એકમ 3

ગાણિતીય અપેક્ષા
(Mathemetical Expectation)

3.0 ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિદ્યાર્થીઓ સતત ચલ, અસતત ચલ અને યદૃચ્છ ચલ અંગેની જાણકારી મેળવે અને ગાણિતીય અપેક્ષાનો અર્થ તથા તેના ગુણધર્મો અને તે અંગેના વિવિધ ઉદાહરણો વિશે પરિચય કેળવવાનો છે.

3.1 પ્રસ્તાવના :

આજના વિકસતા જતા યુગમાં આંકડાશાસ્ત્ર એ ખૂબ જ અગત્યનું પરિબળ છે. તેને વિશ્લેષણાત્મક વિજ્ઞાન તરીકે પણ ઓળખાવી શકાય. કારણ કે તેની મદદથી આપણે વિવિધ પ્રકારની માહિતી ભેગી કરી શકીએ છીએ અને ભેગી કરેલી માહિતીનું વિશ્લેષણ કરી સમષ્ટિના ગુણધર્મોનું અનુમાન લગાવી શકાય છે. બીજું માહિતી મુખ્યત્વે બે પ્રકારની હોય છે. (1) ગુણાત્મક માહિતી અને (2) સંખ્યાત્મક માહિતી. આ માહિતીઓને વર્ગીકૃત કરી કોષ્ટકની મદદથી યોગ્ય ક્રમમાં ગોઠવી તેનું વિશ્લેષણ કરી શકાય છે. જો આ માહિતીનું આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ કરવા આંકડાશાસ્ત્રના મુખ્ય ચાર માપો (સરેરાશ, પ્રસારમાન, વિષમતા, ઘંટાકારતા વગેરે)નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ ચારેય માપો આવૃત્તિ વિતરણના ઉપયોગથી સરળતાથી મેળવી શકાય છે. પરંતુ સંભાવના વિતરણનો ઉપયોગ કરવો પડે તેમ હોય ત્યારે આ ચાર માપો મેળવવામાં મુશ્કેલી ઊભી થાય છે. આ મુશ્કેલી દૂર કરવા ગાણિતીય અપેક્ષાનો ઉપયોગ કરવો વધુ હિતાવહ છે. ગાણિતીય અપેક્ષા અંગે અભ્યાસ કરતા પહેલા યદૃચ્છ ચલ અને તેના સંભાવના વિતરણ અંગેની જાણકારી મેળવીશું.

3.2 યદૃચ્છ ચલ [Random Variable] :

ધારો કે, ''કોઈપણ ચલની કિંમત યદૃચ્છ પ્રયોગના પરિણામ ઉપરથી મળતી હોય અને તેને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય તેમ હોય તો તે ચલને યદૃચ્છ ચલ તરીકે ઓળખી શકાય.'' યદૃચ્છ ચલને 'x' વડે દર્શાવવામાં

આવે છે. તેને અસતત યદચ્છ ચલ અને સતત યદચ્છ ચલ એ બે પ્રકારે રજૂ કરી શકાય છે. આ ચલ એ કોઈ એક યદચ્છ પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ સાથે સંકળાયેલું વિધેય છે અને તેની જુદી જુદી કિંમતોને જુદી જુદી સંભાવનાઓ સાથે સાંકળી શકાય છે.

અહીં યદચ્છ પ્રયોગ એટલે જે પ્રયોગમાં અનેક શક્ય પરિણામો પૈકી ગમે તે એક પરિણામ ઉદ્‌ભવી શકે તેવો પ્રયોગ. જ્યારે આ પ્રયોગના શક્ય બધા જ પરિણામના ગણને નિદર્શ અવકાશ તરીકે ઓળખી શકાય છે. દા.ત. અનભિનત સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો તે યદચ્છ પ્રયોગ છે અને તેનો નિદર્શ અવકાશ = {H, T}

3.3 અસતત ચલ :

જો કોઈપણ યદચ્છ ચલ પરિમિત કિંમતો (ગણતરી કરી શકાય તેવી અનંત કિંમતો) ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તે ચલને અસતત ચલ કહે છે.

ઉદાહરણ : સિક્કો ઉછાળીએ તો છાપની સંખ્યા, કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા, બાગમાં ફૂલોની સંખ્યા, વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, રોડ ઉપર અકસ્માતની સંખ્યા વગેરે.

3.4 સતત ચલ :

જો કોઈપણ યદચ્છ ચલ કોઈ ગાળાની બધી જ કિંમતો ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તે ચલને સતત ચલ કહેવાય.

ઉદાહરણ : વ્યક્તિની ઉંમર દર્શાવતો ચલ, વ્યક્તિની આવક દર્શાવતો ચલ, વ્યક્તિનું વજન દર્શાવતો ચલ, વિદ્યાર્થીના ગુણો દર્શાવતો ચલ વગેરે.

3.5 સંભાવના વિતરણ :

આપણે ઉપર જોયું કે યદચ્છ ચલ એ કોઈ એક યદચ્છ પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ સાથે સંકળાયેલું વિધેય છે અને તેની જુદી જુદી કિંમતોને જુદી જુદી સંભાવનાઓ સાથે સાંકળી શકાય છે. આમ યદચ્છ ચલની જુદી જુદી કિંમતો અને તેની જુદી જુદી સંભાવનાઓ દર્શાવતા ગાણિતીય કોષ્ટકને સંભાવના વિતરણ કહે છે. અહીં સંભાવનાનો કુલ સરવાળો એક (1) જેટલો થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે બે સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો તેનો નિદર્શ અવકાશ (S) = {TT, HT, TH, HH} મળે. હવે ધારો કે છાપની સંખ્યા = ચલ x તો xની જુદી જુદી કિંમતો 0, 1, 2 મળે અને તેની જુદી જુદી સંભાવનાઓ અનુક્રમે $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{4}$ મળે, તેને ગાણિતીય કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે તો તેને સંભાવના વિતરણ તરીકે ઓળખી શકાય. જે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

છાપ x_i	**સંભાવના** $P(x_i)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

સમજૂતી :

છાપ 0 છાપ એટલે કે બંને કાંટા પડે (TT)

x 1 છાપ એટલે કે એક છાપ અને એક કાંટો (HT) (TH)

