

# એકમ 11

## સહસંબંધક (Correlation)

- 11.0 ઉદ્દેશ
- 11.1 પ્રસ્તાવના
- 11.2 સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યવસ્થા
- 11.3 સહસંબંધના પ્રકારો
- 11.4 સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો
  - (A) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત
  - (B) કાર્લ પિર્યસનની રીત
  - (C) સ્પિયરમેનના ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત
- 11.5 દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધવાની રીત
- 11.6 કાર્લ પિર્યસનની રીતના ગુણાદોષ
- 11.7 સ્પિયરમેનની રીતના ગુણાદોષ
- 11.8 સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન
- 11.9 સંભવિત દોષ
- 11.10 નિર્ણાયકતાનો આંક
- 11.11 વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય
- 11.12 કાર્લપિર્યસનની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય
- 11.13 સ્પિયરમેનની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય
- 11.14 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ'S)
- 11.15 ચાવીરૂપ શબ્દો
- સંદર્ભ ગ્રંથ

### 11.0 ઉદ્દેશ

- બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નજીક છે. તેની જાણકારી વિદ્યાર્થીઓને મળે.
- બે ચલો વચ્ચે કેવા પ્રકારના સંબંધો છે. (દા.ત. પ્રત્યક્ષ, પરોક્ષ કે અભાવ) તે અંગેની ગણતરી વિદ્યાર્થીઓ કરી શકે અને ચોક્કસ અનુમાનો મેળવી નિર્ણય લઈ શકે.
- આર્થિક ચલો જેવા કે માંગ, પુરવઠો, ભાગ વગેરે વચ્ચેના સંબંધોની જાણકારી મેળવી શકે.

### 11.1 પ્રસ્તાવના :

સહસંબંધની જાણકારી મેળવતા પહેલા ચલરાશિઓની જાણકારી મેળવવી જરૂરી છે. ચલરાશિઓ એટલે કે માંગ, પુરવઠો, વસ્તુના ભાવ વિદ્યાર્થીઓની કિંમતો બદલાતી રહે છે. અને તેને સંખ્યામાં દર્શાવી શકાય છે. આ ચલરાશિઓ વચ્ચે સંબંધો રહેલા હોય છે. દા.ત. માંગ અને તેની કિંમત વચ્ચેના સંબંધો માપવામાં આવે તો માંગ ફેરફાર થતો જોવા મળે છે એટલે કે જ્યારે એક ચલની કિંમતમાં ફેરફાર થાય છે ત્યારે બીજા

ચલની કિંમતમાં ફેરફાર થાય છે અને તે બંને ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ માલૂમ પડે તો તેને સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય અને જો બે ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધનો અભાવ જોવા મળે તો તેને સહસંબંધના અભાવ તરીકે ઓળખી શકાય એટલે કે બે ચલો વચ્ચે સંબંધ નથી તેમાં બંને ચલો વચ્ચે એક સાથે ફેરફાર થાય છે. પરંતુ બંને ચલો વચ્ચે કોઈ કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોતો નથી. દા.ત. એક સમુહના વ્યક્તિઓનું વજન અને આવક બંનેના આંકડા તપાસવામાં આવે તો તે બંનેમાં એકસાથે ફેરફારો થતા જોવા મળે છે. પરંતુ બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ જોવા મળતો નથી. એટલે કે વજન અને આવક વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે.

