એકમ 5

પોયસન વિતરણ
(Poisson Distribution)

5.0 ઉદ્દેશ :

આ પ્રકરણમાં આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલ x ના સંભાવના વિતરણ તરીકે પોયસન વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું. તેમાં પોયસન વિતરણનો અર્થ, ગુણધર્મ, ઉપયોગિતા અને તેના વ્યવહારૂ ઉપયોગોથી માહિતગાર થઈશું.

5.1 પ્રસ્તાવના :

પોયસન વિતરણ એ અસતત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે. પોયસન વિતરણની શોધ ઈ.સ. 1837માં ફ્રેંચ ગણિતશાસ્ત્રી સાયમન ડી. પોયસને કરી હતી. વ્યવહારમાં ભાગ્યે જ બનતી ઘટનાની સંભાવના પોયસન વિતરણ પરથી શોધી શકાય. આજના આધુનિક યુગમાં વ્યવહારમાં અનેક ક્ષેત્રોમાં પોયસન વિતરણનો ઉપયોગ થાય છે. જેમ કે કોઈ કોલ સેન્ટર પર કલાક દીઠ આવતા ફોનની સંખ્યા, કોઈ રેસ્ટોરન્ટમાં દિવસ દરમિયાન આવતા ગ્રાહકોની સંખ્યા, કોઈ વેબસાઈટનો દર કલાકે ઉપયોગ કરતા ગ્રાહકોની સંખ્યા, બેંક દરમહિને નાદાર ગ્રાહકોની અપેક્ષિત સંખ્યાનું અનુમાન કરવા પોયસન વિતરણનો ઉપયોગ કરે છે.

5.2 પોયસન વિતરણ :

5.2.1 અર્થ :

જ્યારે (i) યાદચ્છિક પ્રયોગમાં બે પ્રકારના પરિણામો સફળતા અને નિષ્ફળતા જોવા મળતા હોય

(ii) પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન થતું હોય પરંતુ n એ મોટી સંખ્યા હોય

(iii) દરેક પુનરાવર્તન એકબીજાથી નિરપેક્ષ હોય

(iv) દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p અચળ હોય પરંતુ p બહુ નાની સંખ્યા હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પોયસન વિતરણને અનુલક્ષે છે.

5.2.2 સંભાવના વિધેય :

પોયસન ચલ x નું સંભાવના વિધેય નીચે મુજબ છે.

$$P(x) = \frac{e^{-m}.m^{x}}{x!} \qquad \text{જ્યાં} \quad m = np = \text{મધ્યક}$$

x = સફળતાની સંખ્યા $[x = 0, 1, 2, ..., n]$

મિત્રો e એક અચળાંક છે. જેની કિંમત 2.7183 છે. e^{-m} ની કિંમતો કોષ્ટકમાં આપેલી હોય છે.

5.2.3 પોયસન વિતરણના ગુણધર્મો :

(1) પોયસન વિતરણ અસત ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે.

(2) m એ આ વિતરણનો પ્રાચલ છે.

(3) પોયસન વિતરણમાં મધ્યક = m

(4) પોયસન વિતરણમાં પ્રમાણિત વિચલન = $\sqrt{m}$ અને વિચરણ = m હોય છે.

(5) પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણ સમાન હોય છે.

(6) પોયસન વિતરણમાં હમૈશા ઘન વિષમતા હોય છે. આ વિતરણમાં જેમ m ની કિંમત વધુ તેમ વિષમતા ઓછી હોય છે.

(7) બે નિરપેક્ષ પોયસન ચલનો સરવાળો પણ પોયસન ચલ જ હોય છે.

(8) જ્યારે n ખૂબ મોટી સંખ્યા હોય અને p એ બહુ નાની સંખ્યા હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણ પોયસન વિતરણને અનુલક્ષે છે.

5.2.4 પોયસન વિતરણના ઉપયોગો :

જ્યારે કોઈ ઘટના કેટલી વખત બને છે તે ગણ્ય હોય પરંતુ તે ઘટના કેટલી વખત બનતી નથી તે અગણ્ય હોય ત્યારે સંભાવના શોધવા પોયસન વિતરણ ઉપયોગી છે. વ્યવહારમાં ભાગ્યેજ બનતી ઘટનાની સંભાવના પોયસન વિતરણ દ્વારા શોધી શકાય છે. પોયસન વિતરણના વ્યવહારૂ ઉપયોગો નીચે મુજબ છે.