2 છાપ એટલે કે શૂન્ય કાંટા પડે (HH)

સંભાવના 0 છાપ પડે તેની સંભાવના = m/n = $1/4$

1 છાપ પડે તેની સંભાવના = m/n = $2/4 = 1/2$

2 છાપ પડે તેની સંભાવના = m/n = $1/4$

3.6 સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની વ્યાખ્યા :

ધારો કે કોઈપણ યદચ્છ અસતત ચલ x_i ની જુદી જુદી કિંમતો x_1, x_2, x_3, x_4 .... x_n ને તેની જુદી જુદી સંભાવના અનુક્રમે $P(x_1)$, $P(x_2)$, $P(x_3)$, $P(x_4)$ .... $P(x_n)$ સાથે સાંકળવામાં આવે અને જો તે નીચેના લક્ષણો (જેવા કે (1) $P(x_i) \geq 0$ એટલે કે દરેક સંભાવના ઋણ ન હોય (અનૃણ) અને $\Sigma P(x_i) = 1$ એટલે કે સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય) ધરાવતો હોય, તો વિધેય $P(x_i)$ ને યદચ્છ ચલ x_i નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય અને $P(x_i)$ ની કિંમતોને યદચ્છ ચલ x_i નું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

3.7 અસતત ચલ (x_i) ની ગણિતીય અપેક્ષાની વ્યાખ્યા :

યદચ્છ ચલ x_i ની સરેરાશ કિંમત ને અસતત ચલ x_i ની ગણિતીય અપેક્ષા (અપેક્ષિત કિંમત) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેને $E(x_i)$ વડે દર્શાવી શકાય છે અને

$$E(x_i) = \Sigma x_i \, P(x_i)$$

જ્યાં, $x_i = x_1, x_2, x_3$ .... x_n (x ની જુદી જુદી કિંમતો)

$P(x_i) = P(x_1), P(x_2), P(x_3)$ .... $P(x_n)$ (સંભાવના)

$$\Sigma xiP(xi) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + x_3 P(x_3) + \ldots\ldots\ldots + x_n P(x_n)$$ થાય.

એટલે કે, ધારો કે કોઈપણ યદચ્છ અસતત ચલ x_i ની જુદી જુદી કિંમતો x_1, x_2, x_3........ x_n ને તેની સંભાવના અનુક્રમે $P(x_1)$, $P(x_2)$, $P(x_3)$ .... $P(x_n)$ સાથે સાંકળી એટલે કે x_i અને $P(x_i)$ નો ગુણાકાર કરી તેનો સરવાળો કરવામાં આવે તો મળતી કિંમતને x_i ની અપેક્ષિત કિંમત કહે છે. (x ની અપેક્ષિત કિંમત એટલે x નો મધ્યક અને તેને μ વડે દર્શાવીએ તો $E(x) = \mu$ થાય.)

3.8 અપેક્ષિત કિંમતોના ગુણધર્મો :

(1) કોઈપણ અચળ સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત તે જ અચળ સંખ્યા હોય છે. જેમ કે, $E(c) = c$

(2) $E(cx) = c\,E(x)$ થાય, જ્યાં c = અચળ સંખ્યા.

(3) $E(ax + b) = aE(x) + b$ થાય (જ્યાં ગણિતીય અપેક્ષા ઉગમબિંદુ અને સ્કેલ માપના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.)

(4) જો x અને y બે યદચ્છ ચલો હોય તો તે ચલોના સરવાળાની અપેક્ષા તેના ગણિતીય અપેક્ષાના સરવાળા જેટલો જ થાય છે. એટલે કે, $E(x + y) = E(x) + E(y)$

(5) જો x અને y બે સ્વતંત્ર ચલો હોય તો તે ચલોના ગુણાકારની અપેક્ષા તેના ગણિતીય અપેક્ષાના ગુણાકાર બરાબર થાય છે એટલે કે, $E(x\,y) = E(x)\,.\,E(y)$

(6) મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોની અપેક્ષા શૂન્ય જેટલી થાય છે એટલે કે, $E(x - \mu) = 0$

$\therefore\ E(x - \mu) = E(x) - E(\mu)$

$= \mu - \mu$

$= 0$

(7) જો $f(x)$, x નું વિધેય હોય તો $E[f(x)] = \Sigma f(x).p(x)$ થાય.

3.9 મધ્યક, વિચરણ અને સહવિચરણ :

મધ્યક :

ગણિતીય અપેક્ષામાં યદચ્છ ચલ x નો મધ્યક એટલે $E(x) = \bar{x} = \mu$

વિચરણ :

ગણિતીય અપેક્ષામાં વિચરણની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય.

"વિચરણ એટલે કોઈપણ યદચ્છ ચલ x ના મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના વર્ગોની સરેરાશ." તેને $v(x)$ વડે દર્શાવી શકાય.

$V(x) = E(x_i - \mu)^2$ અથવા $E(x_i - \bar{x})^2 = V(x)$

$\therefore\ V(x) = E(x_i^2) - [E(x)]^2$

જ્યાં, $E(x_i^2) = E\, x_i^2\ .\ P(x_i)$

સહવિચરણ :

સામાન્ય રીતે x નું વિચરણ x ની કિંમતમાં થતી વધઘટ કે ચલનનું માપન કરે છે જ્યારે y નું વિચરણ y ની કિંમતમાં થતી વધઘટ કે ચલનનું માપન કરે છે. જો આ બંને ચલો x અને y ની કિંમતોમાં એક સાથે થતી વધઘટનું માપન તેના સહવિચરણ દ્વારા કરી શકાય છે. આમ બે ચલો x અને y ના મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ હોય અને તેના મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનો અનુક્રમે $(x - \bar{x})$ અને $(y - \bar{y})$ હોય તો તે બંનેના ગુણાકારની ગણિતીય અપેક્ષાને x અને y નું સહવિચરણ કહે છે. તેને $Cov(x, y)$ વડે દર્શાવાય છે.

