ટક સ્વરૂપ : આપેલા ગણમાં આવેલા દરેક ઘટકને { } કૌંસમાં લખીને ગણને દર્શાવી શકાય છે.

દા.ત. A : {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

B : {અમદાવાદ, વડોદરા, સુરત, રાજકોટ}

C : {a, b, c, ...z}

D : {ચોપડી, ટેબલ, ખુરશી, કુતરો}

અહીં એ બાબત ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ કે ગણનાં ઘટકોમાં ક્રમનું કાંઇ જ મહત્ત્વ નથી. તેથી તે ગમે તે ક્રમમાં લખી શકાય.

(2) બંધારણ સ્વરૂપ : જ્યારે ગણના ઘટકોમાં કોઈ એક સામાન્ય ગુણધર્મ આપેલો હોય ત્યારે ગણના કોઈ એક ઘટકને x વડે દર્શાવી, x જે ગુણધર્મનું પાલન કરતો હોય તે ગુણધર્મ દર્શાવાય છે. ત્યારે x અને તે ગુણધર્મ દર્શાવાય છે. ત્યારે x અને તે ગુણધર્મ વચ્ચે (:) આવું ચિહ્ન મૂકી { } કૌંસમાં લખવામાં આવે છે.

રીત (1) માં દર્શાવેલા ગણોને આ રીતમાં નીચે મુજબ લખાય.

A : {x : x = પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ}

B : {x : x = ગુજરાત રાજ્યમાં આવેલા શહેરો}

C : {x : x = અંગ્રેજી ભાષાના મૂળાક્ષરો} વગેરે....

ઉપરની બંને રીતોમાંથી જરૂરિયાત પ્રમાણે યોગ્ય રીતની મદદથી ગણ દર્શાવી શકાય છે. વળી એ સ્પષ્ટ છે કે દરેક ગણ બંને રીતે રજુ થઈ શકે તે જરૂરી નથી.

2.3 ગણનાં પ્રકાર

જુદા-જુદા પ્રકારના ગણની વ્યાખ્યાઓ નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

1. **સાન્ત ગણ :** જે ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા નિશ્ચિત હોય તે ગણને સાન્ત ગણ કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. A = {4, 5, 6, 7, 9, 12}

B = {x : x = નવયુગ કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા}

2. **અનંત ગણ :** જે ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા અનિશ્ચિત હોય તે ગણને અનંતગણ કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ, આકાશમાં તારાઓનો ગણ વગેરે...

3. **ખાલી ગણ :** જે ગણમાં કોઈપણ ઘટક ન હોય તેને ખાલી ગણ કહેવામાં આવે છે. સંકેતમાં તેને વડે દર્શાવાય છે.

દા.ત. A = {x : x = પ્રિ. યુનિ. કોમર્સમાં સંસ્કૃતની પરીક્ષા આપનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા}

B = {#} =

4. **ઉપ ગણ :** જો ગણ A અને B એવા હોય કે જેથી A ના બધા જ ઘટકો B નાં પણ ઘટક હોય ત્યારે A ને પણ B નો ઉપયોગ (Subset) કહેવામાં આવે છે. સંકેતમાં તેને A⊂B અથવા B⊂A વડે દર્શાવાય છે. અહીં એ નોંધાવું જોઈએ, A ના ઘટકો બધા B નાં ઘટકો હોય છે જે, પરંતુ B ના બધા જ ઘટકો A નાં ઘટકો હોય કે નાં પણ હોય વળી.

1. દરેક ગણ તેનો પોતાનો ઉપગણ છે.

(i) i.e. A⊂B

2. ખાલીગણ હંમેશા દરેક ગણનો ઉપગણ છે.

(i) i.e. ⊂A

અહીં A અને ગણ A ના અનુચિત ઉપગણો કહેવાય જ્યારે તે સિવાયના A ના બાકીના ઉપગણોને ઉચિત ઉપગણો કહેવાય છે.

દા.ત. A = {1,2,3,} ગણનાં ઉપયોગો નીચે મુજબ થશે.

A, , {1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}, {1,3}.

આમ, A અને અનુચિત ઉપગણો કહેવાય અને બાકીનાને ઉચિત ઉપગણો કહીશું.

5. **તત્સમગણ :** ગણ A નો પ્રત્યેક સભ્ય ગણ B માં આવેલો હોય અને ગણ B નો પ્રત્યેક સભ્ય ગણ A માં આવેલો હોય તો ગણ A અને ગણ B તત્સમ ગણ છે તેમ કહેવાય. સંકેતમાં A = B વડે દર્શાવાય છે.

