એકમ 16

નિયુક્તિની સમસ્યા

[Assignment Problem]

16.0 ઉદ્દેશો
16.1 પ્રાસ્તાવિક
16.2 નિયુક્તિની સમસ્યાનો અર્થ
16.3 નિયુક્તિની સમસ્યાના લક્ષણો
16.4 નિયુક્તિની સમસ્યાની ધારણાઓ
16.5 નિયુક્તિની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ
16.6 નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની રીત
 16.6.1 હંગેરિયન રીત
16.7 ઉદાહરણો
16.8 તમારી પ્રગતિ ચકાસો
 16.8.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.
 16.8.2 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.
16.9 ચાવીરૂપ શબ્દો
● સંદર્ભસૂચિ

16.0 ઉદ્દેશો :

એક સમાન સંખ્યામાં આપેલા ઉત્પત્તિ સ્થાનો અને પ્રાપ્તિસ્થાનોને એક પ્રાપ્તિસ્થાન દીઠ એક ઉત્પત્તિ સ્થાનોને એવી રીતે સાંકળવાનો છે કે જેથી કાર્યો પૂર્ણ કરવા માટે થતો ખર્ચ કે લાગતો સમય લઘુત્તમ થાય. આવી સમસ્યાનો અહીં અભ્યાસ કર્યો છે, જેના કારણે વિદ્યાર્થીઓની નિર્ણયશક્તિ વિકસે છે અને જ્યારે પણ વ્યક્તિની યોગ્ય કાર્યશક્તિ મુજબ એને કાર્યની સોંપણી કરી શકાય તેથી કાર્યો ઝડપથી પૂર્ણ કરી શકાય.

16.1 પ્રાસ્તાવિક :

નિયુક્તિની સમસ્યા એક વિશિષ્ટ પ્રકારની વાહનવ્યવહારની સમસ્યા છે. આ સમસ્યામાં જેટલાં પ્રાપ્તિસ્થાનો હોય તેટલા જ ઉત્પત્તિ સ્થાનો હોવાથી દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનોને એક અને ફક્ત એક જ ઉત્પત્તિ સ્થાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે. જેથી કાર્ય વહેંચણીથી લાગતો કુલ સમય અથવા કુલ ખર્ચ લઘુત્તમ થાય. આમ નિયુક્તિની સમસ્યાને કાર્યવહેંચણીની સમસ્યા પણ કહે છે.

16.2 નિયુક્તિની સમસ્યાનો અર્થ :

જુદા જુદા ઉત્પત્તિ સ્થાનો જેવા કે, યંત્રો, માણસો, વેચાણ પ્રતિનિધિઓ, ક્રિકેટની રમતમાં બેટ્સમેનો વગેરે. જ્યારે પ્રાપ્તિસ્થાનો અનુક્રમે કારીગરો, કરારબદ્ધ કાર્યો, વેચાણ વિસ્તારો, બેટિંગ સ્થાન વગેરે આપેલા હોય. આ ઉત્પત્તિ સ્થાનોથી કાર્યક્ષમતાનું સ્તર જુદું જુદું હોવાથી નિયુક્તિની સમસ્યા ઉદ્ભવે છે. એટલે કે જુદા જુદા યંત્રો

હોય તે યંત્રો ચલાવવા માટે કારીગરોની જરૂર પડે છે. હવે આ યંત્રો પર એવી રીતે કારીગરોની પસંદગી કરો કે ઓછામાં ઓછા સમય કે ખર્ચમાં બધા જ કાર્યો પૂર્ણ થાય. આવી સમસ્યાને નિયુક્તિની કે કાર્યવહેંચણીની સમસ્યા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

દા.ત. એક ઓફિસમાં પાંચ કર્મચારીઓને જુદા જુદા પાંચ કાર્યો સોંપવાના છે. હવે કયા કર્મચારીને કયું કાર્ય સોંપવું એ ઓફિસ મેનેજરનો પ્રશ્ન છે. મેનેજરે એ જોવાનું છે કે દરેક કર્મચારીને માત્ર એક જ કામ મળે અને જરૂરી તમામ કાર્યો ઓછામાં ઓછા સમયમાં કે ઓછામાં ઓછા ખર્ચે પૂરા થાય. આ માટે મેનેજરને દરેક કર્મચારીની કાર્યક્ષમતાની જાણકારી છે. વળી કોઈને પણ એકથી વધુ કાર્ય સોંપવાનું નથી અને દરેક કાર્ય માત્ર એક જ કર્મચારી પાસેથી પૂરું કરાવવાનું છે. આ સમસ્યાને નિયુક્તિની સમસ્યા કહે છે.

ધારો કે એક કંપનીમાં ચાર કારીગરો અને ચાર યંત્રો છે. દરેક કારીગરને બધા જ યંત્રો પર કાર્ય કરવા માટે લાગતો સમય જો જાણતા હોઈએ તો કયા કારીગરને કયા યંત્ર પર કાર્ય સોંપવું કે જેથી સમગ્ર કાર્યનો કુલ સમય લઘુત્તમ થાય, આવી સમસ્યાઓને નિયુક્તિની સમસ્યા કહે છે.

16.3 નિયુક્તિની સમસ્યાના લક્ષણો :

(1) આ સમસ્યામાં યંત્રો, કાર્યો, કર્મચારીઓ અથવા પ્રોજેક્ટની સંખ્યા જાણતા હોઈએ છીએ.

(2) દરેક કારીગરોને યંત્રો પર થતો સમય કે ખર્ચ શ્રેણીકની માહિતી હોય છે.

(3) આ સમસ્યાનો મુખ્ય ઉદ્દેશ કુલ સમય કે ખર્ચને લઘુત્તમ અથવા નફો વેચાણ, ક્રિકેટની રમતમાં રન મહત્તમ બનાવવાનો હોય છે.

16.4 નિયુક્તિની સમસ્યાની ધારણાઓ :

(1) નિયુક્તિની સમસયામાં ઉત્પત્તિ સ્થાનોની સંખ્યા અને પ્રાપ્તિસ્થાનોની સંખ્યા સરખી હોય છે.

(2) દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનમાં ફક્ત એક જ નિયુક્તિ આપવામાં આવે છે.

(3) દરેક ઉદ્‌ભવસ્થાનનો પુરવઠો અને દરેક પ્રાપ્તિસ્થાનની માંગ ફક્ત 1 (એક) એકમ હોય છે.

(4) i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનો ($i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$) j માં પ્રાપ્તિસ્થાન (જ્યાં $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$) સાથે સાંકળવાનું ખર્ચ C_{i_j} છે.

(5) નિયુક્તિની સમસ્યાનો મુખ્ય હેતુ બધા જ કાર્યોમાં એવી રીતે નિયુક્તિ આપવી કે જેથી ખર્ચ કે સમય લઘુત્તમ થાય.