$\therefore\ Cov(x, y) = E(x - \bar{x})\ (y - \bar{y})$

જ્યાં, $\bar{x} = x$ નો મધ્યક

$\bar{y} = y$ નો મધ્યક

અથવા

$$Cov = \frac{\sum (x - \bar{x})\ (x - \bar{y})}{n}$$

અથવા

$Cov(x, y) = E(x - y) - E(x)\ .\ E(y)$

- **બે ચલના વિચરણ અને સહવિચરણના ગુણધર્મો :**

(1) કોઈપણ અચળ કિંમતનું વિચરણ શૂન્ય થાય છે. એટલે કે, $V(c) = 0$

(2) $V(x + a) = V(x) + 0 = V(x)$

(3) $V(ax + b) = a^2\, V(x) + 0 = a^2\, V(x)$

(4) $V(ax - b) = a^2\, V(x) + 0 = a^2\, V(x)$

(5) x અને y બંને સ્વતંત્ર ચલો હોય ત્યારે $V(ax \pm by) = a^2\, V(x) + b^2\, V(y)$

(6) $Cov(ax, by) = ab\ Cov(x, y)$

(7) $Cov(x + a, y + b) = Cov(x, y)$

(8) જો x અને y નિરપેક્ષ ચલો હોય તો $Cov(x, y) = 0$

(9) જ્યારે x અને y સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) ચલો હોય ત્યારે $V(x + y) = V(x) + V(y)$

(10) જ્યારે x અને y સ્વતંત્ર ચલો હોય ત્યારે $V(x - y) = V(x) - V(y)$

(11) જ્યારે x અને y આધારિત ચલો હોય ત્યારે $V(ax + by) = a^2V(x) + 2ab\ Cov(x, y) + b^2V(y)$

(12) જ્યારે x અને y આધારિત ચલો હોય ત્યારે $V(ax - by) = a^2V(x) - 2ab\ Cov(x, y) + b^2V(y)$

(13) જ્યારે x અને y આધારિત ચલો હોય ત્યારે $V(x + y) = V(x) + 2Cov(x\ y) + V(y)$

(14) જ્યારે x અને y આધારિત ચલો હોય ત્યારે $V(x - y) = V(x) - 2Cov(x\ y) + V(y)$

(15) $Cov(x\ y) = \Sigma(x\ y) - \Sigma(x)\ .\ \Sigma(y)$ (x અને y આધારિત ચલો હોય)

નોંધ : આ પ્રકરણના ઉદાહરણો ગણતા પહેલાં સંભાવના અને ક્રમચય સંચયનું પ્રકરણ શીખવું જરૂરી છે.

3.10 ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-1 :

એક વ્યક્તિ એક અનભિનત પાસો ઉછાળે છે તો મળતા અંકોની ગણિતીય અપેક્ષા શોધો.

જવાબ :

પાસો ઉછાળવામાં આવે તો તેના ઉપર મળતા અંકો અનુક્રમે 1, 2, 3, 4, 5, 6 અને તે દરેક અંક મળવાની સંભાવના $1/6$ થાય અને ગણિતીય અપેક્ષા $= E(x_i) = \Sigma\, x_i\ P(x_i)$ નીચેના કોષ્ટકની મદદથી શોધી શકાય.

પાસ ઉપર મળતા અંકો x_i	**મળતા અંકોની સંભાવના** $P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
1	$1/6$	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$
3	$1/6$	$3/6$
4	$1/6$	$4/6$
5	$1/6$	$5/6$
6	$1/6$	$6/6$

$$\therefore\ E(x) = \frac{21}{6} = 3.5$$

ઉદાહરણ-2 :

બે સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે તો મળતી છાપની સંખ્યાની ગણિતીય અપેક્ષા શોધો.

જવાબ :

આગળ મુદ્દા નં. 3.5 માં સમજાવ્યા મુજબ બે સિક્કા ઉછાળવામાં આવે તો મળતી છાપની સંખ્યા = 0, 1, 2 અને તેની સંભાવના $= 1/4,\ 1/2,\ 1/4$

મળતી છાપની સંખ્યા	સંભાવના	$x_i \times P(x_i)$
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ગણિતીય અપેક્ષા $E(x) = \Sigma x_i \,.\, P(x_i)$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

ઉદાહરણ-3 :

બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. પ્રત્યેક છાપ માટે રૂ. 9 મળે છે. જ્યારે પ્રત્યેક કાંટા માટે 12 ગુમાવવા પડે છે તો મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

કાંટો રૂ. (–12)	છાપ રૂ. (9)	મળતી રકમ (x_i)	$P(x_i)$ સંભાવના	$x_i \times P(x_i)$
2	0	–24	$\frac{1}{4}$	$\frac{-24}{4}$
1	1	–3	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{2}$
0	2	18	$\frac{1}{4}$	$\frac{18}{4}$
		કુલ		

મળતી રકમની સમજૂતી :

છાપ પડે તો રૂ. 9 મળે = + 9

કાંટો પડે તો રૂ. 12 ગુમાવે = –12

મળતી રકમ (x_i)

(2 કાંટા) × (–12 રૂ.) = –24 મળે

(1 કાંટો × –12) + (1 છાપ × 9) –12 + 9 = –3

(2 છાપ) × (9 રૂ.) = 18 મળે.

મળતી રકમ $x_i \times P(x_i)$ કરો.

∴ મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત = $E(x)$

$E(x) = \Sigma x_i \times P(x_i)$

$$= \frac{-24}{4} - \frac{3}{2} + \frac{18}{4}$$

$$= \frac{-24 - 6 + 18}{4}$$ લ.સા.અ.

$= \dfrac{-12}{4}$

$= -3$

ઉદાહરણ-4 :

એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે તો P ની કિંમત તથા તેની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$1/14$	P	$3/7$	P

જવાબ :

x_i	$P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
0	$1/14$	0
1	P	P
2	$3/7$	$6/7$
3	P	3P

સંભાવના વિતરણ માટે $\Sigma P(x_i) = 1$

એટલે કે સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય છે.

$$\therefore \ \frac{1}{14} + \frac{P}{1} + \frac{3}{7} + \frac{P}{1} = 1$$

$$2P = \frac{1}{1} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7}$$ લ.સા.અ. લેતાં

$$2P = \frac{14 - 1 - 6}{14}$$

$$28P = 7$$

$$P = \frac{7}{28}$$

$$P = \frac{1}{4}$$

અપેક્ષિત કિંમત $E(x) = \Sigma\, x_i \times P(x_i)$

$$= 0 + P + \frac{6}{7} + 3P$$

$$= \frac{4P}{1} + \frac{6}{7}$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{6}{7}$$ $P = 1/4$ મુકતા

$= \frac{1}{1} + \frac{6}{7} = \frac{7+6}{7} = \frac{13}{7} = 1.86$

ઉદાહરણ-5 :

એક યદચ્છ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. (i) k શોધો. (ii) x નું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0	k	$3k$	k^2	$2k^2$	$3k^2 + k$

જવાબ :

(1) સંભાવના વિતરણ માટે કુલ સંભાવના $\Sigma P(x_i) = 1$ થાય.