6. **અલગગણ :** જો A અને B એ બે ગણ એવા હોય કે જેથી બંનેના ઘટકોમાંથી ઘટક સમાન ન હોય તો તે બંને ગણો અલગ ગણો કહેવાય છે.

7. **સાર્વત્રિક ગણ :** આપણે ઉપર જોયું કે કોઈપણ ગણને અનેક ઉપગણો હોઈ શકે અને જ્યારે આપણે ઉપગણોની વાત કરતા હોઈએ ત્યારે બધા જ ઉપગણો જે ગણમાં સમાયેલા હોય તે મૂળ ગણને સાર્વત્રિક ગણ કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં $\cup$ વડે દર્શાવાય છે.

દા.ત. $\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}$આ બધા ગણો N = {$x$, x = પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ} ના ગણમાં સમાઈ જાય છે. માટે ગણ N એ સાર્વત્રિક ગણ કહેવાય છે.

2.4 ગણ ઉપરની પ્રક્રિયાઓ

યોગગણ : જો બે ગણો A અને B આપેલા હોય તો ગણ A માં હોય અથવા ગણ B માં હોય, તેવા પ્રત્યેક ઘટકોના ગણ C ને A અને B ગણનો યોગ ગણ કહે છે. તેને સંકેતમાં C = A$\cup$Bવડે દર્શાવીશું અને તેને 'A યોગ B' અને વેચાય છે.

દા.ત. $A = \{1,2,4,7,8\}$

$B = \{3,5,10\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,8,10\}$

છેદગણ : જો A અને B કોઈપણ બે ગણો હોય તો ગણ A અને ગણ B બંનેમાં સામાન્ય હોય તેવા દરેક ઘટકોના ગણને A અને B નો છેદગણ કહે છે. સંકેતમાં તેને A$\cap$B વડે દર્શાવાય છે અને તે 'A છેદ B' એમ વંચાય છે.

દા.ત. $A = \{2,6,8,10,14,20\}$

$B = \{4,6,10,20,15\}$

$A \cap B = \{6,10,20\}$

તફાવત ગણ : જો A અને B કોઈપણ બે ગણ હોય તો ગણ A માં હોય અને ગણ B માં ન હોય તેવા ઘટકોથી બનતા ગણને B નો A પ્રત્યેનો તફાવત ગણ કહે છે અને તેને સંકેતમાં A – B વડે દર્શાવાય છે. જે A તફાવત B એમ વંચાય છે.

દા.ત. $A = \{2,4,6,8,10\}$

$B = \{4,8,12,16\}$

પૂરક ગણ : કોઈપણ ગણ A હોય અને તેને અનુવર્તી સાર્વત્રિક ગણ U હોય તો ગણ A માં ન હોય તેવા ગણ U ના બધા જ ઘટકોથી બનતા ગણને, U ની સાપેક્ષમાં A નો પૂરક ગણ કહેવામાં આવે છે અને સંકેતમાં તેને A$'$ વડે દર્શાવાય છે, જે A નો પૂરક ગણ એમ વંચાય છે.

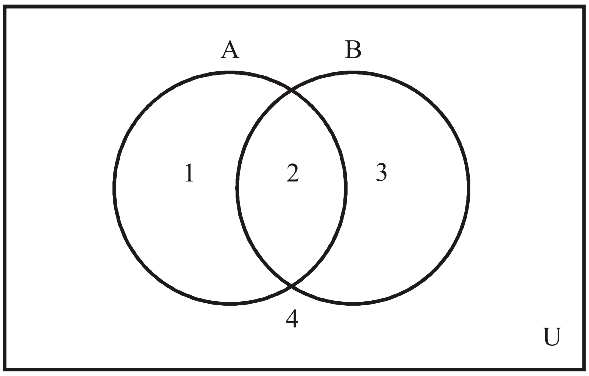
દા.ત. જો $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

અને $A = \{5,6,7,8\}$

તો $A' = \{1,2,3,4\}$

વેન આકૃતિઓ : ઘણીવાર જ્યાં શક્ય હોય ત્યાં ગણ અને તે વિશેના $A - B = \{2,6,10\}$ $B - A = \{12,16\}$ ખ્યાલોને સરળતાથી સમજવા આકૃતિઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ જાતની આકૃતિઓને વેન આકૃતિઓ કહે છે. વેન આકૃતિમાં સાર્વત્રિક ગણને ચોરસ કે લંબચોરસ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સાર્વત્રિક ગણના ઉપગણોને ચોરસ કે લંબચોરસમાં પ્રમાણસર વર્તુળો દોરી દર્શાવવામાં આવે છે.