(1) અમુક શહેરમાં નોંધાયેલા આપઘાતોની સંખ્યા

(2) રસ્તા ઉપર અમુક સમયમાં થતા અકસ્માતની સંખ્યા

(3) પુસ્તકમાં પાનાદીઠ થતી છાપકામની ભૂલની સંખ્યા

(4) ફૂટબોલને કે હોકીની મેચમાં નોંધાયેલા ગોલની સંખ્યા

(5) ટેલીફોન લાઈનમાં બગડેલા જોડાણોની સંખ્યા

(6) ઔદ્યોગિક એકમમાં નુકસાનીવાળી વસ્તુઓનું પ્રમાણ શોધવા

(7) મોબાઈલમાં કોઈ વ્યક્તિ પર આવતા મેસેજની સંખ્યા

(8) સાંખ્યિકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં C આલેખની નિયંત્રણ શોધવા પોયસન વિતરણ ઉપયોગી છે.

(9) સ્વીકૃતિ નિદર્શનના અભ્યાસમાં જથ્થાની સ્વીકૃતિની સંભાવના પોયસન વિતરણની મદદથી શોધી શકાય છે.

5.2.5 ઉદાહરણ :

(1) મોબાઈલ બનાવતી એક કંપનીના ઉત્પાદનમાં કોઈપણ મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના $1/50$ છે. તો 200 મોબાઈલના એક બોક્સમાં (i) બધા જ મોબાઈલ સારા હોય (ii) બે મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના શોધો. [$e^{-4} = 0.0183$]

$n = 200$, મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના $p = 1/50$

હવે, આપણે m શોધીએ.

$$m = np = 200 \times \frac{1}{50}$$

$$m = 4$$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^{x}}{x!}$$

આ સંભાવના વિધેયમાં $m = 4$ મૂકતાં

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-4}\ (4)^x}{x!}}$$

(i) બધા જ મોબાઈલ સારા હોય એટલે કે 0 મોબાઈલ ખામીયુક્ત હોવાની સંભાવના એટલે કે $x = 0$ મૂકતાં

$$P(o) = \frac{e^{-4}\ (4)^x}{o!}$$

કોઈપણ અચળાંકનો O ઘાત હોય તો તેનું મૂલ્ય 1 થાય.

અને $0! = 1$ થાય.

$$P(0) = \frac{0.0183\ \times\ 1}{1}$$

$P(0) = 0.0183$

(2) 2 મોબાઈલ ખામીવાળા હોવાની સંભાવના એટલે કે $x = 2$ મૂકતાં

$$P(2) = \frac{e^{-4}\ (4)^2}{2!}$$

$$= \frac{0.0183 \times 16}{2}$$

$P(2) = 0.1464$

(2) ઈલેક્ટ્રીક ફયુઝના ઉત્પાદનમાં 2% ફયુઝ નુકસાનીવાળા હોય તો 150 ફયુઝની એકપેટીમાં (i) 2 ફયુઝ (ii) વધુમાં વધુ 2 ફયુઝ નુકસાનીવાળા હોય તેવી પેટીઓની ટકાવારી શોધો. [$e^{-3} = 0.04979$]

$n = 150$ કોઈ ફયુઝ ખામીવાળો હોવાની સંભાવના $P = 2\% = {}^{2}\!/_{100}$

$\therefore \quad m = np$

$$= 150 \times \frac{2}{100}$$

$$\boxed{m = 3}$$

હવે, $P(x) = \dfrac{e^{-m}\ m^x}{x!}$

હવે, આ સંભાવના વિધેયમાં $m = 3$ મૂકતાં,

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-3}\ (3)^x}{x!}}$$

આ સંભાવના વિધેયમાં x ની કિંમત મૂકી સંભાવના શોધાય.