### 11.2 સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા :

**અર્થ :**

સહસંબંધ એ બે કે તેથી વધારે ચલો વચ્ચે કેવો અને કયા પ્રકારનો સંબંધ રહેલો છે. તે જાણવા માટેની આકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિ છે. તેમાં એક ચલમાં ફેરફાર થાય તો તેને લીધે બીજા ચલમાં પણ ફેરફાર થતો જોઈ શકાય છે અને આ ફેરફાર કયા પ્રકારનો છે તે જાણી શકાય છે. એટલે કે એક ચલ બીજા ચલથી કેટલો નજીક છે. તેની જાણકારી મેળવી શકાય છે. દા.ત. નવા ઉદ્યોગોની સ્થાપના કરવાથી રોજગારીની તકોમાં વધારો થતો હોય છે. એટલેકે નવા ઉદ્યોગોની સ્થાપના કરવાથી તેમાં કાર્ય માટે માણસોની જરૂરિયાત ઊભી થશે. પરિણામે રોજગારીની નવીન તકો ઊભી થતી જોવા મળે છે. અહીં બંને ચલો વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ જોવા મળે છે. તેવી નવા ઉદ્યોગની સ્થાપના અને રોજગારીની તકો વચ્ચે સહસંબંધ છે એમ કહી શકાય.

**વ્યાખ્યા :**

— W.I. King ના મતે “correlation means that between two series or groups of data there exists some casual connection” એટલે કે કોઈપણ બે શ્રેણી કે સમુહો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય તો તેને સહસંબંધ કહે છે.

— Dr. M. H. Maisuria ના મતે કોઈપણ બે શ્રેણીઓ કે સમુહો વચ્ચે પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ દિશામાં ફેરફાર થતો હોય અને આ ફેરફાર કાર્ય-કારણનો સંબંધને કારણે ઉદભવતો હોય તો તેને સહસંબંધ કહે છે.

**સહસંબંધના ઉદાહરણો :**

- કિંમત અને માંગ
- માંગ અને પુરવઠો
- કિંમત અને પુરવઠો
- પતિની ઊંચાઈ અને પત્નીની ઊંચાઈ
- આવક અને ખર્ચ
- આવક અને બચત
- વરસાદ અને પાક
- ઊંચાઈ અને વજન

**11.3 સહસંબંધના પ્રકારો : Type of correlation** સહસંબંધ ને નીચેના ત્રણ પ્રકારોમાં વહેંચી શકાય.

(A) ધન સહસંબંધ (B) ઋણ સહસંબંધ (C) સહ સંબંધનો અભાવ

**(A) ધન સહસંબંધ : (Positive Correlation) :**

જ્યારે કોઈપણ બે ચલો પૈકી કોઈ એક ચલની કિંમતમાં ઘટાડો થતો અને બીજા સંબંધિત ચલોની કિંમતમાં પણ ઘટાડો થતો હોય છે અથવા એક ચલની કિંમતમાં વધારો થતો અને બીજા સંબંધિત ચલની કિંમતમાં પણ વધારો થતો હોય છે એટલે કે બંને ચલોમાં એક જ દિશામાં ફેરફાર થતો હોય અને બંને વચ્ચે કાર્ય કારણનો

સંબંધ હોય તો આવા ચલો વચ્ચેના સંબંધને ધન સહસંબંધ કહેવામાં આવે છે. જે નીચેના ઉદાહરણો ઉપરથી સમજી શકાય.

ઉદાહરણ-1	વાહનોની સંખ્યા	10	17	19	21	23
	અકસ્માતોની સંખ્યા	4	7	8	10	12

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે વાહનોની સંખ્યામાં વધારો થાય છે. તેમાં અકસ્માતોની સંખ્યામાં પણ વધારો થાય છે અને બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોવાથી વાહનોની સંખ્યા અને અકસ્માતોની સંખ્યા વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે. એમ કહેવાય. પરંતુ અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે તે આ વધારાનું પ્રમાણ એક સરખું નથી તેથી તેને આંશિક ધન સહસંબંધ તરીકે પણ ઓળખી શકાય.

ઉદાહરણ-2	આવક (રૂ.)	200	150	125	100	80
	ખર્ચ (રૂ.)	160	110	80	50	40

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે કોઈ એક વ્યક્તિની આવકમાં ઘટાડો થાય છે તેમ તેના ખર્ચમાં ઘટાડો થાય છે. અને બંને વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ છે. તેથી આવક અને ખર્ચ બંને વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય પરંતુ અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે આ ઘટાડાનું પ્રમાણ એક સરખું નથી તેથી તેને આંશિક ધન સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય.

