એકમ-3 દ્વિઘાતી સમીકરણ

: રૂપરેખા :

3.0 ઉદ્દેશો :

આ એકમ ખૂબ જ ઉપયોગી એકમ છે. આ શીખવાથી તમને જુદા-જુદા બિંદુઓ માટે અપેક્ષિત જવાબો મળશે.

- દ્વિઘાતી સમીકરણ એ બીજગણિતનો ખૂબ જ અગત્યનો ભાગ છે.
- આ સમજવાથી ભવિષ્ય કથન પણ કરી શકાય છે.
- દ્વિઘાતી સમીકરણના જુદા-જુદા બીજ પ્રાપ્ત થતા - જુદી જુદી સંખ્યાઓ સમજવામાં પણ મદદ મળે છે. જેવી કે, પ્રાકૃતિક સંખ્યા, સંમેય સંખ્યા, અસંમેય સંખ્યા વગેરે વિશે વિશેષ ખ્યાલ પ્રાપ્ત થશે.

3.1 પ્રસ્તાવના :

આ એકમનો મૂળભૂત હેતુ જુદી જુદી સંખ્યાઓ સમજવાનો છે. તેમજ જુદા-જુદા બીજ પ્રાપ્ત થાય તેના પરથી કેવા પ્રકારની રેખા હશે તેનું અનુમાન કરવા માટે ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

3.2 દ્વિઘાતી સમીકરણની સમજૂતી :

$3x + 5 = 8$; $7x = 14$; $2x + 5 = 0$ વગેરે એક ચલરાશિ x નો એકઘાતી સમીકરણો છે. અને તેમાંથી x ની કિંમત આપણે મેળવી શકીએ છીએ. આ પ્રકારનાં સમીકરણમાં x ની ઘાત 1 હોય છે, $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 + 5x - 8 = 0$ વગેરે ચલરાશિ x નાં સમીકરણો છે. જેમાં x ની મોટામાં મોટી ઘાત 2 છે. આ પ્રકારનાં સમીકરણોને કે જેમાં ચલ x ની મોટમાં મોટી ઘાત 2 હોય તેને દ્વિઘાતી સમીકરણો કહે છે, અને તેમને ઉકેલવાની અવયવની પદ્ધતિથી આપણે પરિચિત છીએ.

દા.ત. $x^2 + 3x + 2 = 0$ નો ઉકેલ ગણ મેળવીએ.

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$\therefore \; x^2 + 2x + x + 2 = 0$

$\therefore \; x(x + 2) + 1\,(x + 2) = 0$

$\therefore \; (x + 2)\,(x + 1) = 0$

$\therefore \; x + 2 = 0$ અથવા $x + 1 = 0$

$\therefore \; x = -2$ અથવા $x = -1$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ = {-2, -1}

તેવી જ રીતે $x^2 = 9$ નો ઉકેલ મેળવીએ.

$\therefore \quad x^2 - 9 = 0$

$\therefore \quad (x - 3)(x + 3) = 0$

$\therefore \quad x - 3 = 0$ અથવા $x + 3 = 0$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ = {3, -3}

અવયવો પાડવાથી દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે. પરંતુ $x^2 - 5x + 7 = 0$ માં $x^2 - 5x + 7$ ના અવયવો સહેલાઈથી પાડી શકતા નથી. તેથી $x^2 - 5x + 7 = 0$ ને ઉકેલ ગણ મેળવવાની રીતે સમજીએ. આ પ્રકારના દ્વિઘાતી સમીકરણનું સામાન્ય સ્વરૂપ $ax^2 + bx + c = 0$ છે, જેમાં a, b, c અચલ સંખ્યાઓ છે. b કે c શૂન્ય સહિતની કોઈપણ સંખ્યાઓ હોઈ શકે પરંતુ a શૂન્ય હોઈ શકે નહી. અહીં x^2 નો સહગુણક a છે, x નો સહગુણક b છે. અને c અચળ પદ છે અને તેઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય છે.