(1) 2 ફયુઝ ખામીવાળા હોવાની સંભાવના એટલે કે $x = 2$ મૂકતાં

$$P(2) = \frac{e^{-3}\ (3)^2}{2!}$$

$$= \frac{0.04979 \times 9}{2}$$

P(2) = 0.2241

2 ફ્યુઝ ખામીવાળા હોય તેવી પેટીઓની ટકવારી = 0.2241 × 100

= 22.41%

(2) વધુમાં વધુ 2 એટલે કે 0, અથવા 1 અથવા 2 ફ્યુઝ ખામીવાળા હોય તેની સંભાવના

$$P(0) = \frac{e^{-3}\,(3)^0}{0!} = \frac{0.04979 \times 1}{1} = 0.04979$$

$$P(1) = \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} = \frac{0.04979 \times 3}{1} = 0.14937$$

P(2) = 0.2241 શોધેલ છે.

હવે $P(x \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$= 0.04979 + 0.14937 + 0.2241$

$= 0.42326$

વધુમાં વધુ 2 ફ્યુઝ ખામીવાળા હોય તેવી પેટીઓની ટકાવારી = 0.42326 × 100

= 42.33%

નોંધ : આ ગણતરી નીચે મુજબ પણ શકાય.

$$P(x) = \frac{e^{-3}\,(3)^x}{x!}$$

હવે $P(x \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$= e^{-3}\left[\frac{(3)^0}{0!} + \frac{(3)^1}{1!} + \frac{(3)^2}{2!}\right]$$

$= e^{-3}\,[1 + 3 + 4.5]$

$= 0.04979\,[8.5]$

$\therefore P(x \leq 2) = 0.42322$

પેટીઓની ટકાવારી = 0.42322 × 100

= 42.32%

(3) એક હોસ્પિટલમાં સામાન્ય રીતે 5% દર્દીઓ સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરે છે. કોઈ ચોક્કસ દિવસે 3 સ્પેશિયલ રૂમ ખાલી છે. જો તે દિવસે 50 દર્દીઓ હોસ્પિટલમાં દાખલ થયા હોય તો

(1) એકેય દર્દી સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરશે નહીં.

(2) સ્પેશિયલ રૂમની માંગને પહોંચી વળાશે નહીં તેની સંભાવના શોધો.

[$e^{-2} = 0.13534$, $e^{-0.5} = 0.6065$]

$n = 50$ કોઈ દર્દી સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરે તેની સંભાવના $P = 5\% = 5/100$

$m = np$

$$= 50 \times \frac{5}{100}$$

$m = 2.5$

$e^{-2.5}$ શોધવા

$e^{-2.5}, = e^{-2} \times e^{-0.5}$ $\quad \because \ a^m \times a^n = a^{m+n}$

$= 0.13534 \times 0.6065$

$e^{-2.5} = 0.0821$

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^n}{x!}$$

$$\boxed{\therefore \ P(x) = \frac{e^{-2.5}\ (2.5)^x}{x!}}$$

હવે આ વિધેયમાં x ની કિંમતો મૂકી સંભાવના શોધાય.

(1) એકેય દર્દી સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરશે નહી. એટલે કે $x = 0$

$$P(0) = \frac{e^{-2.5}\ (2.5)^0}{0!}$$

$$= \frac{0.0821 \times 1}{1}$$

$\therefore \ P(0) = 0.0821$

(2) કોઈ ચોક્કસ દિવસે 3 સ્પેશિયલ રૂમ ખાલી છે. જો 3 થી વધુ દર્દીઓ સ્પેશિયલ રૂમની માંગણી કરે તો તે માંગને પહોંચી વળાય નહીં. એટલે કે $x > 3$

$\therefore \ P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$$= e^{-2.5}\left[\frac{(2.5)^0}{0!} + \frac{(2.5)^1}{1!} + \frac{(2.5)^2}{2!} + \frac{(2.5)^3}{3!}\right]$$

$$= e^{-2.5}\left[\frac{1}{1} + \frac{2.5}{1} + \frac{6.25}{2} + \frac{15.625}{6}\right]$$

$= e^{-2.5}\ [1 + 2.5 + 3.125 + 2.6042]$

$= 0.0821\ [9.2292]$

$= 0.7577$

સ્પેશિયલ રૂમની માંગને પહોંચી ન વળાય તેની સંભાવના

$P(x > 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$

$= 1 - 0.7577 = 0.2423$

(4) એક પુસ્તકમાં 5 પાનાદીઠ સરેરાશ 4 ભૂલો માલૂમ પડે છે. 200 પાનાના તે પુસ્તકમાં 2 થી વધુ ભૂલો હોય તેવા પાનાની સંખ્યાનું અનુમાન કરો. [$e^{-0.8} = 0.4493$]

પોયસન વિતરણમાં સરેરાશ (મધ્યક) = m થાય.