16.5 નિયુક્તિની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ :

ધારો કે n ઉત્પત્તિ સ્થાનો $O_1, O_2, O_3 \ldots\ldots\ldots O_n$ છે. અને n પ્રાપ્તિસ્થાનો $D_1, D_2, D_3 \ldots\ldots\ldots D_n$ પર નિયુક્તિ આપવાની છે. વળી i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનને j માં પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે સાંકળવાનો ખર્ચ C_{i_j} વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જો x_{i_j} એ i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનની j માં પ્રાપ્તિસ્થાન સાથેની નિયુક્તિ દર્શાવે તો તેને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

$x_{i_j} = 1$ લઈએ તો i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનને j માં પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે.

$x_{i_j} = 0$ લઈએ તો i માં ઉત્પત્તિ સ્થાનને j માં પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે ન સાંકળવામાં આવે.

એક ઉત્પત્તિ સ્થાનને કોઈ એક જ પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે સાંકળી શકાય છે, તે જ રીતે દરેક પ્રાપ્તિસ્થાન કોઈ એક જ ઉત્પત્તિ સ્થાન સાથે સાંકળી શકાય છે. તેથી દરેક હાર અને સ્તંભમાં અનુક્રમે પુરવઠો અને માંગ બરાબર 1 જ થાય છે. તેથી નિયુક્તિની સમસ્યાનો ખર્ચ-શ્રેણીક નીચે મુજબ બનશે.

ઉત્પત્તિ સ્થાનોપ્રાપ્તિ સ્થાનો પુરવઠો

	D_1	D_2	....	D_j	....	D_{2n}	
O_1	C_{11}	C_{12}	....	C_{ij}	....	C_{1n}	1
O_2	C_{21}	C_{22}	....	C_{2j}	....	C_{2n}	1
.	|	|		|		|	|
.	|	|		|		|	|
.	|	|		|		|	|
O_i	C_{i1}	C_{i2}	....	C_{ij}	....	C_{in}	1
.	|	|		|		|	|
.	|	|		|		|	|
.	|	|		|		|	|
O_n	C_{n1}	C_{n2}	....	C_{nj}	....	C_{nn}	1
માંગ	1	1	....	1	....	1	

ટૂંકમાં નિયુક્તિની સમસ્યાને નીચે મુજબ ગાણિતીય સ્વરૂપમાં રજૂ કરી શકાય.

કુલ ખર્ચ $Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{i_j} \, x_{i_j}$ ને નીચેની શરતોને આધીન રહી લઘુત્તમ બનાવો.

(1) દરેક ઉત્પત્તિ સ્થાનને એક અને માત્ર એક જ પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે.

$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_{i_j} = 1$ (જ્યાં $i = 1, 2$ .... n)

(2) દરેક પ્રાપ્તિસ્થાન એક અને માત્ર એક જ ઉત્પત્તિ સ્થાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે.

$\therefore \sum x_{i_j} = 1$ (જ્યાં $j = 1, 2$ .... n)

(3) $x_{i_j} = 0$ અથવા $x_{i_j} = 1$ i અને j ની બધી જ કિંમતો માટે.

16.6 નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની રીત :

નિયુક્તિની સમસ્યા એ વિશિષ્ટ પ્રકારની વાહનવ્યવહારની સમસ્યા હોવાથી વાહન વ્યવહારની રીતો દ્વારા પણ ઉકેલ મેળવી શકાય છે. પરંતુ હંગેરીના ગણિતશાસ્ત્રી ડૉ. કૉનિંગે (Dr. Konig) મેળવેલ હંગેરિયન રીત એ નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની ઈષ્ટતમ રીત છે.

16.6.1 હંગેરિયન રીત (The Hungerian Method) :

કુલ સમય અથવા કુલ ખર્ચ લઘુત્તમ (ઓછામાં ઓછો) થાય તે માટેની હંગેરીયન રીત નીચે મુજબ છે.

પગથિયું-1 :

આપેલ ખર્ચ શ્રેણિકની પ્રથમ હારમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધો અને તે ઘટક પ્રથમ હારના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરો. બીજી હારમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધો અને તે ઘટક બીજી હારના બધા જ ઘટકમાંથી બાદ કરો. તે જ રીતે બાકીની બધી જ હાર માટે આ પ્રમાણે ગણતરી કરો.

પગથિયું-2 :

પગથિયું-1 કરવાથી મળતા શ્રેણિકના પ્રથમ સ્તંભમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધો અને તે ઘટકને પ્રથમ સ્તંભના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરો. તે જ રીતે બાકીના સ્તંભ માટે ગણતરી કરો.

પગથિયું-3 :

પગથિયું-1 અને 2 કર્યા બાદ ઈષ્ટ નિયુક્તિ મળી શકે કે નહિ તે નીચે મુજબ તપાસો.

(a) શ્રેણિકના જે ઘટકો શૂન્ય હોય તે બધા શૂન્યોમાંથી પસાર થતી શક્ય તેટલી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ (લીટીઓ) દોરો.

(b) જો આવી રેખાઓની કુલ સંખ્યા હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા જેટલી હોય તો ઈષ્ટ ઉકેલ મળે છે. તેથી સીધા જ પગથિયા નંબર 6 પ્રમાણે નિયુક્તિ આપો અને ઉકેલ મેળવો.

પગથિયું-4 :

બધા જ શૂન્યોને ઢાંકતી આડી અથવા ઊભી રેખાઓની સંખ્યા હાર કે સ્તંભ કરતાં ઓછી હોય તો આ તબક્કે ઈષ્ટ ઉકેલ મળતો નથી આવા સમયે નીચે મુજબ ગણતરી કરો.

(a) આડી અથવા ઊભી રેખાઓ વડે ઢંકાયેલ ન હોય તેવા ઘટકોમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધો. આ સૌથી નાના ઘટકને તે ઘટકોમાંથી બાદ કરો.

(b) જે ખાનામાં આડી અને ઊભી રેખાઓ એકબીજાને છેદતી હોય તે ખાનાના ઘટકોમાં આ સૌથી નાનો ઘટક ઉમેરો.

(c) આ સિવાયના બાકીના ઘટકો યથાવત રાખો.

પગથિયું-5 :

હવે શૂન્યોમાંથી પસાર થતી શક્ય તેટલી ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો. જ્યાં સુધી આવી રેખાઓની સંખ્યા હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા જેટલી ન થાય ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરો.

પગથિયું-6 :

(a) ઈષ્ટ ઉકેલ માટે પ્રથમ દરેક હારમાં જોતા જાવો અને જે હારમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય તે શૂન્ય દર્શાવતા ખાનાને એક નિયુક્તિ આપો. તેને (*) સંજ્ઞા વડે દર્શાવો અને તે શૂન્ય જે હાર અને સ્તંભમાં હોય તેમની અવગણના કરો.