### (B) ઋણ સહસંબંધ (Negative Correlation) :

જ્યારે કોઈપણ બે ચલો પૈકી કોઈ એક ચલની કિંમતમાં ઘટાડો થતો હોય અને બીજા સંબંધિત ચલની કિંમતમાં વધારો થતો હોય છે. અથવા કોઈ એક ચલની કિંમતમાં વધારો થતો હોય અને બીજા સંબંધિત ચલની કિંમતમાં ઘટાડો થતો હોય છે એટલે કે બંને ચલોમાં વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતો હોય અને બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય તો આ બે ચલો વચ્ચેના સંબંધને ઋણ સહસંબંધ કહેવામાં આવે છે. જે નીચેના ઉદાહરણો ઉપરથી સમજી શકાય.

ઉદાહરણ-1	ભાવ (રૂ.)	16	10	8	6	5
	માંગ (અંકમાં)	40	45	48	52	58

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે કોઈ એક વસ્તુના ભાવમાં ઘટાડો થતો હોય છે તેમ તેની માંગમાં વધારો થતો હોય છે. એટલે કે બંને વચ્ચે વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થાય છે અને બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ પણ છે. તેથી આવા બે ચલો વચ્ચેના સંબંધને ઋણ સહસંબંધ કહેવાય અલબત્ત અહીં એ ખાસ નોંધવું જોઈએ કે આ ફેરફારનું પ્રમાણ એક સરખું નથી તેથી તેને આંશિક ઋણ સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય.

ઉદાહરણ-2	ભાવ	12	15	17	20	22
	માંગ	14	11	9	7	6

ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે કોઈ એક વસ્તુના ભાવમાં વધારો થતો હોય છે તેમ તેની માંગમાં ઘટાડો થતો હોય છે. એટલે કે બંને વચ્ચે વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થાય છે. અને બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ પણ છે. તેથી આવા બે ચલો વચ્ચેના સંબંધને ઋણ સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય. અલબત્ત અહીં એ ખાસ નોંધવું જોઈએ કે આ ફેરફારનું પ્રમાણ એકસરખું નથી તેને આંશિક ઋણ સહસંબંધ તરીકે ઓળખી શકાય.

### (C) સહ સંબંધનો અભાવ :

જ્યારે કોઈપણ બે ચલોનો થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં કે વિરુદ્ધ દિશામાં થતો હોય પરંતુ તે બે ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ ન હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે. એમ કહેવાય. એટલે કે બંને ચલો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે એમ કહેવાય.

વર્ષ	2019	2020	2021	2022
BAOUના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	200	400	500	600
અમદાવાદમાં થતુ કારનું ઉત્પાદન (હજારમાં)	50	70	90	95

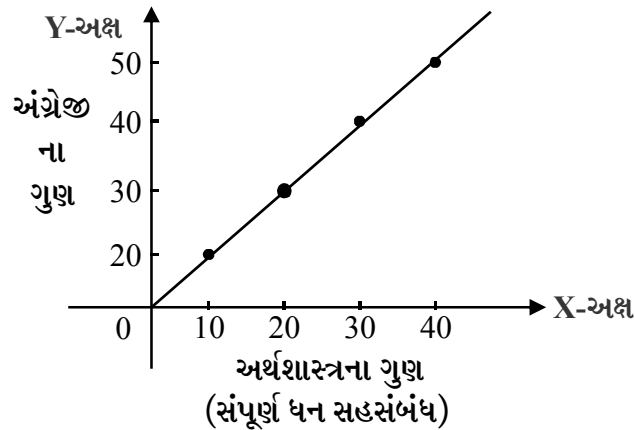
ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે BAOUના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યામાં વધારો થાય છે અને અમદાવાદમાં કારના ઉત્પાદનમાં પણ વધારો થાય છે એટલે કે વધારો એક જ દિશામાં જોવા મળે છે. પરંતુ આ બંને વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ નથી. (અહીં BAOUના વિદ્યાર્થીઓ અને અમદાવાદમાં કારના ઉત્પાદન સાથે કોઈ લેવા દેવા નથી.) તેથી તે બંને વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે. એમ કહેવાય. તેવી જ રીતે આ ફેરફારો વિરુદ્ધ દિશામાં થતો હોય અને બંને ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ ન હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે એમ કહેવાય. અહીં બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નિકટ છે તે જાણી શકાતુ નથી બંને ચલો સ્વતંત્ર છે.