3.3 દ્વિઘાતી સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નો ઉકેલ :

દ્વિઘાતી સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માં $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\therefore \quad ax^2 + bx = -c$$

બંને બાજુ $4a$ વડે ગુણતાં,

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

બંને બાજુ b^2 ઉમેરતાં,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$\therefore \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\therefore \quad 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\therefore \quad 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

આમ, ઉકેલ ગણ $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ સમજાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

Ex.1 નીચેનું સમીકરણ છોડો.

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

ઉકેલ. આ સમીકરણને દ્વિઘાતી સમીકરણના વ્યાપક સ્વરૂપ $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 4,\ b = -8,\ c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 4 \times 3}}{2(4)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8}$$

$$= \frac{8 \pm 4}{8}$$

$$= \frac{8+4}{8} \text{ અથવા } \frac{8-4}{8}$$

$$\therefore \quad x = \frac{12}{8} \text{ અથવા } x = \frac{4}{8}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3}{2} \text{ અથવા } x = \frac{1}{2}$$

તેથી ઉકેલ ગણ $\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ છે.

Ex.2 $x^2 + 3x + 3 = 0$ નાં બીજ મેળવો.

ઉકેલ. અહીં $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$ છે.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{(3)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2(c)}$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{9 - 12}}{2(c)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2} \text{ અથવા } x = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2}$$

ઉકેલ ગણ $= \left\{\frac{-3 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2}\right\}$ છે.

ઉપરનાં સમીકરણોના ઉકેલ ગણ જોતાં માલૂમ પડે છે કે કેટલીક વખત ઉકેલ સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે, અને બંને બીજ અસમાન હોય છે કેટલીક વખતે બંને બીજ સંમેય અને સમાન હોય છે. ક્યારેક અસંમેય હોય છે, તો ક્યારેક કાલ્પનિક હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ જેવી સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે. જ્યારે $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-7}$ જેવી સંખ્યાઓ કાલ્પનિક સંખ્યાઓ છે દ્વિઘાતી સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં આ સંખ્યાઓનો ઉપયોગ થતો હોવાથી તેમનું માળખું એક વખત ફરી સમજી લઈએ.

સંખ્યાઓ

- વાસ્તવિક
  - સંમેય
    - ધનપૂર્ણાંક: 1,2,3.....
    - ૠણપૂર્ણાંક: –5,–11,–13...
    - શૂન્ય: 0
    - ધન અપૂર્ણાંક: $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{19}$ વગેરે...
    - ૠણ અપૂર્ણાંક: $\frac{-3}{8}$, $\frac{-11}{17}$...
  - અસંમેય $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ વગેરે..
- કાલ્પનીક $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ વગેરે..

અગાઉ આપેલાં દ્વિઘાતી સમીકરણોના ઉકેલ જોવાં માલૂમ પડે છે કે બીજ કાલ્પનિક, વાસ્તવિક, સંમેય, અસંમેય વગેરે... હોવાનો આધાર $b^2 - 4ac$ ઉપર છે. આમ $b^2 - 4ac$ દ્વિઘાતી સમીકરણના ઉકેલમાં એક અગત્યનું પદ છે. અને તેથી તેને વિવેચક કહેવામાં આવે છે. અને Δ ની જુદી-જુદી કિંમતો માટે બીજના પ્રકારોની ચર્ચા કરીએ.

3.4 વિવેચક Δ ને આધારે બીજના પ્રકાર :

(i) જો Δ ની કિંમત શૂન્ય હોય તો બંને બીજ સંમેય અને સમાન થાય.

(ii) જો Δ પૂર્ણ વર્ગ હોય, તો બંને બીજ સંમેય અને અસમાન થાય.

(iii) જો Δ ની કિંમત ધન હોય અને પૂર્ણ વર્ગ ન હોય, તો બંને બીજ અસંમેય અને અસમાન થાય.

(iv) જો Δ ની કિંમત ત્રણ હોય, તો બંને બીજ કાલ્પિનિક અને અસમાન થાય છે. (બીજ સંકર સંખ્યાઓ હોય છે. એટલે કે બીજ વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક સંખ્યાઓથી બનેલા હોય છે.)