નીચેની આકૃતિમાં U, A અને B તથા A$\cup$B, A$\cap$B વગેરે દર્શાવેલ છે.



ગણ અને તેનો પ્રદેશ નીચે મુજબ થશે.

ગણ	વિસ્તાર
U	{1,2,3,4}
A	{1,2}
B	{2,3}
$A \cup B$	{1,2,3}
$A \cap B$	{2}
A'	{3,4}
A–B	{1}
B–A	{3}

આ ઉપરાંત નીચેના નિયમો પણ વેન આકૃતિથી સાબિત કરી શકાય.

સંગઠનના નિયમો :

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

વિભાજનના નિયમો :

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

દા.ત.

જો A = {1,2,3,4,5}, B = {1,3,5}, C = {3,5,6} હોય તો નીચેનાની કિંમતો મેળવો.

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup (B \cap C)$, $A - B$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup B$ = {1,2,3,4,5}

$A \cap B$ = {1,3,5}

$A \cup (B \cup C)$ મેળવવા માટે પહેલાં

$B \cap C$ = {3,5}

હવે, $A \cup (B \cap C)$ = {1,2,3,4,5}

A – B = = {1,2,3,4,5} – {1,3,5} = {2,4}

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ માટે

$(A \cap B)$ = {1,3,5} અને $(A \cap C)$ = {3,5}

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,3,5\} \cup \{3,5\}$

$= \{1,3,5\}$

દ મોર્ગનના નિયમો :

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ઉપરની આકૃતિમાંથી,

ગણ	આકૃતિનો ભાગ
A	1,2
B	2,3
A'	3,4
B'	1,4
$A \cup B$	1,2,3
$(A \cup B)'$	4....... (i)
$A \cap B$	2
$(A \cap B)'$	1,3,4 .... (ii)
$A' \cap B'$	4 .... (iii)
$A' \cup B'$	1,3,4 .... (iv)

(i) અને (iii) પરથી $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) અને (iv) પરથી $(A \cap B) = A' \cup B'$

2. જો $A = \{x/x^2 - 9x + 20 = 0\}$ અને $B = \{x/x^3 - 3x^2 + 20x^2 = 0\}$

હોય તો સાબિત કરો કે A અને B અલગ ગણ છે.

$A = \{x/(x-4)(x-5) = 0\}$

$\{x/x = 4,5)$

$A = \{4, 5)$

અને

$B = \{x/(x-1)(x-2) = 0\}$

$\{x/x = 0,1,2,)$

$B = \{0,1,2)$

આમ, $A = \{4,5\}$ અને $B = \{0,1,2\}$ થાય.

બંનેમાં સામાન્ય ઘટક નથી.

બંને અલગ ગણ છે.

3. જો $x = \{x/x \in N$ અને $x<10\}$, $Y = \{x/x \in N$ અને $x>6\}$

$Z = x/x \in N$ અને x એ 5ની ગુણક સંખ્યા હોય} હોય તો $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \cap Y \cap Z$ શોધો.

$X \cup Y$, $X \cap Y$ અને $X \cap Y \cap Z$ શોધો.

આપેલા ગણોને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં દર્શાવતા,

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$Y = \{7,8,9,10,11,.....\}$

$Z = \{5,10,15,20,....\}$

$X \cup Y = \{1,2,3,...9\} \cup \{7,8,9,10,11,....\}$

$= \{1,2,3,4,.....\}$

$X \cap Y = \{1,2,3,4,...9\} \cap \{7,8,9,10,11,....\}$

$= \{7,8,9\}$

વળી $X \cap Y \cap Z = (X \cap Y) \cap Z$

$= \{7,8,9\} \cap \{5,10,15,20,....\}$

=

2.5 અભ્યાસ / સ્વાધ્યાય / તમારી પ્રગતિ ચકાસો

1. નીચેના ગણોને બંધારણ સ્વરૂપમાં ગોઠવો.

i. $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

ii. $A = \{4,5\}$

iii. 5 થી વિભાજન હોય તેવી ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ

iv. {અર્થશાસ્ત્ર, વાણિજ્ય, સંચાલન, એકાઉન્ટન્સી, અંગ્રેજી}

v. {લાલ, પીળો, વાદળી}

2. નીચેના ગણોને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં ગોઠવો.