**11.4 સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો (Methods of Studying Correlation) :** બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે મુખ્યત્વે નીચે ત્રણ રીતોનો ઉપયોગ થાય છે. જે નીચે મુજબ છે.

- (A) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત
- (B) કાર્લ પિર્યસનની રીત (ગુણન પ્રધાનની રીત)
- (C) સ્પયરમેનની રીત (ક્રમાંક સહસંબંધની રીત)
- (A) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત :

સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો પૈકીની પ્રથમ રીત એટલે વિકીર્ણ આકૃતિની રીત તેમાં બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધનું માપ અને પ્રકારોનો અભ્યાસ ખૂબ જ સરળતાથી કરી શકાય છે. આ રીતમાં બે ચલો પૈકી એક ચલની કિંમતોને X-અક્ષ ઉપર અને બીજા ચલની કિંમતોને Y-અક્ષ ઉપર દર્શાવવામાં આવે છે અને બંને ચલોના બિંદુઓ જોડકા પ્રમાણે લઈ તેનું એક ચિત્ર કે આકૃતિ દોરવામાં આવે છે. આ ચિત્ર કે આકૃતિને વિકીર્ણ ચિત્ર અથવા વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેની મદદથી બે ચલો વચ્ચે કયા પ્રકારનો સંબંધ છે અથવા બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે તે જાણી શકાય છે. આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિઓને મુખ્યત્વે પાંચ વિભાગમાં વહેંચવામાં આવે છે. જે નીચે મુજબ છે.

#### આકૃતિ-1 સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ



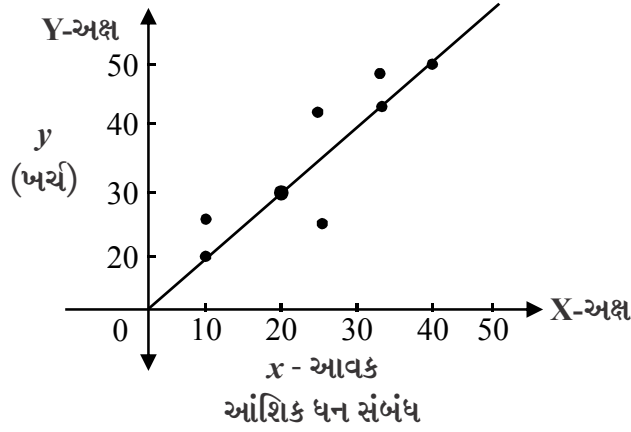
ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે અર્થશાસ્ત્રના ગુણમાં વધારો થાય છે તેમ અંગ્રેજીના ગુણોમાં પણ

વધારો થાય છે. અને આ વધારો પ્રમાણસર છે અને આલેખની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ અને નીચેથી ઉપર તરફ જાય છે. તેથી આ બંને ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