સામાન્ય રીતે દ્વિઘાતી સમીકરણના બીજને α અને β વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$\therefore\ ax^2 + bx + c = 0$ ના બીજ

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ અને } \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ex.3 નીચેનાં સમીકરણોનાં બીજ મેળવો અને બીજના પ્રકાર જણાવો.

(i) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (ii) $x^2 + 7x - 8 = 0$

(iii) $2x^2 + 5x + 1 = 0$ (iv) $8x^2 + 7x + 2 = 0$

ઉકેલ. (i) $4x^2 - 12x + a = 0$

$a = 4\ b = -12,\ c = 9$ છે.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4\times4\times9}}{2(4)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$= \frac{12 + 0}{8} \text{ અથવા } = \frac{12 - 0}{8}$$

તેથી, $\alpha = \frac{3}{2}$ અને $\beta = \frac{3}{2}$

બીજ સંમેય અને સમાન છે.

(ii) $x^2 + 7x - 8 = 0$

અહીં $a = 1$, $b = 7$, $c = -8$ છે.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - bac}}{2a}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(c)(-8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 9}{2}$$

$$= \frac{-7 + 9}{2} \text{ અથવા } \frac{-7 - 9}{2}$$

$$= \frac{2}{2} \text{ અથવા } \frac{-16}{2}$$

$\therefore$ $\alpha = 1$ અને $\beta = -8$

બીજ સંમેય અને અસમાન છે.

(iii) $2x^2 + 5x + 1 = 0$

અહીં $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$ છે.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

(i) $16x^2 - 12 = 0$

$a = 16$, $b = 0$, $c = -12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (0)^2 - 4(16)(-12)$

$= 0 + 768$

$\Delta = 768$

અહીં Δ ઘન છે અને તે પૂર્ણ વર્ગ નથી, તેથી બંને બીજ અસંમેય અને અસમાન થાય.

(ii) $2x^2 - 10x + 5 = 0$

$a = 2,\ b = -10,\ c = 5$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-10)^2 - 4(2)(5)\\ &= 100 - 40\\ \Delta &= 60\end{aligned}$$

અહીં Δ ઘન છે અને પૂર્ણ વર્ગ નથી તેથી બંને બીજ અસંમેય અને અસમાન છે.

(iii) $3x^2 + 4x + 8 = 0$

અહીં $a = 3,\ b = 4,\ c = 8$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (4)^2 - 4(3)(8)\\ &= 16 - 96\\ &= -80\end{aligned}$$

અહીં Δ ઋણ છે તેથી બંને બીજ કાલ્પનિક અને અસમાન થાય.

(iv) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$a = 2,\ b = 5,\ c = -3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (5)^2 - 4(2)(-3)\\ &= 25 + 24\\ &= 49\\ &= (7)^2\end{aligned}$$

અહીં Δ પૂર્ણ વર્ગ છે તેથી બંને બીજ સંમેય અને અસમાન થશે.

(v) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$a = 9,\ b = -6,\ c = 1$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-6)^2 - 4(9)(1)\\ &= 36 - 36\\ &= 0\end{aligned}$$

અહીં બંને બીજ સંમેય તથા સમાન થશે.

Ex.5 K ની કઈ કિંમત માટે $4x^2 - 12x + K = 0$ નાં બીજ સમાન થશે ?

ઉકેલ. $4x^2 - 12x + k = 0$ માં

$a = 4,\ b = -12,\ c = k$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-12)^2 - 4(4)(k)\\ &= 144 - 16k\end{aligned}$$

બીજ સમાન છે તેથી $\Delta = 0$

$\therefore\ 144 - 16k = 0$

$16k = 144$

$k = 9$

Ex.6 $(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$ નાં બીજ સમાન હોય તો સાબિત કરો કે $2a = b + c$.