i. {2m + 3 જ્યાં m ધનપૂર્ણાંક છે}

ii. {x : x, 30 કરતા ઓછા દિવસવાળો મહિનો}

iii. {x : $x \in$ N અને $x^2 < 26$}

iv. {x : x વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય એવી પૂર્ણાંક એવી સંખ્યાઓ}

3. નીચે આપેલા ગણોના માત્ર પ્રકાર લખો.

i. {x : x વાસ્તવિક સંખ્યાઓ}

ii. {ગુજરાતની નદીઓનો ગણ}

iii. {x જ્યાં $x > 10$, અને $x < 5$}

iv. {4 અને 5 વચ્ચે આપેલી અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ}

v. {6 અને 7 વચ્ચેની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ}

4. $\{1,2,3\}$ ના બધા જ ઉપગણો લખો.

5. જો $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{2,3,4\}$ અને $D = \{4,1\}$ હોય તો નીચેના વિધાનો સત્ય છે કે મિથ્યા તે નક્કી કરો.

(i) $A \subset B$ (ii) $D \subset B$ (iii) $B \subset C$ (iv) $C \not\subset A$ (v) $2 \in A$ (vi) $C \not\subset A$.

6. જો $A = \{3,5,7,9\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ અને $C = \{1,3,6,8\}$ હોય તો $A \cup (B \cap C)$ અને $A \cap (B \cup C)$ મેળવો.

7. જો $A = \{x : x^2 - 10x + 24 = 0\}$ અને $B = \{x : x^2 - 8x + 12 = 0\}$ હોય તો $A \cup B$ અને $A \cap B$ મેળવો.

8. જો સાર્વત્રિક ગણ $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ હોય અને તેના ઉપગણો $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ અને $C = \{3,4,5\}$ હોય તો A', B' અને $(A \cup B)'$ શોધો.

9. જો $A, A', \cup$ અને   નો અર્થ સામાન્ય સંકેત મુજબ હોય અને $A \subset U$ હોય તો નીચેનાની કિંમત લખો.

   $A \cap U, A \cup \ , A \cup A', A \cap A', \ \cap A.$

10. વેન આકૃતિથી સાબિત કરો.

    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C.$

11. નીચે આપેલી માહિતી સાચી છે કે ખોટી ?

    (i) $\{1\} \in \{1,2\}$

    (ii) $1 \subset \{1,2\}$

    (iii) $\{1\} \in \{1,2\}$

    (v) $\{1,2\} \subset \{1,2,1,2,1\}$

    (vi) $\ \subset \{\ \}$

    (vii) $\ \in \{\ \}$

    (iv) $1 \in \{1,2\}$

12. જો $A = \{x / x^2 + x - 12 = 0\}$ અને $B = \{x / x^3 - 5x^2 + 6x = 0\}$ હોય તો $A \cup B$, $A \cap B$ અને $A - B$ ની કિંમત મેળવો.

13. A, B અને C એવા ત્રણ ગણ શોધો કે જેથી $A \cap B = \ $, $B \cap C \neq \ $, $C \cap A \neq \ $ અને $A \cap B \cap C = \ $ થાય.

જવાબ :

1. (i) $\{x : x \in N$ અને $1 \leq 8 \leq 8\}$

   (ii) $\{x : x^2 - 9x + 20 = 0\}$

   (iii) $\{x : x = 5n$ અને $n \in N\}$

   (iv) $\{x : x =$ પ્રથમ વર્ષ બી. કોમના વિષયો$\}$

   (v) $\{x : x$ મૂળ રંગ$\}$

2. (i) $\{5,7,9,11,13\}$

   (ii) {ફેબ્રુઆરી}

   (iii) $\{1,2,3,4,5\}$

   (iv) $\{3,9,15,21,27......\}$

3. (i) અનંત, (ii) સાન્ત, (iii) ખાલી ગણ, (iv) અનંત, (v) ખાલી ગણ

4. , {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}

5. (i) મિથ્યા, (ii) મિથ્યા, (iii) મિથ્યા, (iv) સત્ય, (v) મિથ્યા

6. (i) $A \cup (B \cup C) = \{3,5,7,9,6,8\}$

   (ii) $A \cap (B \cup C) = \{3\}$

7. {2,4,6}, {6}

8. {6,7,8}, {1,3,5,7}, {7}

9. U, A, A, U, ,

11. (i) ખોટું, (ii) ખોટું, (iii) સાચું, (iv) સાચું, (v) સાચું (vii) સાચું

12. {–4,0,2,3}, {3}, {–4}

13. A = {1,2,3}, B = {3,4}, C = {4,2}