પાનાદીઠ સરેરાશ (મધ્યક) ભૂલોની સંખ્યા $m = \frac{4}{5} = 0.8$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!} = \boxed{\frac{e^{-0.8}\ (0.8)^x}{x!}}$$

$$P(0) + P(1) + P(2) = e^{-0.8}\left[\frac{(0.8)^0}{0!} + \frac{(0.8)^1}{1!} + \frac{(0.8)^2}{2!}\right]$$

$$= e^{-0.8}\left[\frac{1}{1} + \frac{0.8}{1} + \frac{0.64}{2}\right]$$

$$= e^{-0.8}\ [1 + 0.8 + 0.32]$$

$$= 0.44\ [2.12]$$

$$= 0.9328$$

હવે, 2 થી વધુ ભૂલ હોવાની સંભાવના

$$P(x > 2) = P(3) + P(4) + ...$$

$$= 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$$

$$= 1 - 0.9328$$

$$= 0.0672$$

2 થી વધુ ભૂલ હોય તેવા પાનાની સંખ્યા $= N \times P(x)$

$$= 200 \times 0.0672$$

$$= 13.44 \cong 13$$

નોંધ : મિત્રો ટકાવારી શોધવા સંભાવનાનો 100 વડે અને સંખ્યા શોધવા સંભાવનાનો N વડે ગુણાકાર કરાય.

(5) એક પોયસન ચલ x માટે $P(x = 0) = 0.05$ હોય તો સાબિત કરો કે $P(x > 2) = 0.575$

$[e^{-3} = 0.05,\ e^{-0.05} = 0.9512]$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$$

હવે, $P(x = 0) = 0.05$ આપેલ છે.

તેથી સંભાવના વિધેયમાં $x = 0$ મૂકતાં,

$$\therefore\ \frac{e^{-m}\ m^0}{0!} = 0.05$$

$$\therefore\ \frac{e^{-m}\ (1)}{1} = 0.05$$

$$e^{-m} = 0.05$$

પરંતુ માહિતીમાં $e^{-3} = 0.05$ આપેલ છે.

$\therefore\ m = 3$

હવે, સંભાવના વિધેયમાં $m = 3$ મૂકતાં

$$P(x) = \frac{e^{-3}\ (3)^x}{x!}$$

$$\therefore\ P(0) + P(1) + P(2) = e^{-3}\left[\frac{(3)^0}{0!} + \frac{(3)^1}{1!} + \frac{(3)^2}{2!}\right]$$

$$= e^{-3}\ [1 + 3 + 4.5]$$

$$= 0.05\ [8.5]$$

$$P(0) + P(1) + P(2) = 0.425$$

હવે, $P(x > 2) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$

$$= 1 - 0.425$$

$$P(x > 2) = 0.575$$

(6) એક પોયસન ચલ x માટે $P(x = 3) = P(x = 4)$ હોય તો $P(2)$ ની કિંમત શોધો. [$e^{-4} = 0.0183$]

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$$

હવે $P(x = 3) = P(x = 4)$ આપેલ છે. તેથી સંભાવના વિધેયમાં ડાબી બાજુ $x = 3$ અને જમણી બાજુ $x = 4$ મૂકતાં,

$$\therefore \quad \frac{e^{-m}\ m^3}{3!} = \frac{e^{-m}\ m^4}{4!}$$

$$\therefore \quad \frac{m^3}{6} = \frac{m^4}{24}$$

$$\therefore \quad \frac{24}{6} = \frac{m^4}{m^3}$$

$$\therefore \quad m = 4$$

હવે, સંભાવના વિધેયમાં $m = 4$ મૂકતાં,

$$P(x) = \frac{e^{-4}\ (4)^x}{x!}$$

હવે, $P(2) = \dfrac{e^{-4}\ (4)^2}{2!}$

$$= \frac{0.0183 \times 16}{2}$$

$$P(2) = 0.1464$$

(7) એક પોયસન ચલ x માટે $P(x = 0) = P(x = 1) = K$ હોય તો સાબિત કરો કે $K = 1/e$

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$$

હવે, $P(x = 0) = P(x = 1)$ આપેલ છે.