$\therefore\ 0 + k + 3k + k^2 + 2k^2 + 3k^2 + k = 1$

$5k + 6k^2 = 1$

$6k^2 + 5k - 1 = 0$

$\therefore\ 6k^2 + 6k - 1 = 0$ અવયવ શોધતાં

$6k^2 + 6k - k - 1 = 0$

$6k(k + 1) - 1(k + 1) = 0$

$(k + 1)(6k - 1) = 0$

$k + 1 = 0$ અથવા $6k - 1 = 0$

$\therefore\ k = -1$ (ઋણ છે તેથી અશક્ય) અથવા $6k = 1$ $\therefore\ k = 1/6$

(ii) x નું સંભાવના વિતરણ : ($k = 1/6$ મુકતાં)

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0	$1/6$	$3/6$	$(1/6)^2$	$2(1/6)^2$	$3(1/6) + \frac{1}{6}$

$\therefore$ x નું સંભાવના નીચે મુજબ લખી શકાય.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0	$1/6$	$1/2$	$1/36$	$1/18$	$2/3$

ઉદાહરણ-6 :

એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે તે ઉપરથી x નો મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

x_i	-1	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	$1/10$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$

x_i	$P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$	$x_i^2 \times P(x_i)$
–1	$\frac{1}{10}$	$\frac{-1}{10}$	$\frac{1}{10}$
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{8}{10}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{16}{10}$

મધ્યક $= E(x) = \Sigma x_i \times P(x_i)$

$= \frac{-1}{10} + 0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{4} + \frac{4}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{4} + \frac{4}{10}$

$= \frac{8 + 15 + 8}{20}$ લ.સા.અ. લેતાં

$= \frac{31}{20} = 1.55$

વિચરણ $= V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \Sigma x_i^2 \ . \ P(x)$

$= \frac{1}{10} + 0 + \frac{1}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{4} + \frac{16}{10}$

$= \frac{2 + 2 + 16 + 45 + 32}{20}$ લ.સા.અ. લેતાં

$= \frac{97}{20} = 4.85$

$\therefore V(x) = 4.85 - [1.55]^2$

$E(x^2) = 4.85 - 2.40 = 2.45$

ઉદાહરણ-7 :

એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે ઉપરથી (1) $E(x + 1)$ (2) $V(2x + 1)$ શોધો.

x_i	–3	–2	–1	0	1	2
સંભાવના $P(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

જવાબ :

x_i	$P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$	$x_i^2 \times P(x_i)$
–3	$1/8$	$-3/8$	$9/8$
–2	$1/4$	$-2/4$	$4/4$
–1	$1/4$	$-1/4$	$1/4$
0	$1/8$	0	0
1	$1/8$	$1/8$	$1/5$
2	$1/8$	$2/8$	$4/8$

(1) $E(x + 1) = E(x) + E(1)$

$E(x) = \Sigma x_i \, . \, P(x_i)$

$$= -\frac{3}{8} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{0}{0} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8}$$

$$= \frac{-3 - 4 - 2 + 0 + 1 + 2}{8}$$ લ.સા.અ. લેતાં

$$= -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

$\therefore E(x + 1) = -0.75 + 1$

$= 0.25$

(2) $V(2x + 1) = (2) \; V(x) + 0$

$= 4 \; V(x)$

$V(x) = \Sigma(x_i^2) - [\Sigma(x_i)]^2$

$E(x_i^2) = \Sigma x_i^2 \, . \, P(x_i)$

$$= \frac{9}{8} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{4}{8}$$

$$= \frac{45 + 40 + 10 + 8 + 20}{40}$$ લ.સા.અ. લેતાં

$$= \frac{123}{40} = 3.075$$

$\therefore V(x) = 3.075 - (-0.75)^2$

$= 3.075 - 0.5625$

$= 2.5125$

$\therefore\ V(2x+1) = 4V(x)$

$= 4(2.5125)$

$V(2x+1) = 10.05$

ઉદાહરણ-8 :

એક ડબ્બામાં 6 બલ્બ છે. તેમાંથી 3 બલ્બ ખામીવાળા છે અને તેમાંથી યદચ્છ રીતે 3 બલ્બ લેવામાં આવે છે તો ખામીવાળા બલ્બની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ :

કુલ 6 બલ્બમાંથી 3 ખામીવાળા બલ્બ છે અને 3 ખામી વગરના બલ્બ છે અને યદચ્છ રીતે 3 બલ્બ લેવામાં આવે છે. તેથી તેની સંભાવના શોધવા સંચયનું સૂત્ર $n_{c_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ અને સંભાવનાનું સૂત્ર $P(A) = \frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n}$ નો ઉપયોગ કરી નીચે દર્શાવ્યા મુજબ સંભાવના શોધીશું.