(b) જો દરેક હારમાં એકથી વધુ શૂન્ય હોયતો સ્તંભમાં જોતા જાઓ અને જે સ્તંભમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય તે શૂન્ય દર્શાવતાં ખાનાને એક નિયુક્તિ આપો અને તેને (*) સંજ્ઞા વડે દર્શાવો અને તે શૂન્ય જે હાર અને સ્તંભમાં હોય તેમની અવગણના કરો. બાકી રહેલા શ્રેણિક માટે આ પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરો.

(c) જો કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ બે કે વધુ શૂન્ય હોય તો આપેલી સમસ્યા માટે એકથી વધુ ઈષ્ટ ઉકેલો શક્ય છે. અહીં ગમે તે એક શૂન્ય ઘટક હોય તે શૂન્ય દર્શાવતા ખાનાને એક નિયુક્તિ આપો.

આમ કરવાથી દરેક હારમાં અને દરેક સ્તંભમાં એક અને ફક્ત એક જ નિયુક્તિ (*) મળે છે. આ નિશાનીવાળા ખાનાઓની કિંમતોનો સરવાળો લઘુત્તમ ખર્ચ કે લઘુત્તમ સમય દર્શાવે છે.

મહત્તમ આવક, નફો, વેચાણ વગેરે મેળવવા માટે;

જ્યારે નિયુક્તિની સમસ્યામાં હેતુ ખર્ચ કે સમયને લઘુત્તમ બનાવવાને બદલે આવક, નફો, વેચાણ વગેરે મહત્તમ મેળવવાનો હોય ત્યારે આપેલ શ્રેણિકમાંથી સૌપ્રથમ સૌથી મોટો ઘટક શોધી તેમાંથી શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો બાદ કરો. આમ કરવાથી મહત્તમીકરણની સમસ્યા એ ન્યૂનતમીકરણની સમસ્યામાં રૂપાંતર થાય છે. આ રીતે મળતા શ્રેણિક માટે ઉપર દર્શાવેલ હંગેરિયન રીતના પગથિયાં 1થી 6 મુજબ અનુસરવા તેથી તેનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

16.7 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

એક કંપનીમાં ચાર કાર્યો ચાર યંત્રો પર કરવાની સમસ્યા છે. વિવિધ કાર્યો વિવિધ યંત્રો પર કરવા માટે કરવા પડતા ખર્ચ (રૂપિયા હજારમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. કુલ ખર્ચ લઘુત્તમ થાય તે રીતે ચાર કાર્યોની ચાર યંત્રો પર નિયુક્તિ કરો.

યંત્રો કાર્યો	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	9	10	11	16
J_2	15	12	11	16
J_3	12	14	17	15
J_4	14	17	20	10

જવાબ :

પગથિયું-1 : સૌ પ્રથમ દરેક હારમાંથી તે હારનો સૌથી નાનો ઘટક બાદ કરતાં નીચે પ્રમાણે શ્રેણિક મળશે.

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	1	2	7
J_2	4	1	0	5
J_3	0	2	5	3
J_4	4	7	10	0

સમજૂતિ :

પ્રથમ હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 9 છે. તે દરેક ઘટકમાંથી બાદ કરતાં 9 – 9 = 0, 10 – 9 = 1, 11 – 9 = 2 અને 16 – 9 = 7 પ્રથમ હાર મળશે. તે જ રીતે બીજી હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 11 છે. જે બીજી હારના ઘટકમાંથી બાદ કરી નવી બીજી હાર મેળવેલ છે. તે જ રીતે ત્રીજી અને ચોથી હાર મેળવેલ છે.

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણિકના દરેક સ્તંભમાંથી તે સ્તંભનો સૌથી નાનો ઘટક બાદ કરતાં નીચે મુજબ શ્રેણિક મળશે.

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0	0	2	7
J_2	4	0	0	5
J_3	0	1	5	3
J_4	4	6	10	0

સમજૂતિ :

પ્રથમ, ત્રીજા અને ચોથા સ્તંભમાં સૌથી નાનો ઘટક શૂન્ય છે તેથી તે સ્તંભો બદલાશે નહીં. જ્યારે બીજા સ્તંભમાં નાનો ઘટક 1 છે. જે બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં 1 – 1 = 0, 1 – 1 = 0, 2 – 1 = 1 અને 7 – 1 = 6 સ્તંભ મળશે. જે ઉપર દર્શાવેલ છે.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણિકમાં બધા જ શૂન્યોને આવરી લેતી શક્ય તેટલી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો.

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	0 – –	– – 0 – –	– – 2 – –	– – 7
J_2	4 – –	– – 0 – –	– – 0 – –	– – 5
J_3	0 – –	– – 1 – –	– – 5 – –	– – 3
J_4	4 – –	– – 6 – –	– – 10 –	– – 0

સમજૂતિ :

અહીં પ્રથમ અને બીજી હારમાં બે-બે શૂન્યો છે તેને જોડતી આડી રેખાઓ દોરેલ છે. તે જ પ્રમાણે પ્રથમ અને ચોથા સ્તંભમાં એક-એક શૂન્ય બાકી રહે છે તેથી બંને સ્તંભોનો શૂન્યોને રેખાઓ દ્વારા આવરી લીધા છે. આમ કરવાથી આડી અને ઊભી રેખાઓની સંખ્યા (4) હાર કે સ્તંભ જેટલી થાય છે. માટે ઈષ્ટ ઉકેલ મળે છે.

પગથિયું-4 : હાર અથવા સ્તંભમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય ત્યાં નિયુક્તિ આપો અને તે ખાનાને * વડે દર્શાવો.

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	-	*	-	-
J_2	-	-	*	-
J_3	*	-	-	-
J_4	-	-	-	*

સમજૂતિ :

પ્રથમ અને બીજી હારમાં બે શૂન્યો છે. તેથી સૌપ્રથમ ત્રીજી હારમાં એક શૂન્ય સામે * ફાળવણી કરો. ત્યારબાદ ચોથી હાર પણ એક જ શૂન્ય છે. ત્યાં * ફાળવણી કરો. આમ કરવાથી પ્રથમ સ્તંભ, ચોથો સ્તંભ તેમજ ત્રીજી હાર, ચોથી હાર બંધ થશે. તેથી હવે પ્રથમ હારના બીજા સ્તંભમાં ફાળવણી થશે. તે જ રીતે બીજી હારમાં પણ શૂન્ય સામે ફાળવણી થશે.

ઉકેલ : J_1 કાર્ય M_2 યંત્ર પર કરો.
J_2 કાર્ય M_3 યંત્ર પર કરો.
J_3 કાર્ય M_1 યંત્ર પર કરો.
J_4 કાર્ય M_4 યંત્ર પર કરો.