ઉકેલ. $(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$ માં બીજ સમાન છે. તેની $\Delta = 0$

$\therefore \quad B^2 - 4AC = 0$

$\therefore \quad (b - c)^2 - 4(a - b)(c - a) = 0$

$\therefore \quad b^2 - 2bc + c^2 - 4ac + 4a^2 + 4bc - 4ab = 0$

$\therefore \quad 4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ac = 0$

$\therefore \quad (2a - b - c)^2 = 0$

$\therefore \quad 2a - b - c = 0$

$\therefore \quad 2a = b + c$

3.5 બીજનો સરવાળો અને ગુણાકાર :

આપણે ઉપર ચર્ચા કરી તે પ્રમાણે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bc + c = 0$ નો બીજ α, β નીચે પ્રમાણે મળે છે.

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

બંને બીજનો સરવાળો $= \alpha + \beta$

$$= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

$$= \frac{-b}{a}$$

$$\therefore \quad \alpha + \beta = -\frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

બીજનો ગુણાકાર $= \alpha\beta$

$$= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\,\beta = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2\text{નો સહગુણક}}$$

Ex.7 $2x^2 + 4x + 1 = 0$ નાં બીજનો સરવાળો અને ગુણાકાર મેળવો.

ઉકેલ. $2x^2 + 4x + 1 = 0$ માં

$a = 2,\ b = 4,\ c = 1$

બીજનો સરવાળો $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$= \frac{-4}{2}$

બીજનો ગુણાકાર $= \frac{c}{a}$

$= \frac{1}{2}$

Ex.8 જો α, β સમીકરણ $x^2 - 2kx + 8 = 0$ નાં બીજ હોય અને જો $\alpha = 2\beta$ હોય, તો k શોધો.

ઉકેલ. $x^2 - 2kx + 8 = 0$ નાં બીજા α, β છે.

$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-(-2k)}{1}$

$=2k$

$\alpha + \beta = 2k$ માં $\alpha = 2\beta$ મૂકતાં,

$2\beta + \beta = 2k$

$\therefore \quad 3\beta = 2k$

$\therefore \quad \beta = \frac{2k}{3}$

ઉપરાંત, $\alpha\beta = \frac{8}{1}$

$\therefore \quad (2\beta)\ \beta = 8$

$\therefore \quad (2\beta)^2 = 8$

$\therefore \quad 2\left(\frac{2k}{3}\right)^2 = 8$

$\therefore \quad \frac{8k^2}{9} = 8$

$\therefore \quad k^2 = 9$

$\therefore \quad k = \pm 3$

Ex.9 જો $x^2 - 2x - k = 0$ નું એક બીજ $1 + \sqrt{6}$ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ. $1 + \sqrt{6}$ એક બીજ છે. દ્વિઘાતી સમીકરણમાં એક બીજ અસંમેય હોય, તો બીજું બીજ તેનું અનુબદ્ધ હોય છે.

$\therefore \quad 1 - \sqrt{6}$ એ તેનું બીજુ બીજ હોવું જોઈએ.

હવે બીજનો ગુણાકાર $= \frac{c}{a}$

$\therefore \quad (1 + \sqrt{6})\ (1 - \sqrt{6}) = \frac{-k}{1}$

$1 - 6 = -k$

$-5 = -k$

$k = 5$

3.6 આપેલા બીજ ઉપરની સમીકરણની રચના :

જો કોઇ એક દ્વિઘાતી સમીકરણનો બીજ α અને β આપેલાં હોય, તો તે ઉપરની સમીકરણ મેળવીએ.

α સમીકરણનું એક બીજ છે.

$\therefore \quad x = \alpha$

$\therefore \quad (x - \alpha) = 0$

તેવી જ રીતે β સમીકરણનું બીજ છે.

$\therefore \quad x = \beta$

$\therefore \quad (x - \beta) = 0$

$\therefore \quad (x - \alpha)\ (x - \beta) = 0$

$\therefore \quad (x^2 - 2x - \beta x + \alpha\beta) = 0$

$\therefore \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\therefore$ x^2 - (બીજનો સરવાળો) x + બીજનો ગુણાકાર = 0

આમ જો સમીકરણનો બે બીજ આપેલાં હોય, તો તે ઉપરથી સમીકરણ મેળવી શકાય છે.