ખામી વગરના બલ્બ (3)	ખામીવાળા બલ્બ (3) x_i	સંભાવના $P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$
3	0	$\frac{1}{20}$	0
2	1	$9/20$	$9/20$
1	2	$9/20$	$18/20$
0	3	$1/20$	$3/20$

સંભાવનાની ગણતરી :

$$\frac{3_{c_3} \times 3_{c_0}}{6_{c_3}} = 1 \times 1/20 = 1/20$$

$$\frac{3_{c_2} \times 3_{c_1}}{6_{c_3}} = 3 \times 3/20 = \frac{9}{20}$$

$$\frac{3_{c_1} \times 3_{c_2}}{6_{c_3}} = 3 \times 3/20 = \frac{9}{20}$$

$$\frac{3_{c_0} \times 3_{c_3}}{6_{c_3}} = 1 \times 1/20 = \frac{1}{20}$$

જ્યાં, $6_{c_3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

અથવા

$6_{c_3} = \frac{6!}{3!\,3!}$

$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 20$

ખામીવાળા બલ્બની અપેક્ષિત કિંમત

$\Sigma(x) = \Sigma x_i \,.\, P(x_i)$

$= \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20}$

$= \frac{9 + 18 + 3}{20} = \frac{30}{20} = 1.5$

ઉદાહરણ-9 :

એક ડબ્બામાં 3 સફેદ અને 2 કાળા દડા છે. એક વ્યક્તિ તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડા લે છે. જો પ્રત્યેક દડા દીઠ તેને રૂ. 8 મળે છે જ્યારે પ્રત્યેક કાળા દડા દીઠ તેને રૂ. 4 ચૂકવવા પડે છે. તો તેને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ :

સફેદ દડા	કાળા દડા	કુલ	યદચ્છ રીતે લીધેલ
3 મળતી રકમ 8 (દરેક દડા દીઠ)	2 –4 (દરેક દડા દીઠ)	5	2

કાળા દડાની સંખ્યા	સફેદ દડાની સંખ્યા	મળતી રકમ x_i	સંભાવના $P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
2	0	–8	$1/10$	$-8/10$
1	1	4	$6/10$	$24/10$
0	2	16	$3/10$	$48/10$

મળતી રકમની ગણતરી :

કાળા દડા દીઠ મળતી રકમ (–4)		સફેદ દડા દીઠ મળતી રકમ (8)	
$(-4 \times 2 = -8)$	+	$(8 \times 0 = 0)$	$= -8 + 0 = -8$
$(-4 \times 1 = -4)$	+	$(8 \times 1 = 8)$	$= -4 + 8 = 0$
$(-4 \times 0 = 0)$	+	$(8 \times 2 = 16)$	$= 0 + 16 = 16$

સંભાવનાની ગણતરી :

$3_{c_0} \times 2_{c_2} / 5_{c_2} = \frac{1 \times 1}{10} = \frac{1}{10}$

$$^3c_1 \times {^2c_1} / {^5c_2} = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10}$$

$$^3c_2 \times {^2c_2} / {^5c_2} = \frac{3 \times 1}{10} = \frac{3}{10} \quad {^5c_2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત :

$E(x) = \Sigma x_i \cdot P(x_i)$

$$= \frac{-8}{10} + \frac{24}{10} + \frac{48}{10} = \frac{-8 + 24 + 48}{10} = \frac{64}{10} = 6.4$$

ઉદાહરણ-10 :

એક ડબ્બામાં 7 ટિકિટો છે. તેના ઉપર અનુક્રમે 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 નંબરો લખેલા છે તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે ટિકિટો લેવામાં આવે છે. તો ટિકિટો ઉપર મળતા નંબરોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ :

અહીં કુલ 7 ટિકિટો છે તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે ટિકિટોની પસંદગી $^7c_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

1 નંબર લખેલ કુલ ટિકિટ = 2

2 નંબર લખેલ કુલ ટિકિટ = 2

3 નંબર લખેલ કુલ ટિકિટ = 3

ટિકિટ ઉપર લખેલ નંબર 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 છે. તેથી ટિકિટ પર લખેલ રકમની બબ્બેની પેર બનશે.

ટિકિટ પર મળતી સંખ્યા	મળતી સંખ્યાનો સરવાળો x	સંભાવના $P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
(1, 1)	2	$1/21$	$2/21$
(1, 2)	3	$4/21$	$12/21$
(1, 3)	4	$6/21$	$24/21$
(2, 2)	4	$1/21$	$4/21$
(2, 3)	5	$6/21$	$30/21$
(3, 3)	6	$3/21$	$18/21$

સંભાવનાની ગણતરી :

$$(1, 1) - {^2c_2} / {^7c_2} = 1/21$$

$(1,\ 2) - {}^{2}c_{1} \times {}^{2}c_{1} / {}^{7}c_{2} = 4/21$

$(1,\ 3) - {}^{2}c_{1} \times {}^{3}c_{1} / {}^{7}c_{2} = 6/21$

$(2,\ 2) - {}^{2}c_{2} / {}^{7}c_{2} = 1/21$

$(2,\ 3) - {}^{2}c_{1} \times {}^{3}c_{1} / {}^{7}c_{2} = 6/21$

$(3,\ 3) - {}^{3}c_{2} / {}^{7}c_{2} = 3/21$

મળતા નંબરોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત $= E(x) = \Sigma x_i \,.\, P(x_i)$

$= \frac{2}{21} + \frac{12}{21} + \frac{24}{21} + \frac{4}{21} + \frac{30}{21} + \frac{18}{21}$

$= \frac{92}{21} = 4.38$

ઉદાહરણ-11 :

એક વ્યક્તિ બે રૂપિયાની એક એવી એક ટિકિટ ખરીદે છે. લોટરી વેચનારે કુલ 15,000 જેટલી ટિકિટનું વેચાણ કરેલ છે અને તે લોટરીમાં ઈનામની રકમ રૂ. 10,000 છે. તો તે વ્યક્તિને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ :

લોટરીની કિંમત = 2 રૂ.

ઈનામની રકમ = 10,000

$\therefore$ જો તેને ઈનામ લાગે તો મળતી રકમ $(10,000 - 2) = 9998$

જો તેને ઈનામ ન લાગે તો મળતી રકમ $= -2$

વ્યક્તિ કુલ 1 લોટરી ખરીદે છે.

કુલ લોટરી = 15,000

$\therefore$ ઈનામ લાગવાની સંભાવના $= \frac{1}{15,000}$

ઈનામ ન લાગવાની સંભાવના $= 1 - \frac{1}{15,000}$

$= \frac{14,999}{15,000}$

ઈનામ	મળતી રકમ (x_i)	સંભાવના $P(x_i)$	$x_i \times P(x_i)$
જીતે (લાગે)	9998	$\frac{1}{15,000}$	$\frac{9,998}{15,000}$
હારે (ન લાગે)	–2	$\frac{14,999}{15,000}$	$\frac{-29,998}{15,000}$

મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત $= E(x) = \Sigma x_i \times P(x_i)$

$$= \frac{9,998}{15,000} - \frac{29,998}{15,000}$$

$$= \frac{9,998 - 29,998}{15,000}$$

$$= \frac{20,000}{-15,000} = -4/3$$

$= -1.33$ રૂપિયા

ઉદાહરણ-12 :

એક અસતત યદચ્છ ચલનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે. તો તે ઉપરથી P ની કિંમત શોધો અને તેનો મધ્યક તથા વિચરણ શોધો.