$$\frac{e^{-m}\ m^0}{0!} = \frac{e^{-m}\ m^1}{1!}$$

$$\frac{m^0}{0!} = \frac{m^1}{1}$$

$$m = 1$$

સંભાવના વિધેયમાં $m = 1$ મૂકતાં,

$$P(x) = \frac{e^{-1}\ (1)^x}{x!}$$

હવે, $P(x = 0) = K$ આપેલ છે.

$$\frac{e^{-1}\ (1)^0}{0!} = K$$

$$K = e^{-1}$$

$$\therefore \quad K = \frac{1}{e}$$

મિત્રો, $P(x = 1) = K$ સરખામણી કરીને પણ K ની કિંમત શોધી શકાય.

(8) એક શહેરમાં 100 દિવસ સુધી દિવસ વાર અકસ્માતોની સંખ્યાની માહિતી નીચે મુજબ છે.

અકસ્માતની સંખ્યા	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
દિવસની સંખ્યા	**42**	**36**	**14**	**6**	**2**

આ પરથી પોયસન વિતરણનું અન્વાયોજન કરી અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ શોધો. [$e^{-0.9} = 0.4066$]

સૌપ્રથમ આપણે અસતત આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યક શોધીએ.

x	f	fx
0	42	0
1	36	36
2	14	28
3	6	18
4	2	8
	N = 100	90

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{90}{100}$$

$$\bar{x} = 0.9$$

પરંતુ પોયસન વિતરણમાં મધ્યક m છે.

$\therefore\ m = 0.9$ લેતાં,

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$$

આ સંભાવના વિધેયમાં $m = 0.9$ મૂકતાં,

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-0.9}\ (0.9)^x}{x!}}$$

$$P(x) = \frac{0.4066 \times (0.9)^x}{x!}$$

આ સંભાવના વિધેય પરથી x ની જુદી કિંમતોને અનુરૂપ સંભાવના અને અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ નીચે મુજબ શોધી શકાય.

x	$P(x) = \frac{0.4066 \times (0.9)^x}{x!}$	અપેક્ષિત આવૃત્તિ $N \times P(x)$
0	$\frac{0.4066 \times (0.9)^0}{0!} = 0.4066$	$100 \times 0.4066 = 41$
1	$\frac{0.4066 \times (0.9)^1}{1!} = 0.3659$	$100 \times 0.3659 = 37$
2	$\frac{0.4066 \times (0.9)^2}{2!} = 0.1647$	$100 \times 0.1647 = 16$
3	$\frac{0.4066 \times (0.9)^3}{3!} = 0.0494$	$100 \times 0.0494 = 5$
4	$\frac{0.4066 \times (0.9)^4}{4!} = 0.0111$	$100 \times 0.0111 = 1$

અહીં અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ નજીકના પૂર્ણાંકમાં લખેલ છે.

(9) એક પોયસન વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન 0.8 છે. તો $P(x \geq 1)$ શોધો.
[$e^{-0.8} = 0.4493$, $e^{-0.64} = 0.5273$]

પ્રમાણિત વિચલન = 0.8 છે.

$\therefore$ વિચરણ $(m) = (0.8)^2 = 0.64$

સંભાવના વિધેય $P(x) = \frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$

આ વિધેયમાં $m = 0.64$ મૂકતાં,

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-0.64}\ (0.64)^x}{x!}}$$

$$P(0) = \frac{e^{-0.64}\ (0.64)^0}{0!}$$

$$= \frac{0.5273 \times 1}{1}$$

$P(0) = 0.5273$

$$\begin{aligned} P(x \geq 1) &= 1 - P(0) \\ &= 1 - 0.5273 \\ &= 0.4727 \end{aligned}$$

(10) "એક પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન 8 છે." આ વિધાનની સત્યાર્થતા તપાસો.