Ex.10 નીચેનાં બીજ વાળાં સમીકરણો રચો :

(i) 5; 2 (ii) $3 + \sqrt{5}$; $3 - \sqrt{5}$

(iii) $2 + \sqrt{-2}$; $2 - \sqrt{-2}$ (iv) $\frac{1}{2}$; 5

ઉકેલ: α, β બીજ હોય તેવું સમીકરણ

$x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) = 0$ થાય.

(i) અહીં બીજ 5, 2 છે.

$\therefore$ સમીકરણ

$x^2 - (5 + 2)x + (5 \times 2) = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$ છે.

(ii) અહીં બીજનો સરવાળો $= 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}$

અને બીજનો ગુણાકાર $= (3 + \sqrt{5})\ (3 - \sqrt{5})$

$= 9 - 5$

$= 4$

$\therefore$ સમીકરણ

x^2 - (બીજનો સરવાળો) x + બીજનો ગુણાકાર = 0

$\therefore \quad x^2 - 6x + 4 = 0$ છે.

(iii) અહીં બીજ $2 + \sqrt{-2}$ અને $2 - \sqrt{-2}$ છે.

$\therefore$ બીજનો સરવાળો $= 2 + \sqrt{-2} + 2 - \sqrt{-2}$

બીજનો ગુણાકાર $= (2 + \sqrt{-2})\ (2 - \sqrt{-2})$

$= 4 - (-2)$

$= 4 + 2$

$= 6$

$\therefore$ સમીકરણ

$\therefore$ x^2 - (બીજનો સરવાળો) x + (બીજનો ગુણાકાર) = 0

$\therefore \quad x^2 - 4x + 6 = 0$ છે.

(iv) અહીં બીજ $\frac{1}{2}$ અને 5 છે.

$\therefore$ બીજનો સરવાળો = $\frac{1}{2}+5$

$= \frac{11}{2}$

બીજનો ગુણાકાર $= \frac{1}{2}\times 5 \quad = \frac{5}{2}$

$\therefore$ સમીકરણ

x^2 - (બીજનો સરવાળો) x + બીજનો ગુણાકાર = 0

$\therefore \quad x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{5}{2} = 0$

$\therefore \quad 2x^2 - 11x + 5 = 0$ એ માંગેલું સમીકરણ છે.

Ex.11 જો $x^2 + x + 2 = 0$ નો બીજ α, β હોય, તો નીચેનાં બીજવાળાં સમીકરણો રચો.

(i) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha + 2, \beta + 2$

ઉકેલ. $x^2 + x + 2 = 0$ ના બીજ α, β છે.

$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$= \frac{-1}{1}$

$= -1$

અને $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$= \frac{2}{1}$

$= 2$

હવે, આપેલાં બીજવાળું સમીકરણ

x^2 - (બીજનો સરવાળો) x + બીજનો ગુણાકાર = 0

(i) બીજનો સરવાળો $= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{(-1)^2 - 2(2)}{2}$

$= \frac{1-4}{2}$

$$= \frac{-3}{2}$$

બીજનો ગુણાકાર $= \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha}$

$= 1$

$\therefore$ માંગેલું સમીકરણ

x^2 - (બીજનો સરવાળો) x + બીજનો ગુણાકાર = 0

$\therefore \quad x^2 - \left(-\frac{3}{2}\right) x + 1 = 0$

$\therefore \quad 2x^2 + 3x + 2 = 0$

(ii) બીજ $\alpha + 2$, $\beta + 2$ છે.

$\therefore$ બીજનો સરવાળો $= \alpha$

$= (\alpha + \beta) + 4$

$= -1 + 4$

$= 3$

બીજનો ગુણાકાર $= (\alpha + 2)(\beta + 2)$

$= \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4$

$= \alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 4$

$= 2 + 2(-1) + 4$

$= 4$

$\therefore$ સમીકરણ

$x^2 - 3x + 4 = 0$ થશે.