$x = 0$ હોય ત્યારે $P(x) = 0.02$

અને $x = 1, 2, 3, 4$ હોય ત્યારે $P(x) = P(x + 1)$

જવાબ :

અહીં યદચ્છ ચલ 'x' ની જુદી જુદી કિંમતો 0, 1, 2, 3, 4 આપેલી છે તે મુજબ તેની જુદી જુદી સંભાવના આપેલા વિતરણની મદદથી નીચે મુજબ શોધી શકાશે.

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $P(x = 0) = 0.02$ આપેલું છે.

જ્યારે $x = 1, 2, 3, 4$ ત્યારે $P(x) = P(x + 1)$

$\therefore$ જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $P(x = 1) = P(1 + 1) = 2P$

જ્યારે $x = 2$ ત્યારે $P(x = 2) = P(2 + 1) = 3P$

જ્યારે $x = 3$ ત્યારે $P(x = 3) = P(3 + 1) = 4P$

જ્યારે $x = 4$ ત્યારે $P(x = 4) = P(4 + 1) = 5P$

x_i	$P(x_i)$
0	0.02
1	2P
2	3P
3	4P
4	5P
કુલ 14P + 0.02	

હવે સંભાવના વિતરણમાં સંભાવનાનો કુલ સરવાળો = 1 થાય છે.

$\therefore\ \Sigma P(x_i) = 1$

$\therefore\ 0.02 + 2P + 3P + 4P + 5P = 1$

$14P + 0.02 = 1$

$14P = 1 - 0.02$

$14P = 0.98$

$\therefore\ P = \dfrac{0.98}{14} = 0.07$

x_i	$P(x_i)$	$x_i\ P(x_i)$	$x_i^2\ P(x_i)$
0	0.02	0	0
1	0.14	0.14	0.14
2	0.21	0.42	0.84
3	0.28	0.56	1.68
4	0.35	1.40	5.60

મધ્યક $= \bar{x} = E(x) = \Sigma x_i\ P(x_i)$

$= 0.14 + 0.42 + 0.56 + 1.40$

$= 2.52$

$E(x_i^2) = \Sigma x_i^2\ .\ P(x_i)$

$= 0.14 + 0.84 + 1.68 + 5.60$

$= 8.26$

$\therefore$ વિચરણ $= E(x_i^2) - [E(x)]^2$

$= 8.26 - [2.52]^2$

$= 8.26 - 6.3504$

$= 1.9096$

ઉદાહરણ-13 :

એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
$P(x_i)$	0.10	0.20	0.30	0.05	0.30	0.05

તો નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) $\Sigma(x)$ (2) $\Sigma(x + 2)$

(3) $\Sigma(x^2)$ (4) $\Sigma(x + 1)^2$

(5) $V(x)$ (6) $V(3x + 2)$

જવાબ :

x_i	$P(x_i)$	$x_i\ P(x_i)$	$x_i^2\ P(x_i)$
–2	0.10	–0.20	0.40
–1	0.20	–0.20	0.20
0	0.30	0.00	0.00
1	0.05	0.05	0.05
2	0.30	0.60	1.20
3	0.05	0.15	0.45
કુલ	1.00	–0.40 +0.80 0.40	2.30

(1) $E(x) = \Sigma x_i\ P(x_i)$
$= 0.40$

(2) $E(x + 2) = E(x) + 2$
$= 0.40 + 2$
$= 2.40$

(3) $E(x^2) = Ex_i^2\ ,\ P(x_i)$
$= 2.30$

(4) $E(x + 1)2 = E\ (x2 + 2x + 1)$
$= E(x2) + 2E(x) + 1$
$= 2.30 + 2(0.40) + 1$
$= 2.30 + 0.80 + 1$
$= 4.10$

(5) $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$
$= 2.30 - [0.4]^2$
$= 2.30 - 0.16$
$= 2.14$

(6) $V(3x + 2) = 3^2V(x) + 0$
$= 9(2.14)$
$= 19.26$

ઉદાહરણ-14 :

x અને y બે સ્વતંત્ર યદચ્છ ચલો હોય તેમજ $E(x) = 2$, $E(y) = 2$, $E(x, y) = 4$, $V(x) = 6$ અને $V(y) = 0.6$ હોય તો નીચેની કિંમત શોધો.

(1) $E(x + y)$ (2) $V(x + y)$ (3) $V(3x + 2y)$

(4) $Cov\,(x, y)$

જવાબ :

(1) $E(x + y) = E(x) + E(y)$
$= 2 + 2$
$= 4$

(2) $V(x + y) = V(x) + V(y)$
$= 6 + 0.6$
$= 6.6$

(3) $V(3x + 2y) = 3^2V(x) + 2^2V(y)$
$= 9(6) + 4(0.6)$
$= 54 + 2.4$
$= 56.4$

x અને y સ્વતંત્ર ચલો છે તેથી $Cov(x, y) = 0$

આધારિત ચલોનો દાખલો

ઉદાહરણ-15 :

જો x અને y બે આધારિત ચલો હોય તથા $E(x) = 1.6$, $E(y) = 3.3$, $E(x, y) = 10$, $V(x) = 3.5$, $V(y) = 9$ હોય તો,

(1) $E(3x + 2y)$ (2) $Cov(x, y)$ (3) $V(x - y)$
(4) $V(x + y)$ (5) $V(2x + y)$

જવાબ :

(1) $E(3x + 2y) = 3E(x) + 2E(y)$
$= 3(1.6) + 2(3.3)$
$= 4.8 + 6.6$
$= 11.4$

(2) $Cov(xy) = E(xy) - E(x) \quad E(y)$
$= 10 - (1.6)\ (3.3)$
$= 10 - 5.28$
$= 4.72$