મધ્યક = 8 પ્ર.વિ. = 8

$\therefore$ વિચરણ $= (8)^2 = 64$

પરંતુ પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણ સમાન હોય છે. તેથી વિધાન ખોટું છે.

5.2.6 સ્વાધ્યાય :

A. યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી જવાબ લખો.

(1) પોયસન વિતરણ કઈ ચલરાશીનું સંભાવના વિતરણ છે ?

(a) અસતત ચલ (b) સતત ચલ (c) સાપેક્ષ ચલ

(2) પોયસન વિતરણની શોધ કોણે કરી હતી ?

(a) કાર્લ પિયર્સન (b) જેકોબ બર્નોલી (c) સાયમન ડી પોયસન

(3) પોયસન વિતરણનો પ્રાચલ કયો છે ?

(a) n (b) P (c) m

(4) પોયસન વિતરણમાં કેવી વિષમતા હોય છે ?

(a) ધન (b) ઋણ (c) શૂન્ય

(5) એક પોયસન વિતરણનો મધ્યક 4 છે. તો તેમાં પ્રમાણિત વિચલન કેટલું હોય ?

(a) 4 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$

(6) પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન વચ્ચે કેવો સંબંધ હોય છે ?

(a) મધ્યક > પ્ર.વિ. (b) મધ્યક < પ્ર.વિ. (c) મધ્યક = પ્ર.વિ.

(7) વ્યવહારમાં કેવી ઘટનાની સંભાવના શોધવા પોયસન વિતરણ ઉપયોગી છે ?

(a) વારંવાર બનતી (b) ભાગ્યે જ બનતી (c) ચોક્કસ

B. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) કઈ શરતો હેઠળ અસતત ચલની સંભાવના શોધવા પોયસન વિતરણ ઉપયોગી છે ?

(2) પોયસન વિતરણનું સંભાવના વિધેય લખો.

(3) પોયસન વિતરણનું ગુણધર્મો જણાવો.

(4) પોયસન વિતરણના પ્રાચલ જણાવી, આ વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણ જણાવો.

(5) પોયસન વિતરણના વ્યવહારૂ ઉપયોગો જણાવો.

(6) એક પોયસન ચલનું સંભાવના વિધેય $P(x) = \dfrac{e^{-3}\,(3)^x}{x!}$ છે. તો તેનું પ્રમાણિત વિચલન જણાવો.

(7) એક પોયસન વિતરણનો મધ્યક 4 છે. તો ચલનાંક શોધો. [ચલનાંક = (પ્ર.વિ. ÷ મધ્યક) × 100]

C. ગણતરી કરો.

(1) દિવાસળીના જથ્થામાં કોઈ દિવાસળી માથા વિનાની હોવાની સંભાવના $\frac{1}{50}$ છે. દિવાસળીની એક પેટીમાં 100 દિવાસળી હોય છે. તો કોઈ એક પેટીમાં માથા વિનાની દિવાસળી (1) 0, (2) 1, (3) 2 હોય તેની સંભાવના શોધો. [$e^{-2} = 0.1353$]

(2) રેઝર બ્લેડ બનાવતી એક કંપનીમાં 3% બ્લેડ ખામીવાળી જણાય છે. એક પેકેટમાં 50 બ્લેડ મૂકવામાં આવે છે. તો 2000 પેકેટના જથ્થામાં (i) બધી જ બ્લેક સારી હોય (ii) વધુમાં વધુ 2 બ્લેડ ખામીવાળી હોય (iii) ઓછામાં ઓછી 3 બ્લેડ ખામીવાળી હોય તેવા પેકેટોની સંખ્યા શોધો. [$e^{-1} = 0.3678$, $e^{-0.5} = 0.6065$]

(3) એક માણસ પાસે 2 ટેક્સીઓ છે. દરરોજ સરેરાશ 1.5 ટેક્સીની માંગ જોવા મળે છે. તો મહિનાના 30 દિવસમાં કેટલા દિવસ;

(i) એકેય ટેક્સી ભાડે જશે નહીં ?