અર્થશાસ્ત્રના ગુણ	10	20	30	40
અંગ્રેજીના ગુણ	20	30	40	50

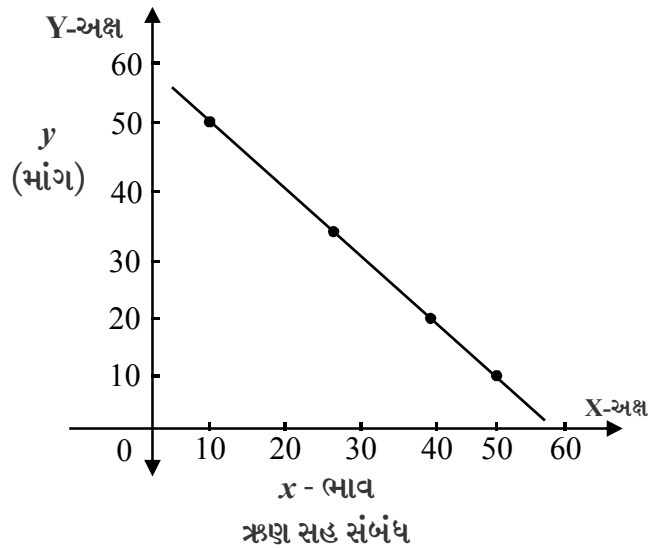
આમ કોઈપણ બે ચલો વચ્ચે થતી વધ-ઘટ એકજ દિશામાં અને પ્રમાણસર હોય અને આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ, નીચેથી ઉપર તરફ જતી હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહ સંબંધ છે એમ કહેવાય.

### આકૃતિ-2 આંશિક ધન સંબંધ



અહીં ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે બે ચલોની કિંમતો  $x$  અને  $y$  (ખર્ચ)માં થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં છે પરંતુ પ્રમાણસર નથી અને તેની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેથી ઉપર તરફ જાય છે. પરંતુ અમુક બિંદુઓ રેખાની આજુબાજુ પડે છે. (જે અપ્રમાણસર વધ ઘટ બતાવે છે.) તેથી આ બે ચલો વચ્ચે આંશિક રેખિક ધન સહસંબંધ છે એમ કહી શકાય.

### આકૃતિ-3 ઋણ સંબંધ

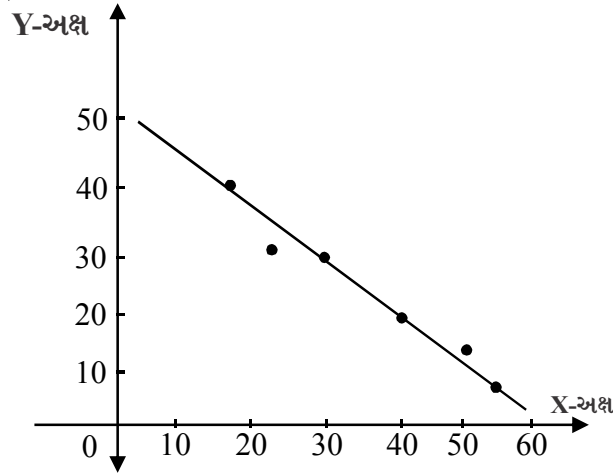


ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે વસ્તુનો ભાવ જેમ જેમ વધતો જાય છે તેમ તેમ પુરવઠામાં ઘટાડો

થતો જાય છે. આ ઘટાડો પ્રમાણસર છે અને આલેખની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચે તરફ જાય છે તેથી આ બંને ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે. એમ કહેવાય.

આમ કોઈપણ બે ચલો વચ્ચે થતી વધ-ઘટ વિરુદ્ધ દિશામાં અને પ્રમાણસર હોય અને આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચેની તરફ જતી હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