ઉપર પ્રમાણે કાર્યની વહેંચણી કરીએ તો ઓછામાં ઓછો ખર્ચ -

$Z = 10 + 11 + 12 + 10$

$\therefore Z = 43$ હજાર રૂપિયા થશે.

ઉદાહરણ-2 :

એક કોમ્પ્યૂટર કંપની પાસે ત્રણ નિષ્ણાંત પ્રોગ્રામરો છે. ત્રણ પ્રોગ્રામો A, B, C બનાવવા નિષ્ણાંતો દ્વારા લાગતો સરેરાશ સમય મિનિટમાં નીચે પ્રમાણે છે તો ત્રણેય પ્રોગ્રામરોને એવા પ્રોગ્રામની સોંપણી કરો કે જેથી પ્રોગ્રામ પૂર્ણ કરવામાં લાગતો સમય લઘુત્તમ થાય.

	પ્રોગ્રામ		
પ્રોગ્રામર	A	B	C
1	140	120	100
2	130	160	140
3	100	110	130

જવાબ :

પગથિયું-1 : સૌપ્રથમ દરેક હારમાંથી જે તે હારનો નાનો ઘટક જે તે હારના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરો.

	A	B	C
1	40	20	0
2	0	30	10
3	0	10	30

સમજૂતિ :

પ્રથમ હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 100 છે, તેથી 140 – 100 = 40, 120 – 100 = 20 અને 100 – 100 = 0 પ્રમાણે પ્રમ હાર મળશે. તે જ રીતે બીજી અને ત્રીજી હાર મેળવેલ છે.

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકમાં દરેક સ્તંભમાંથી જે તે સ્તંભનો સૌથી નાનો ઘટક શોધી જે તે સ્તંભના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરો.

	A	B	C
1	40	10	0
2	0	20	10
3	0	0	30

સમજૂતિ :

પ્રથમ અને ત્રીજા સ્તંભમાં સૌથી નાનો ઘટક 0 (શૂન્ય) છે. તે બાદ કરતાં પ્રથમ અને ત્રીજા સ્તંભના ઘટકો

બદલાશે નહિ. બીજા સ્તંભમાં સૌથી નાનો ઘટક 10 છે. તેથી બીજો સ્તંભ 20 – 10 = 10, 30 – 10 = 20 અને 10 – 10 = 0 મળશે.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણિકમાં બધા જ શૂન્યોને આવરી લેતી શક્ય તેટલી ઓછામાં ઓછી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો.

	A	B	C
1	40	10	0
2	0	20	10
3	0	0	30

સમજૂતિ :

પ્રથમ સ્તંભમાં બે શૂન્યોને જોડતી ઊભી રેખા દોરો ત્યાર બાદ ત્રીજી હારમાં શૂન્યોને જોડતી આડી રેખા દોરો. હજુ ત્રીજી સ્તંભમાં એક શૂન્ય રહે છે, તેથી ત્રીજા સ્તંભમાં ઊભી રેખા દોરો.

પગથિયું-4 : હવે આ રેખાઓની સંખ્યા ત્રણ છે, જે હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા જેટલી થાય છે. તેથી ઈષ્ટ ઉકેલ મળશે. માટે હારમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય ત્યાં પ્રથમ નિયુક્તિ આપો.

	A	B	C
1	-	-	*
2	*	-	-
3	-	*	-

સમજૂતિ :

પ્રથમ હારમાં ત્રીજા સ્તંભમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય છે. ત્યાં પ્રથમ નિયુક્તિ આપેલ છે. ત્યારબાદ બીજી હારમાં પણ એક જ શૂન્ય છે, ત્યાં નિયુક્તિ આપતા બીજી હાર અને પ્રથમ સ્તંભ બંધ થશે. તેથી ત્રીજી હારમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય બાકી રહેશે ત્યાં નિયુક્તિ આપો.

ઉકેલ :

પ્રોગ્રામર 1 ને C પ્રોગ્રામની સોંપણી કરો.

પ્રોગ્રામર 2 ને A પ્રોગ્રામની સોંપણી કરો.

પ્રોગ્રામર 3 ને B પ્રોગ્રામની સોંપણી કરો.

આમ કરવાથી લઘુત્તમ સમય Z = 100 + 130 + 110 = 340 મિનિટ થશે.

ઉદાહરણ-3 :

પાંચ કારીગરો P, Q, R, S અને T ને પાંચ કાર્યો I, II, III, IV અને V એવી રીતે સોંપો કે જેથી કુલ સમય લઘુત્તમ થાય.

કાર્યો કારીગરો	I	II	III	IV	V
P	20	20	25	35	10
Q	18	30	44	35	33
R	15	17	25	5	15
S	40	41	40	42	35
T	17	15	16	20	22

જવાબ :

પગથિયું-1 : દરેક હારમાં નાનો ઘટક શોધી જે તે હારના તમામ ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	I	II	III	IV	V
P	10	10	15	25	0
Q	0	12	26	17	15
R	10	12	20	0	10
S	5	6	5	7	0
T	2	0	1	5	7

સમજૂતિ :

પ્રથમ હારમાં સૌથી નાનો ઘટક 10 છે. તેથી પ્રથમ હાર 20 – 10 = 10, 20 – 10 = 10, 25 – 10 = 15, 35 – 10 = 25 અને 10 – 10 = 0 થશે તેવી જ રીતે બાકીની હારોની ગણતરી કરેલ છે.

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકના દરેક સ્તંભમાંથી સૌથી નાનો ઘટક જે તે સ્તંભના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	I	II	III	IV	V
P	10	10	14	25	0
Q	0	12	25	17	15
R	10	12	19	0	10
S	5	6	4	7	0
T	2	0	0	5	7

સમજૂતિ :

પ્રથમ, બીજા, ચોથા અને પાંચમાં સ્તંભમાં નાનો ઘટક શૂન્ય છે. તેથી તે સ્તંભો બદલાશે નહિ. જ્યારે ત્રીજા સ્તંભના બધા જ ઘટકોમાંથી બાદ કરેલ છે.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણીકમાં બધા જ શૂન્યોને આવરી લેતી શક્ય તેટલી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો.

	I	II	III	IV	V
P	10	10	14	25	0
Q	0	12	25	17	15
R	10	12	19	0	10
S	5	6	4	7	0
T	2	0	0	5	7

સમજૂતિ :

આ શ્રેણીકમાં પાંચમી હાર અને પાંચમાં સ્તંભમાં બે શૂન્યો છે તેથી પ્રથમ પાંચમી હાર અને પાંચમાં સ્તંભમાં અનુક્રમે આડી અને ઊભી રેખા દોરેલ છે. હજુ બીજી અને ત્રીજી હારમાં એક-એક શૂન્ય બાકી રહે છે. તેથી બીજી અને ત્રીજી હારમાં આડી રેખાઓ દોરેલ છે.