Ex.12 જો α, β એ $x^2 - px + q = 0$ નાં બીજ હોય, તો $\alpha\beta + \alpha + \beta$ અને $\alpha\beta - \alpha - \beta$ બીજવાળું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ. $x^2 - px + q = 0$ નાં બીજ α, β છે.

$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-p}{1} = p$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{q}{l} = q$

હવે $\alpha\beta + \alpha + \beta$ અને $\alpha\beta - \alpha - \beta$ બીજવાળું સમીકરણ

x^2 - (બીજનો સરવાળો) x + (બીજનો ગુણાકાર) = 0 થાય.

$\therefore x^2 - (\alpha\beta + \alpha + \beta + \alpha\beta - \alpha - \beta)x + (\alpha\beta + \alpha + \beta)(\alpha\beta - \alpha - \beta) = 0$

$\therefore \quad x^2 + 2\,\alpha\beta\, x + \{(\alpha\beta)^2 - (\alpha + \beta)^2\} = 0$

$\therefore \quad x^2 + 2qx + (q^2 - p^2) = 0$

3.7 સ્વાધ્યાય / અભ્યાસ / તમારી પ્રગતિ ચકાસો

- **નીચેનાં સમીકરણો છોડો.**

(1) $x^2 - 5x - 14 = 0$ (7, -2)

(2) $x^2 - 6x - 8 = 0$ (2, 4)

(3) $(x - 1)(x - 2) = 110$ (12, -9)

(4) $x(x - p) = a(a + p)$ $(a + p, -a)$

(5) $2x^2 = 3x + 4$ $\left(\dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4}\right)$

(6) $x^2 + 4x + 5 = 5$ (0, -4)

(7) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3}$ $(3, \dfrac{1}{3})$

(8) $(2x - 5)(2x - 7) = 99$ (8, -2)

(9) $10x^2 - 21x + 10 = 0$ $\left(\dfrac{21 \pm \sqrt{41}}{20}\right)$

(10) $x^2 - 2ax + 2ab - b^2 = 0$ $(b,\ 2a - b)$

(11) $16x^2 - 40x + 25 = 0$ $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$

(12) $\dfrac{2}{3x+1} + \dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{1}{x+3}$ $\dfrac{-41 \pm \sqrt{1569}}{14}$

(13) $x = \sqrt{6+x}$ (3, -2)

(14) $7x^2 + 9x + 12$ $\left(\dfrac{9 \pm \sqrt{417}}{14}\right)$

- **વિવેચક Δ ને આધારે નીચેનાં સમીકરણોનાં બીજના પ્રકારની ચર્ચા કરો.**

(1) $9x^2 - 30x + 25 = 0$ (સંમેય અને સમાન)

(2) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (સંમેય અને અસમાન)

(3) $x^2 - \dfrac{2}{3}x - 1 = 0$ (અસંમેય અને અસમાન)

(4) $x^2 + 4x - 21 = 0$ (સંમેય અને અસમાન)

(5) $x^2 + x + \dfrac{1}{4} = 0$ (સંમેય અને સમાન)

(6) k ની એવી કિંમત શોધો કે જેથી $4x^2 + 12x + k - 1 = 0$ નો બીજ (k = 10) સમાન થાય.

(7) જો $x^2 + a^2 = 2(a + 1)x$ નાં બીજ સમાન હોય તો a ની કિંમત શોધો.

(8) નીચેનાં આપેલાં બીજ માટે દ્વિઘાત સમીકરણ રચો :

(i) $3 \pm \sqrt{2}$ (ii) 5, -7 (iii) $\dfrac{7}{8}, 1$ (iv) $2 \pm 5\sqrt{3}$

Ans : (i) $x^2 - 6x + 7 = 0$ $x^2 - 4x - 71 = 0$

(ii) $x^2 + 2x - 35 = 0$

(iii) $8x^2 - 15x + 7 = 0$

(9) જો $2x^2 - 3x + 7 = 0$ નો બીજ α, β હોય, તો નીચેનાની કિંમત મેળવો.

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$ (iii) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

Ans. : (i) -19 (ii) -99 (iii) -19

❖