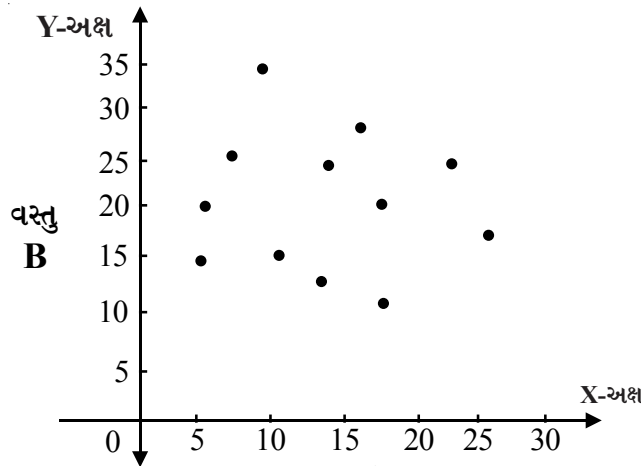
#### આકૃતિ-4 આંશિક ઋણ સહસંબંધ



આંશિક ઋણ સહસંબંધ

અહીં આકૃતિમાં જોઈ જોઈ શકાય છે કે બે ચલો  $x$  અને  $y$  માં થતો ફેરફાર વિરુદ્ધ દિશામાં છે પરંતુ પ્રમાણસર નથી અને તેની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચેની તરફ જાય છે પરંતુ અમુક બિંદુઓ આ રેખાની આજુબાજુ પડે છે (જે અપ્રમાણસર વધઘટ બતાવે છે.) તેથી આ બે ચલો વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

#### આકૃતિ-5 સહસંબંધનો અભાવ



સહસંબંધનો અભાવ

ઉપરની આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે વસ્તુ A અને વસ્તુ B ના બિંદુઓ ગમે ત્યાં વેર-વિખેર (અસ્ત વ્યસ્ત)

પડેલા છે તેથી તે બે-ચલો વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે એમ કહી શકાય. બંને ચલો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે એમ કહી શકાય.

આમ વિકીર્ણ આકૃતિની મદદથી બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નજીક છે અને બે ચલો વચ્ચે કયા પ્રકારનો સહસંબંધ રહેલો છે તે જાણી શકાય છે. પરંતુ તેની એક ખામી એ છે કે સહસંબંધનું ચોક્કસ માપ જાણી શકતું નથી, તેથી આ ખામીને દૂર કરવા કાર્લપિર્યસને આપેલું માપ સમજવું જરૂરી છે.

**(B) કાર્લ પિર્યસનની રીત :** આ રીતને ગુણન પ્રધાનની રીત તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. કાર્લ પિર્યસને આપેલી આ રીતની મદદથી બે ચલો વચ્ચેના સંબંધની દિશા તેમજ બે ચલો વચ્ચેની નિકટતા સંખ્યાત્મક રીતે દર્શાવી શકાય છે. એટલે કે આ રીતની મદદથી બે ચલો વચ્ચેનો રૈખિક સહસંબંધ સંખ્યાત્મક રીતે માપી શકાય છે અને પ્રકારના સહસંબંધના માપને સહસંબંધાંક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. અને તેને  $r$  (આર) વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સહસંબંધાંક  $r$  (આર) ની ગણતરી માટે કાર્લ પિર્યસને નીચેના અલગ અલગ સૂત્રો આપેલા છે.

$x$  અને  $y$  વચ્ચેના સહસંબંધકની ગણતરીના સૂત્રો :

$$(1) \text{ સહસંબંધક } r = \frac{Cov(x, y)}{S_x \cdot S_y}$$

$$Cov(x, y) = x \text{ અને } y \text{ વચ્ચેનું સહવિચરણ}$$

$$= \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n}$$

$$S_x = x \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$S_y = y \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(y - \bar{y})^2}{n}}$$

$$(2) \text{ સહસંબંધાક } r = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \cdot S_x \cdot S_y}$$

$$(3) \text{ સહસંબંધાક } = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2} \times \sqrt{\Sigma(y - \bar{y})^2}}$$

**નોંધ :** મધ્યકો પૂર્ણાંકમાં આવતા હોય એટલે  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  ની કિંમત પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે ત્યારે આ સૂત્ર વાપરવું વધુ યોગ્ય ગણાય.