અહીં શૂન્યોને જોડતી આડી કે ઊભી રેખાઓની સંખ્યા ચાર થાય છે, જે હાર કે સ્તંભની સંખ્યા કરતાં ઓછી છે તેથી ઈષ્ટ નિયુક્તિ મળતી નથી. તેથી આગળના પગથિયા કરવા પડશે.

પગથિયું-4 : બાકી રહેલા શ્રેણીકમાં (આડી અથવા ઊભી હાર સિવાયના) સૌથી નાનો ઘટક 4 છે. તે બાકી રહેલા ઘટકોમાંથી બાદ કરી જ્યાં બે રેખાઓ ભેગી થતી હોય ત્યાં ઉમેરતાં નવો શ્રેણીક મળશે. તેમાં શૂન્યોને જોડતી ઓછામાં ઓછી આડી કે ઊભી રેખાઓ દોરો.

	I	II	III	IV	V
P	6	6	10	21	0
Q	0	12	25	17	19
R	10	12	19	0	14
S	1	2	0	3	0
T	2	0	0	5	11

સમજૂતિ :

સૌપ્રથમ પાંચમી હાર અને પાંચમાં સ્તંભમાં બે શૂન્યોને આવરી લેતી રેખાઓ દોરેલ છે. પછી ત્રીજા સ્તંભમાં અને બીજી તેમજ ત્રીજી હારમાં રેખાઓ દોરેલ છે.

અહીં શૂન્યને જોડતી આડી કે ઊભી રેખાઓની સંખ્યા 5 છે. જે હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા જેટલી થાય છે. તેથી ઈષ્ટ નિયુક્તિ મળશે.

પગથિયું-5 : જે હાર કે સ્તંભમાં ફક્ત એક જ શૂન્ય હોય ત્યાં પ્રથમ નિયુક્તિ આપો, તે જ રીતે બાકીની નિયુક્તિ આપો.

	I	II	III	IV	V
P	-	-	-	-	*
Q	*	-	-	-	-
R	-	-	-	*	-
S	-	-	*	-	-
T	-	*	-	-	-

ઉકેલ : કારીગર P ને V મું કાર્ય સોંપો.

કારીગર Q ને I લું કાર્ય સોંપો.

કારીગર R ને IV થું કાર્ય સોંપો.

કારીગર S ને III જુ કાર્ય સોંપો.

કારીગર T ને II જુ કાર્ય સોંપો.

કુલ સમય $Z = 10 + 18 + 5 + 40 + 15 = 88$ કલાક

ઉદાહરણ-4 :

નીચે આપેલ શ્રેણીક ઉપરથી કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે પ્રમાણે નિયુક્તિ કરો. કુલ ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.

	વ્યક્તિ				
કાર્ય	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	10	14	20	14	6
W_2	4	22	18	18	12
W_3	16	18	4	8	8
W_4	14	10	12	16	10
W_5	6	16	20	12	20

જવાબ :

પગથિયું-1 : દરેક હારમાંથી નાનો ઘટક લઈ બાકીના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	4	8	12	8	0
W_2	0	18	14	14	8
W_3	12	14	0	4	4
W_4	4	0	2	6	0
W_5	0	10	14	6	14

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકના દરેક સ્તંભામાંથી સૌથી નાનો ઘટક જે સ્તંભના ઘટકોમાં બાદ કરતાં મળેલ શ્રેણીકમાં શૂન્યને જોડતી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરતાં;

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	4	8	12	4	0
W_2	0	18	14	10	8
W_3	12	14	0	0	4
W_4	4	0	2	2	0
W_5	0	10	14	2	14

અહીં શૂન્યોને જોડતી આડી અને ઊભી રેખાઓની સંખ્યા 4 છે. જ્યારે હાર કે સ્તંભની સંખ્યા 5 છે. તેથી ઈષ્ટક ઉકેલ મળતો નથી તેથી આગળનું પગથિયું કરવું પડશે.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણિકમાં રેખાઓને આવરી લેતાં ઘટક સિવાયના બાકીના ઘટકોમાં સૌથી નાનો ઘટક 2 છે. જે બાકીના શ્રેણીકના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં અને જ્યાં બે રેખાઓ ભેગી થતી હોય તેમાં ઉમેરતાં,

નોંધ : જે ઘટક પર એક રેખા હોય તે ઘટક બદલાશે નહિ.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	6	8	12	4	0
W_2	0	16	12	8	6
W_3	14	14	0	0	4
W_4	6	0	2	2	0
W_5	0	8	12	0	12

અહીં શૂન્યોને જોડતી આડી અને ઊભી રેખાઓની સંખ્યા 5 છે. જે હાર કે સ્તંભ જેટલી થાય છે. માટે ઈષ્ટ ઉકેલ શક્ય છે.

પગથિયું-4 : નિયુક્તિ આપો.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
W_1	-	-	-	-	*
W_2	*	-	-	-	-
W_3	-	-	*	-	-
W_4	-	*	-	-	-
W_5	-	-	-	*	-

ઉકેલ : W_1 કાર્ય P_5 વ્યક્તિને સોંપો.
W_2 કાર્ય P_1 વ્યક્તિને સોંપો.
W_3 કાર્ય P_3 વ્યક્તિને સોંપો.
W_4 કાર્ય P_2 વ્યક્તિને સોંપો.
W_5 કાર્ય P_4 વ્યક્તિને સોંપો.

કુલ ન્યૂનતમ ખર્ચ $Z = 6 + 4 + 4 + 10 + 12$

$\therefore Z = 36$

ઉદાહરણ-5 :

એક કંપનીના ચાર મશીનો પર ચાર કાર્યો કરવાના છે. દરેક કાર્ય કોઈપણ મશીન પર થઈ શકે છે. પરંતુ વિવિધ મશીન પર વિવિધ કાર્ય કરવા માટેનું ખર્ચ ભિન્ન છે. જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. તે પરથી ચારેય કાર્ય કરવાનું કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે કાર્યની મશીનો પર નિયુક્તિ આપો.

કાર્યો / મશીનો	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	10	9	7	8
M_2	5	8	7	7
M_3	5	4	6	5
M_4	2	3	4	5

જવાબ :

પગથિયું-1 : દરેક હારમાંથી નાનો ઘટક શોધી જે તે હારના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	3	2	0	1
M_2	0	3	2	2
M_3	1	0	2	1
M_4	0	1	2	3

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકના દરેક સ્તંભમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધી જે તે સ્તંભના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં મળતા શ્રેણીકમાં શૂન્યોને જોડતી ઓછામાં ઓછી આડી અથવા ઊભી રેખાઓ દોરો.