(3) $V(x - y) = V(x) - 2Cov(xy) + V(y)$
$= 3.5 - 2(4.72) + 9$
$= 3.06$

(5) $V(x + y) = V(x) + 2Cov(x, y) + V(y)$
$= 3.5 + 2(4.72) + 9$
$= 21.94$

(6) $V(2x - y) = 2^2V(x) + 2 \times 2 \times 1 \times Cov(xy) + 1^2V(y)$ જ્યાં, a = 2, b = 1
$\therefore V(ax + by) = a^2V(x) + 2ab\ Cov(xy) + b^2V(y)$
$= 4(1.6) + 4(4.72) + 9$
$= 6.4 + 18.88 + 9$
$= 34.28$

સ્વાધ્યાય

(1) યદચ્છ ચલ એટલે શું ?
(2) સતત ચલ અને અસતત ચલની વ્યાખ્યા લખો.
(3) સતત ચલ અને અસતત ચલ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(4) સંભાવના વિતરણ કોને કહેવાય ?

(5) સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની વ્યાખ્યા લખો.

(6) ગણિતીય અપેક્ષાની વ્યાખ્યા લખો.

(7) ગણિતીય અપેક્ષાનું સૂત્ર લખો.

(8) ગણિતીય અપેક્ષાના ગુણધર્મોની ચર્ચા કરો.

(9) ગણિતીય અપેક્ષાના મધ્યક અને વિચરણની વ્યાખ્યા અને સૂત્રો લખો.

(10) સહવિચરણ એટલે શું ?

(11) એક વ્યક્તિ બે અનભિનત પાસા એક સાથે ઉછાળે છે. તો મળતા અંકોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ : બે પાસા ઉછાળે તો નિદર્શ અવકાશ

(1, 1) (1, 2) (1, 3) .... (1, 6)

” ” ” ”

” ” ” ”

” ” ” ”

(6, 1) (6, 2) (6, 3) .... (6, 6)

$\therefore\ x_i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

$P(x_i) = \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$

$\therefore\ \Sigma(x) = 7$)

(13) ત્રણ સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો મળતી છાપની સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત અને વિચરણ શોધો.

(જવાબ :

x	0	1	2	3	$E(x) = 1.5$
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$V(x) = 0.75$

(14) ચાર સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો છાપની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

જવાબ :

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(x) = 2$

(15) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. તો P ની કિંમત શોધી તેની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{4}$	P	P

(જવાબ : $P = \frac{1}{10}$, $E(x) = 2.3$)

(16) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. (1) k શોધો. (2) x નું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
$P(x_i)$	k	$\frac{1}{10}$	$5k + k$	$\frac{4}{10}$	$2k$	$\frac{5}{100}$

(જવાબ : $k = \frac{5}{100}$, સંભાવના વિતરણ માટે k ની કિંમત લખી ફરીથી લખો.)

(17) એક યદચ્છ ચલ x નું સભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. તે ઉપરથી તેનો મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{100}$

(જવાબ : $E(x) = 0.55$, $V(x) = 1.2475$)

(18) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે તો તે ઉપરથી (i) $E(2x + 1)$ (ii) $V(3x + 3)$ શોધો.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	$1/20$	$1/5$	$1/10$	$1/20$	$1/20$	$1/20$

(જવાબ : (i) 4.5 (ii) 20.5875)

(19) એક ડબ્બામાં 8 બલ્બ છે. તેમાંથી 3 બલ્બ ખામીવાળા છે અને તેમાંથી યદચ્છ રીતે 3 બલ્બ લેવામાં આવે છે તો ખામીવાળા બલ્બની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ :

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$10/56$	$30/56$	$15/56$	$1/56$

$E(x) = 1.125$)

(20) એક ડબ્બામાં 5 લાલ અને 2 લીલા દડા છે. એક વ્યક્તિ તેમાંથી બે દડા લે છે. જો પ્રત્યેક લાલ દડા દીઠ તેને રૂ. 20 અને પ્રત્યેક લીલા દડા દીઠ તેને રૂ. 5 મળતા હોય તો તેને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ :

x_i	40	25	10
$P(x_i)$	$10/21$	$10/21$	$1/21$

$E(x) = 31$)

(21) જો બે સિક્કાઓ એક સાથે ઉછાળવામાં આવે અને સિક્કાની એક બાજુ છાપ અને બીજી બાજુ કાંટો પડે છે. જો છાપ બાજુ 2 અને કાંટા બાજુ 1 લખેલા હોય તો મળતી છાપની સંખ્યાના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ :

x_i	2	3	4
$P(x_i)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$E(x) = 3$)

(22) એક ડબ્બામાં 5 ટિકિટો છે. તેના ઉપર અનુક્રમે 2, 3, 3, 5, 5 નંબર લખેલા છે. તેમાંથી બે ટિકિટો લેવામાં આવે છે. તો ટિકિટ ઉપર મળતાં અંકોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત મેળવો.

(જવાબ :

x_i	5	6	7	8	10
$P(x_i)$	$2/10$	$1/10$	$2/10$	$4/10$	$1/10$

$E(x) = 7.2$)

(23) એક વસ્તુની જુદા જુદા દિવસો માટે માંગ નીચે પ્રમાણે છે તો તે ઉપરથી તેની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

માંગ	10	11	12	13	14	કુલ
દિવસો	10	20	20	40	10	100

(જવાબ : માંગ x_i અને $P(x_i) = \frac{10}{100} = 0.1, \frac{20}{100} = 0.2, \frac{20}{100} = 0.2, \frac{40}{100} = 0.4, \frac{10}{100} = 0.1$

અને $E(x) = 12.2$)

(24) એક લોટરીમાં 1 રૂ.ની એક એવી 100 ટિકિટો વેચાઈ છે અને એક ઈનામ રૂ. 60 નું છે. એક વ્યક્તિ એક ટિકિટ ખરીદે છે તો તેને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

(જવાબ : –0.4)

(25) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ $P(x)$ નીચે પ્રમાણે છે.

$P(x) = kx^2$ જ્યાં $x = 1, 2, 3$

અચળાંક k ની કિંમત શોધી $E(x)$ અને $V(x)$ શોધો.