$$(4) \text{ સહસંબંધાક } r = \frac{\Sigma xy - n \bar{x} \bar{y}}{n S_x S_y}$$

$$(5) \text{ સહસંબંધક } r = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

(6) સહસંબંધક શોધવાની ટૂંકી રીતનું સૂત્ર :

$$\text{સહસંબંધક } r = \frac{n\sum uv - \sum u \cdot \sum v}{\sqrt{n\sum u^2 - (\sum u)^2} \times \sqrt{n\sum v^2 - (\sum v)^2}}$$

$$\text{જ્યાં } u = x - A \text{ અથવા } u = \frac{x - A}{i_x}$$

$$\text{અને } v = Y - B \text{ અથવા } v = \frac{y - B}{i_y}$$

A = x નો ધારેલો મધ્યક

$i_x$  = x ની વર્ગ લંબાઈ

B = Y નો ધારેલો મધ્યક

$i_y$  = y નો વર્ગ લંબાઈ

$\sum u$  = x ના વિચલનોનો સરવાળો

$\sum v$  = y ના વિચલનોનો સરવાળો

$\sum u^2$  = x ના વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો

$\sum v^2$  = y ના વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો

$\sum uv$  = x અને y ના વિચલનોના ગુણાકારનો સરવાળો

n = કુલ પ્રાપ્તકોની સંખ્યા (જોડકા)

નોંધ :- આ સૂત્રનો ઉપયોગ જ્યારે  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  ની કિંમત અપૂર્ણાંકમાં આવે ત્યારે કરવો વધુ યોગ્ય છે.

(7) વર્ગીકૃત માહિતી ઉપરથી સહસંબંધક શોધવાનું સૂત્ર

$$r = \frac{n\sum fuv - \sum fu \cdot \sum fv}{\sqrt{n\sum u^2 fu - (\sum fu)^2} \times \sqrt{n\sum v^2 fv - (\sum fv)^2}}$$

નોંધ : જ્યારે અવલોકનોના જોડકાની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે હોય (એટલે કે x અને y ના જોડકા મોટા પ્રમાણમાં હોય) ત્યારે મહિતીને બંને ચલો x અને y ને આધારે વર્ગીકૃત કરી દ્વિચલ કોષ્ટક તૈયાર કરવામાં આવે છે. આ દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી સહસંબંધક શોધવા ઉપરનું સૂત્ર વપરાય છે.

દ્વિ-ચલ કોષ્ટકનું ઉદાહરણ

	x y	અર્થશાસ્ત્રના ગુણ			
		0-10	10-20	20-30	30-40
આંકડા	0-10	2	3	5	0
શાસ્ત્ર	10-20	2	6	4	2
ના	20-30	3	2	1	3
ગુણ	30-40	4	5	2	1

ઉપરનુ કોષ્ટક 40 ગુણની પરીક્ષામાં અર્થશાસ્ત્ર અને આંકડાશાસ્ત્રના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ અને વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. દા.ત. સૌ પ્રથમ ખાનાની આવૃત્તિ 2 આપેલ છે તેનો અર્થ એ થાય છે કે અર્થશાસ્ત્રમાં 0-10ની વચ્ચે અને આંકડાશાસ્ત્રમાં 0-10ની વચ્ચે ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા '2' છે તેવી જ રીતે બાકીની આવૃત્તિઓ સમજી શકાય છે.

### 11.5 દ્વિ-ચલ કોષ્ટક ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધવાની રીત (સમજૂતી) :

**પગલુ-1** હારમાં દર્શાવેલા વર્ગોને  $x$  અને સ્તંભમાં દર્શાવેલા વર્ગોને  $y$  ધારો.

**પગલુ-2** દરેક ખાનાનો આડો અને ઊભો સરવાળો કરો અને  $x$ ના સરવાળાને  $fu$  અને  $y$  ના સરવાળાને  $fv$  કહો.

**પગલુ-3**  $x$  ના દરેક વર્ગોની મધ્ય કિંમતો શોધો અને  $y$ ના દરેક વર્ગોની મધ્ય કિંમતો શોધો. દા.ત. 10-20 વર્ગ આપેલો હોય તો  $\frac{10+20}{2} = 15$ , 20-30 હોય તો  $\frac{20+30}{2} = 25$  .....