(ii) તે માંગને પહોંચી વળશે નહીં ? [$e^{-1.5} = 0.2231$]

(4) એક કંપનીમાં સવારે 10:00 થી 11:00 દરમિયાન 120 ફોન આવે છે. તો અમુક ચોક્કસ એક મિનિટના ગાળામાં (i) એકેય ફોન ન આવે (ii) વધુમાં વધુ 2 ફોન આવે તેની સંભાવના શોધો. [$e^{-2} = 0.1353$]

(**Hint :** મિત્રો 1 કલાકમાં એટલે કે 60 મિનિટમાં 120 ફોન આવે છે. તેથી મિનિટ દીઠ સરેરાશ ફોનની સંખ્યા (મધ્યક) $m = 2$ લેવાય.)

(5) નીચે આપેલી માહિતી પરથી પોયસન વિતરણનું અન્વાયોજન કરી સૈદ્ધાંતિક આવૃત્તિઓ શોધો.

x	0	1	2	3	4
f	122	60	15	2	1

$[e^{-0.5} = 0.6065]$

(6) એક પોયસન ચલ માટે $P(x = 1) = P(x = 2)$ હોય તો સાબિત કરો કે $P(x = 4) = \frac{2}{3} \times e^{-4}$

(7) એક પોયસન ચલ x માટે $P(x = K) = P(x = K + 1)$ હોય તો તેનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(8) એક પોયસન ચલનું પ્રમાણિત વિચલન 2 છે. તો P(0) અને P(2) ની કિંમત શોધો. $[e^{-4} = 0.0183]$

(9) મોબાઈલ બનાવતી એક કંપનીમાં દર 200 મોબાઈલ એ 1 મોબાઈલ ખામીવાળો જણાય છે. તો 600 મોબાઈલના એક નિદર્શમાં વધુમાં વધુ 2 મોબાઈલ ખામીવાળા હોવાની સંભાવના શોધો. $[e^{-3} = 0.04979]$

(10) નીચેના વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે કારણ સહિત જણાવો.

1. પોયસન વિતરણમાં મધ્યક અને પ્ર.વિ. 8 છે.
2. પોયસન વિતરણમાં ધન કે ઋણ વિષમતા હોઈ શકે.
3. એક પોયસન વિતરણમાં મધ્યક 4 છે તો તેનો ચલનાંક 400 થાય.
4. પોયસન વિતરણમાં P(0) ની કિંમત શૂન્ય હોય છે.
5. એક પોયસન ચલ માટે $3\,P(x = 2) = P(x = 4)$ હોય તો $m = 6$ થાય.

જવાબ :

A. (1) a (2) c (3) c (4) a (5) b (6) a (7) b

B. (6) પ્ર.વિ. = $\sqrt{3}$ (7) 50

C. (1) 0.1353, 0.2706, 0.2706 (2) 446, 1617, 383

(3) 7, 6 (4) 0.1353, 0.6765

(5) 122, 61, 15, 2, 0 (7) મધ્યક = K + 1, પ્ર.વિ. = $\sqrt{K+1}$

(8) 0.0183, 0.1464 (9) 0.4232

(10) (i) ખોટું – પ્ર.વિ. = $\sqrt{8}$ (ii) ખોટું – ધન વિષમતા (iii) ખોટું – ચલનાંક = 50

(iv) ખોટું – $P(0) = e^{-m}$ (v) ખરૂં

5.3 ચાવીરૂપ શબ્દો અને સંકેતો :

M : પોયસન વિતરણનો પ્રાચલ

$m = np$ = મધ્યક = સરેરાશ

e : એક અચળાંક $[e = 2.7183]$

ધન વિષમતા : આવૃત્તિ વિતરણમાં અસતત ચલ x ની નાની કિંમતોની આવૃત્તિઓ વધુ હોય.

- **સંદર્ભ ગ્રંથ :**

(1) ગાણિતિક આંકડાશાસ્ત્ર : એચ.ડી. શાહ, યુનિ. ગ્રંથનિર્માણ બોર્ડ

(2) Mathematical Statistics : Gupta and Kapoor, Sultanchand Prakashan

* * *