(જવાબ : $k = \frac{1}{14}$, $E(x) = \frac{36}{14}$, $V(x) = \frac{98}{14}$)

(26) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે.

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	0.1	0.25	0.3	0.25	0.1

તો નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) $E(x)$, (2) $E(x + 3)$ (3) $E(x)^2$ (4) $E(x + 2)^2$ (5) $V(x)$ (6) $V(5x + 3)$

(જવાબ : (1) 2 (2) 5 (3) 5.3 (4) 10.3 (5) 1.3 (6) 32.5)

(27) જો x અને y નિરપેક્ષ યાદચ્છિક ચલો હોય અને $E(x) = 8$, $E(y) = 3$, $E(xy) = 24$, $V(x) = 3$ અને $V(y) = 2$ હોય તો,

(1) $E(3x + y)$ (2) $V(2x - 3y)$ (3) $V(x + y)$ (4) $V(3x - 10)$ ની કિંમત શોધો.

(જવાબ : (1) 27 (2) 30 (3) 5 (4) 27)

(28) બે યદચ્છ ચલ x અને y સ્વતંત્ર હોય અને $E(x) = 3$, $E(y) = 5$, $V(x) = 6$, $V(y) = 4$ હોય તો,

(1) $E(x)^2$ (2) $E(y - 1)^2$ (3) $V(3 - x)$ (4) $V(2y - 3)$

(જવાબ : (1) 15 (2) 20 (3) 6 (4) 16)

3.12 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ's) :

(i) યાદચ્છિક ચલ x ની અપેક્ષિત કિંમત = ...

(a) $E(x)$ (b) Ex (c) σx (d) એકપણ નહીં

(ii) યાદચ્છિક ચલ x નું વિચરણ = ...

(a) $E(x_i^2)$ (b) $[E(x)]^2$ (c) $E(x_i^2) - [E(x_i)]^2$ (d) એકપણ નહીં

(iii) યાદચ્છિક ચલ x ની ગણિતીય અપેક્ષા $E(x)$ = ...

(a) મધ્યક (b) વિચરણ (c) સહવિચરણ (d) એકપણ નહીં

(iv) યાદચ્છિક ચલ x ની ગણિતીય અપેક્ષાને .... વડે દર્શાવાય છે.

(a) μ (b) σ (c) δ (d) એકપણ નહીં

(v) એક યાદચ્છિક ચલ x ની કિંમત $x = 1$ હોય ત્યારે તેની સંભાવના 0.7 અને તેની કિંમત $x = 2$ હોય ત્યારે તેની સંભાવના 0.3 છે. તો તે ચલની અપેક્ષિત કિંમત = ...

(a) 2.1 (b) 1.3 (c) 1.7 (d) એકપણ નહીં

(vi) કોઈ એક યદચ્છ x ની ગણિતીય અપેક્ષા $E(x) = 9$ અને વિચરણ $V(x) = 17$ હોય તો $E(x^2) =$ ....

(a) 26 (b) 81 (c) 98 (d) એકપણ નહીં

(vii) જો ગણિતીય ચલની અપેક્ષા $E(x) = 4$ હોય તો $E(3x + 2) =$ ....

(a) 14 (b) 12 (c) 8 (d) એકપણ નહીં

(viii) જો ગણિતીય ચલની અપેક્ષા $E(x) = 4.5$ અને $E(y) = 4$ હોય તો $E(x + y) =$ ....

(a) 8.5 (b) 18 (c) 0.5 (d) એકપણ નહીં

(ix) એક માહિતી માટે $E(x) = 10$ અને $E(x^2) = 115$ તો $V(x) =$ ....

(a) 215 (b) 15 (c) 105 (d) એકપણ નહીં

(x) એક યાદચ્છિક ચલ x એ –2, –1, 0 કિંમત ધારણ કરે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3, 0.6 અને 0.1 હોય તો, $E(x_i^2) =$ ....

(a) –1.2 (b) 1.8 (c) 7.2 (d) એકપણ નહીં

(xi) એક માહિતી માટે $V(x) = 4$ હોય તો $V(2x - 3) =$ ....

(a) 8 (b) 16 (c) 13 (d) એકપણ નહીં

(xii) એક માહિતી માટે $V(x) = 4$ હોય તો $V(3 - 3x) =$ ....

(a) –33 (b) 12 (c) 36 (d) એકપણ નહીં

(xiii) એક માહિતીનું પ્રમાણિત વિચલન = 4 છે. તો તેનું $(4 + 2x)$ નું વિચરણ મેળવો.

(a) 16 (b) 64 (c) 20 (d) એકપણ નહીં

(xiv) એક માહિતી માટે $5x = 4$ તો $V(4 - 2x) =$ ....

(a) 16 (b) 64 (c) 20 (d) એકપણ નહીં

(xv) x અને y બે સ્વતંત્ર ચલો છે. તેમાં $V(x) = 3$ અને $V(y) = 5$ હોય તો $V(2x + 3y) =$ ....

(a) 45 (b) 14 (c) 57 (d) એકપણ નહીં

જવાબ :

(i) a (ii) c (iii) a (iv) a (v) b (vi) c (vii) a
(viii) a (ix) b (x) c (xi) b (xii) c (xiii) b (xiv) b
(xv) c

3.13 ચાવીરૂપ શબ્દો :

યદચ્છ ચલ : યદચ્છ પ્રયોગોની કિંમતોની સંખ્યાત્મક રજૂઆત.

અસતત ચલ : ગણતરી કરી શકાય તેવી કિંમતો.

સતત ચલ : વર્ગોમાં દર્શાવવામાં આવતી કિંમતો. દા.ત. 0-10, 10-20, ...

સંભાવના વિતરણ : યદચ્છ ચલની જુદી જુદી કિંમતો અને તેની જુદી જુદી સંભાવનાઓ દર્શાવતું કોષ્ટક.

ગાણિતીય અપેક્ષા : યદચ્છ ચલની સરેરાશ કિંત્મત.

: સંદર્ભ ગ્રંથ :

(1) Sancheti & Kapoor 'Business Statistics', S. Chand & Sons, New Delhi, 2009.

(2) Goon, Gupta, Das Gupta, An Outline of Statistical Theory Vol-I and Vol-II, World Press, Calcutta, 2011.