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	3	2	0	0
M_2	0	3	2	1
M_3	1	0	2	0
M_4	0	1	2	2

અહીં રેખાઓની સંખ્યા 3 છે જે હાર કે સ્તંભ (4) કરતાં ઓછી છે માટે ઈષ્ટ ઉકેલ મળતો નથી. તેથી આગળના પગથિયા કરો.

પગથિયું-3 : આ શ્રેણીકમાં રેખાઓ વડે આવરી લેવાયેલા ઘટક સિવાયના ઘટકોના શ્રેણીકમાં સૌથી નાનો ઘટક 1 છે. જે બાકીના શ્રેણીકના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં અને જે ઘટક પર રેખાઓ છેડતી હોય ત્યાં ઉમેરતાં;

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	4	2	0	0
M_2	0	2	1	0
M_3	2	0	2	0
M_4	0	0	1	1

અહીં રેખાઓની સંખ્યા 4 છે જે હાર કે સ્તંભની સંખ્યા જેટલી થાય છે માટે ઈષ્ટ ઉકેલ મળશે.

પગથિયું-4 : નિયુક્તિ આપો.

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	-	-	*	-
M_2	*	-	-	-
M_3	-	-	-	*
M_4	-	*	-	-

સમજૂતિ :

અહીં સૌપ્રથમ ત્રીજા સ્તંભમાં એક શૂન્ય છે. ત્યાં નિયુક્તિ * આપેલ છે. ત્યારબાદ હાર અને સ્તંભમાં એકથી વધુ શૂન્યો છે. તેથી એકથી વધુ ઉકેલ મળે છે. એવી પરિસ્થિતિમાં જે હારમાં બે શૂન્ય હોય ત્યાં કોઈપણ એક શૂન્ય સામે નિયુક્તિ આપો અને બાકીના ખાનાની નિયુક્તિ પૂર્ણ કરો. તે જ રીતે અહીં બીજી હારમાં બે શૂન્ય છે પરંતુ પ્રથમ બીજી હાર પ્રથમ સ્તંભમાં નિયુક્તિ * આપેલ છે. તેથી ચોથા સ્તંભમાં એક જ શૂન્ય બાકી રહે છે. ત્યાં નિયુક્તિ આપેલ છે અને છેલ્લે ચોથી હારમાં નિયુક્તિ આપેલ છે.

ઉકેલ-1 : $M_1 - J_3$
$M_2 - J_1$
$M_3 - J_4$
$M_4 - J_2$

કુલ ખર્ચ $Z = 20$

અથવા

ઉકેલ-2 $M_1 - J_3$

$M_2 - J_4$

$M_3 - J_2$

$M_4 - J_1$

કુલ ખર્ચ $Z = 20$

આમ એકથી વધુ ઉકેલ શક્ય છે. પરંતુ આપણે એક જ ઉકેલ દર્શાવવાનો છે.

ઉદાહરણ-6 :

ચાર કાર્યો જુદા જુદા ચાર યંત્રો પર કરવાથી થતો એકમ દીઠ નફો નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. તે પરથી દરેક કાર્યની જુદા જુદા યંત્ર પર એ રીતે નિયુક્તિ કરો કે જેથી કુલ નફો મહત્તમ થાય. મહત્તમ નફો પણ મેળવો.

યંત્ર કાર્ય	W	X	Y	Z
A	11	12	13	14
B	19	18	17	16
C	17	18	19	20
D	15	16	13	14

જવાબ :

અહીં સમસ્યાનો હેતુ મહત્તમ નફો કરવાનો છે. તેથી સૌપ્રથમ શ્રેણીકના સૌથી મોટા ઘટક (અહીં 20 છે)માંથી બધા જ ઘટકો બાદ કરીને નવો શ્રેણીક બનાવી પછી હંગેરિયન રીતનો ઉપયોગ કરીશું.

	W	X	Y	Z
A	9	8	7	6
B	1	2	3	4
C	3	2	1	0
D	5	4	7	6

પગથિયું-1 : આ શ્રેણીકમાં દરેક હારમાંથી સૌથી નાનો ઘટક શોધી જે તે હારના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં;

	W	X	Y	Z
A	3	2	1	0
B	0	1	2	3
C	3	2	1	0
D	1	0	3	2

પગથિયું-2 : નવા શ્રેણીકના દરેક સ્તંભમાંથી સૌથી નાનો ઘટક લઈ જે તે સ્તંભના ઘટકોમાંથી બાદ કરતાં

તેમજ શૂન્યને જોડતી આડી તથા ઊભી રેખાઓ દોરતાં;

	W	X	Y	Z
A	3	2	0	0
B	0	1	1	3
C	3	2	0	0
D	1	0	2	2

અહીં રેખાઓની સંખ્યા 4 છે જે હાર કે સ્તંભની સંખ્યા (4) જેટલી થાય છે માટે ઈષ્ટ ઉકેલ મળશે.

	W	X	Y	Z
A	-	-	*	-
B	*	-	-	-
C	-	-	-	*
D	-	*	-	-

સમજૂતિ :

સૌપ્રથમ પ્રથમ અને ચોથી હારમાં એક શૂન્ય છે. ત્યાં નિયુક્તિ * આપેલ છે. તેથી પ્રથમ અને બીજો સ્તંભ બંધ થશે. હવે બીજા ત્રીજા સ્તંભમાં બે-બે શૂન્યો છે. તેથી એકથી વધુ ઉકેલ શક્ય છે. આપણે યાદચ્છિક રીતે કોઈપણ શૂન્ય પસંદ કરી નિયુક્તિ આપી શકીએ છીએ તેથી અહીં પ્રથમ હારમાં ત્રીજા સ્તંભમાં * નિયુક્તિ આપેલ છે. તે જ પ્રમાણે બાકીની નિયુક્તિ આપેલ છે.

ઉકેલ : A – Y

B – W

C – Z

D – X

કુલ મહત્તમ નફો Z = 13 + 19 + 20 + 16

... Z = 68

16.8 તમારી પ્રગતિ ચકાસો :

16.8.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) નિયુક્તિની સમસ્યા ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(2) નિયુક્તિની સમસ્યા એટલે શું ? નિયુક્તિની સમસ્યાના લક્ષણો જણાવો.

(3) નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની હંગેરિયન પદ્ધતિ સવિસ્તાર સમજાવો.

(4) નિયુક્તિની સમસ્યાનો અર્થ સમજાવી તેની ધારણાઓ લખો.

(5) નિયુક્તિની સમસ્યાનું ગાણિતીય સ્વરૂપ સમજાવો.

(6) "નિયુક્તિની સમસ્યા એ એક વિશિષ્ટ પ્રકારની વાહનવ્યવહારની સમસ્યા છે" આ વિધાનની ચર્ચા કરો.

(7) એક કંપનીના ત્રણ યંત્રો પર ત્રણ કાર્યો કરવાના છે. દરેક કાર્ય કોઈપણ યંત્ર પર થઈ શકે છે. પરંતુ વિવિધ યંત્ર પર વિવિધ કાર્ય કરવા માટેનું ખર્ચ જુદું જુદું છે, જે નીચે કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. તે પરથી ત્રણેય કાર્ય

કરવાનું કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય એ રીતે કાર્યની યંત્ર પર નિયુક્તિ આપો.

	યંત્રો		
કાર્યો	M_1	M_2	M_3
W_1	6	3	5
W_2	5	9	2
W_3	5	7	8

(8) નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યાનો કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે ઈષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

	P	Q	R	S	T
A	10	5	13	15	16
B	3	9	18	13	6
C	10	7	2	2	2
D	7	11	9	7	12
E	7	9	10	4	12

(9) ચાર યંત્રો P, Q, R અને S ઉપર ચાર કાર્યો W, X, Y અને Z એવી રીતે કરવામાં આવે છે કે દરેક કાર્ય દરેક યંત્ર પર લઈ શકાય છે. દરેક યંત્ર પર જુદા જુદા કાર્ય માટે થતું ખર્ચ રૂપિયામાં નીચેના શ્રેણીક દ્વારા દર્શાવેલ છે. કુલ ખર્ચ ઓછામાં ઓછું થાય તે મુજબ નિયુક્તિ કરો.

યંત્રો કાર્યો	W	X	Y	Z
P	9	14	19	15
Q	7	17	20	19
R	9	18	21	18
S	10	15	21	16

(10) નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યાનો કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે ઈષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

	1	2	3	4	5
I	11	16	9	21	24
II	17	12	10	14	18
III	16	9	15	20	13
IV	18	14	12	11	10
V	12	13	11	15	11

(11) નીચે આપેલા શ્રેણીક ઉપરથી કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે પ્રમાણે નિયુક્તિ કરો. કુલ ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.

	f	g	h	i	j
a	2	1	2	3	0
b	4	1	0	7	0
c	0	0	2	0	2
d	0	1	0	1	0
e	3	0	3	0	3

(12) નીચે આપેલા શ્રેણીક ઉપરથી કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે પ્રમાણે નિયુક્તિ કરો. કુલ ન્યૂનતમ પણ શોધો.

મશીન કાર્ય	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	11	10	9	8
J_2	3	4	5	6
J_3	5	4	3	2
J_4	7	6	9	8

(13) નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યાનો કુલ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે ઈષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

	P	Q	R	S
A	6	9	11	8
B	14	12	15	14
C	9	10	16	12
D	13	12	13	10

(14) લઘુત્તમ ખર્ચ આવે તે પ્રમાણે નિયુક્તિ કરો. લઘુત્તમ ખર્ચ શોધો.

	I	II	III	IV
A	32	20	25	30
B	12	10	20	15
C	20	10	15	25
D	30	25	35	30

(15) નીચે આપેલ નિયુક્તિની સમસ્યાનો ઉકેલ કુલ સમય લઘુત્તમ આવે તે રીતે મેળવો.

યંત્રો કાર્ય	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	20	22	29	21
J_2	15	20	17	18
J_3	22	24	23	21
J_4	18	25	21	19

(16) નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યાનો કુલ સમય ન્યૂનતમ થાય તે રીતે ઈષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

	સેલ્સમેન			
કાઉન્ટર	A	B	C	D
P	31	62	29	42
Q	12	19	39	55
R	17	29	50	41
S	35	40	38	42

(17) ક્રિકેટ ટીમના એક કેપ્ટનને પાંચ બેટ્સમેનોને બેટિંગ માટે વચ્ચેના સ્થાનો (ક્રમ) નક્કી કરવાના છે. પાંચ બેટ્સમેનો દ્વારા જુદા જુદા ક્રમે આવીને બેટીંગમાં નીચે મુજબ સરેરાશ રન કરેલા છે. તો અપેક્ષિત કુલ રન મહત્તમ થાય તે રીતે નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યા ઉકેલો.

બેટિંગ ક્રમ બેટ્સમેન	III	IV	V	VI	VII
A	32	38	40	28	40
B	40	24	28	21	36
C	41	27	33	30	37
D	22	38	41	36	36
E	29	33	40	35	39

(18)નફો મહત્તમ થાય તે રીતે નીચેની નિયુક્તિ સમસ્યા ઉકેલો.

	A	B	C	D
1	42	35	28	21
2	30	25	20	15
3	30	25	20	15
4	24	20	16	12

(19) એક કંપની પાસે પાંચ વેચાણ વિસ્તાર માટે પાંચ સેલ્સમેનો છે. તેઓનું જુદા જુદા વેચાણ વિસ્તારમાં સરેરાશ માસિક વેચાણ (હજાર રૂ.માં) નીચે મુજબ થયું હતું. આ માહિતી પરથી વેચાણ મહત્તમ થાય તે રીતે નિયુક્તિની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવો.

	સેલ્સમેન				
વિસ્તાર	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	85	75	65	125	75
A_2	90	78	66	132	78
A_3	75	66	57	114	69
A_4	80	72	60	120	72
A_5	76	64	56	112	68

(20) નફો મહત્તમ થાય તે રીતે નીચેની નિયુક્તિની સમસ્યા ઉકેલો.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A	38	43	45	35	45
B	44	29	35	26	41
C	45	33	39	36	42
D	48	43	46	41	41
E	33	38	45	40	44

જવાબો :

(7) $W_1 \rightarrow M_2$, $W_2 \rightarrow M_3$ અને $W_3 \rightarrow M_1$
$Z = 10$

(8) $A \rightarrow Q$, $B \rightarrow P$, $C \rightarrow T$, $D \rightarrow R$, $E \rightarrow S$
$Z = 23$

(9) $P \rightarrow Z$, $Q \rightarrow W$, $R \rightarrow Y$, $S \rightarrow X$
$Z = 58$

(10) $I \rightarrow 1$, $II \rightarrow 3$, $III \rightarrow 2$, $IV \rightarrow 4$, $V \rightarrow 5$
$Z = 52$

(11) $I \rightarrow 5$, $II \rightarrow 3$, $III \rightarrow 4$, $IV \rightarrow 1$, $V \rightarrow 2$
$Z = 0$

(12) $J_1 \rightarrow M_4$, $J_2 \rightarrow M_1$, $J_3 \rightarrow M_3$, $J_4 \rightarrow M_2$
$Z = 20$

(13) $A \rightarrow P$, $B \rightarrow R$, $C \rightarrow Q$, $D \rightarrow S$
$Z = 41$

(14) $A \rightarrow II$, $B \rightarrow I$, $C \rightarrow III$, $D \rightarrow IV$
$Z = 77$

(15) $J_1 \rightarrow M_2$, $J_2 \rightarrow M_3$, $J_3 \rightarrow M_4$, $J_4 \rightarrow M_1$
$Z = 78$

(16) $P \rightarrow C$, $Q \rightarrow B$, $R \rightarrow A$, $S \rightarrow D$
$Z = 107$

(17) $1 \rightarrow II$, $2 \rightarrow V$, $3 \rightarrow I$, $4 \rightarrow III$, $5 \rightarrow IV$
$Z = 191$

(18) $1 \rightarrow A$, $2 \rightarrow C$, $3 \rightarrow B$, $4 \rightarrow D$
$Z = 99$

(19) $M_1 \rightarrow S_3$, $M_2 \rightarrow S_4$, $M_3 \rightarrow S_5$, $M_4 \rightarrow S_2$, $M_5 \rightarrow S_1$
$Z = 414$

(20) $A \rightarrow (2)$, $B \rightarrow (1)$, $C \rightarrow (5)$, $D \rightarrow (3)$, $E \rightarrow (4)$
$Z = 215$

16.8.2 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો :

(1) નિયુક્તિની સમસ્યા એ .... ની સમસ્યાનો વિશિષ્ટ પ્રકાર છે.

(a) વાહનવ્યવહાર (b) ફેરબદલી (c) સહસંબંધ (d) નિયતસંબંધ

(2) નિયુક્તિની સમસ્યામાં દરેક ઉત્પત્તિસ્થાનનો પુરવઠો .... હોય છે.

(a) જુદો જુદો (b) 1 (c) 0 (d) એકપણ નહીં

(3) નિયુક્તિની સમસ્યમાં દરેક હાર અને દરેક સ્તંભમાં કેટલી નિયુક્તિ હોય છે ?

(a) એકથી વધુ (b) નિશ્ચિત નથી

(c) બરાબર એક (d) એકપણ નહીં

(4) નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની હંગેરિયન પદ્ધતિ .... દ્વારા વિકસાવવામાં આવેલ છે.

(a) વૉગેલ (b) ન્યૂટન (c) ફિશર (d) એમ. હંગેરી

(5) નિયુક્તિની સમસ્યાના ઉકેલની હંગેરિયન પદ્ધતિથી સમસ્યાનો .... ઉકેલ મળે છે.

(a) વિકૃત (b) મૂળભૂત (c) અઋણ (d) ઈષ્ટતમ

(6) નિયુક્તિની સમસ્યાના ઈષ્ટ ઉકેલ માટે મેળવેલા શ્રેણીકમાં મળતાં શૂન્યોને આવરી લેવા માટે દોરવી પડતી આડી અને ઊભી રેખાઓની સંખ્યા એ હાર કે સ્તંભની સંખ્યા .... હોય છે.

(a) થી ઓછી (b) થી વધુ

(c) જેટલી (બરાબર) (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

(7) નિયુક્તિની સમસ્યામાં જ્યારે નિયુક્તિની સંખ્યા .... શ્રેણીકના હાર અથવા સ્તંભની સંખ્યા થાય ત્યારે જ તેનો ઈષ્ટ ઉકેલ મળે છે.

(a) $<$ (b) $=$ (c) $>$ (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં.

(8) નિયુક્તિની સમસ્યામાં હેતુલક્ષી વિધેયને મહત્તમ બનાવવાના પ્રશ્નને લઘુત્તમ બનાવવાની સમસ્યામાં કેવી રીતે રૂપાંતરિત કરી શકાય છે ?

(a) શ્રેણીકના મહત્તમ ઘટકમાંથી બધા જ ઘટકોને બાદ કરીને

(b) શ્રેણીકનો ન્યૂનતમ ઘટક બધાં જ ઘટકોમાંથી બાદ કરીને

(c) શ્રેણીકનો ન્યૂનતમ ઘટક બધા જ ઘટકોમાંથી ઉમેરીને

(d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

(9) 6×6 ક્રમની એક નિયુક્તિની સમસ્યા શક્ય કેટલા ઉકેલ મળે ?

(a) 6 (b) 11 (c) 12 (d) 36

(10) નિયુક્તિ સમસ્યામાં નિયુક્તિ એકમો x_{i_j} ની કિંમત .... હોય છે.

(a) 0 અથવા 1 (b) 0 (c) 1 (d) 10

(11) ઈષ્ટ નિયુક્તિ મળી છે કે નહીં તે તપાસવા મળતા શ્રેણીકમાં દરેક શૂન્યમાંથી પસાર થતી .... આડી ઊભી રેખા દોરો.

(a) વધુમાં વધુ (b) ઓછામાં ઓછી

(c) દસ (d) આપેલમાંથી એકપણ નહીં

(12) જો નિયુક્તિ સમસ્યામાં હેતુલક્ષી વિધેય મહત્તમ બનાવવાનું હોય, ત્યારે શ્રેણીકના સૌથી .... ઘટકમાંથી દરેક .... કરીને નવો શ્રેણીક મેળવવામાં આવે છે.

(a) નાનામાં નાનો, ઉમેરો (b) મોટામાં મોટો, ઉમેરો

(c) નાનામાં નાનો, બાદ (d) મોટામાં મોટો, બાદ

જવાબો :

(1) – a	(2) – b	(3) – c	(4) – d	(5) – d	(6) – c
(7) – b	(8) – a	(9) – a	(10) – a	(11) – b	(12) – d

16.9 ચાવીરૂપ શબ્દો :

નિયુક્તિ : પસંદગી એટલે કે કોઈપણ યંત્ર કે ટેબલ પર વ્યક્તિને સોંપવામાં આવતું કાર્ય.

ઈષ્ટતમ ઉકેલ : કોઈપણ પ્રશ્નમાં મહત્તમ અથવા લઘુત્તમ કિંમતો પ્રાપ્ત થાય તેને ઈષ્ટતમ ઉકેલ કહેવાય.

કાર : આડી રેખા

સ્તંભ : ઊભી રેખા

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) કાર્યાત્મક સંશોધન, અક્ષર પ્રકાશન, અમદાવાદ (2015)
લેખક : ડૉ. એમ.એચ. મૈસુરીયા, ડૉ. દિનેશભાઈ એમ. પટેલ

(2) ક્રિયાત્મક સંશોધનની ઈષ્ટતમ પદ્ધતિઓ, યુનિવર્સિટી ગ્રંથ નિમાર્ણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય, અમદાવાદ-6 (1996)
સ્વ. પ્રા. રમેશચંદ્ર એન. દેસાઈ, ડૉ. ભરતભાઈ બી. જાની

(3) Operation Research & Quantitative Techniques, (2008)
K. Shridharee Bhat, Himalaya Publishing House.

★ ★ ★