**પગલુ-4**  $x$  ની મધ્યકિંમતને  $x$  વડે અને  $y$ ની મ.કિં.ને  $y$  વડે દર્શાવો.

**પગલુ-5**  $x$  (મધ્ય કિંમત)ની કિંમતોમાંથી વચ્ચેની કોઈપણ કિંમત લઈ તેને ધારેલો મધ્યક  $A$  કહો ત્યારબાદ નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તમામ કિંમતો શોધો અને તેને  $u$  કહો.

દા.ત. 

મ.કિં.	$x$	5	10	15	20	25
--------	-----	---	----	----	----	----

 વચ્ચેની કિંમત  $A = 15$  અને  $5 - 10, 10 - 15$  ..... વર્ગ આપેલ હોય તો વર્ગ લંબાઈ = 5 ( $10 - 5 = 5, 15 - 10 = 5$  .....

$$u = \frac{x-A}{i} \text{ જ્યાં } A = \text{ધારેલો મધ્યક}$$

$$i_x = x \text{ ની વર્ગ લંબાઈ}$$

**પગલુ-6**  $y$  (મધ્ય કિંમત)ની કિંમતોમાંથી વચ્ચેની કોઈપણ કિંમત લઈ તેને ધારેલો મધ્યક  $B$  કહો ત્યારબાદ નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તમામ કિંમતો શોધો અને તેને  $v$  કહો. દા.ત. 

મ. કિં.	$y$	10	20	30	40
---------	-----	----	----	----	----

 વચ્ચેની કિંમત  $B = 30$  અને  $10 - 20, 20 - 30, \dots$  વર્ગો આપેલા હોય તો વર્ગ લંબાઈ = 10 (જેમકે  $20 - 10 = 10, 30 - 20 = 10, \dots$ )

$$v = \frac{y-B}{1_y} \text{ જ્યાં } B = \text{ધારેલો મધ્યક}$$

$$1_y = y \text{ ની વર્ગ લંબાઈ}$$

**પગલુ-7**  $u$  (પગલુ-5) અને  $fu$  (પગલુ-2) બંનેનો ગુણાકાર કરી  $ufu$  મેળવો.

**પગલુ-8**  $v$  (પગલુ-6) અને  $fv$  (પગલુ-2) બંનેનો ગુણાકાર કરી  $vf$  મેળવો.

**પગલુ-9**  $u$  (પગલુ-5) અને  $ufu$  (પગલુ-7) બંનેનો ગુણાકાર કરી  $u^2fu$  મેળવો.

**પગલુ-10**  $v$  (પગલુ-6) અને  $vf$  (પગલુ-8) બંનેનો ગુણાકાર કરી  $v^2fv$  મેળવો.

**પગલુ-11**  $f$  (આવૃત્તિ)  $\times u \times v$  (ત્રણેનો ગુણાકાર) કરી  $fu$ ની કિંમત આપેલી આવૃત્તિની બાજુમાં  $\bigcirc$  (રાઉન્ડ) માં વચ્ચે લખો.

દા.ત. દ્વિચલ કોષ્ટક નીચે મુજબ આપેલ હોય તો.

	10 - 20		20 - 30		30 - 40			v	fuv
10 - 20	5	10	2	2	0	1		- 1	12
20 - 30	-	-		-		-		0	0
30 - 40	-		-1	1		-		1	-1
u	- 2		- 1		0				11
fuv	10	1			0		11		

$$f \times u \times v$$

$$5 (-1) \times (-2) = 10 \rightarrow \text{જે ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ } \bigcirc \text{ રાઉન્ડમાં લખો.}$$

આ રીતે દાખલામાં આપેલ તમામ આવૃત્તિ જેમકે 2, 1, 1ની સામે  $\bigcirc$  માં રકમ લખી ત્યાર બાદ તેનો આડો અને ઊભો સરવાળો કરો અને તેને fuv કહો. fuv બંને બાજુ સરખો સરવાળો આવશે. તેની નોંધ લો કે જેથી નીચે દર્શાવ્યા મુજબનું કોષ્ટક તૈયાર થશે.

વર્ગો x →									
y ↓	10-20	20-30	30-40	fu	y	v	vf	v <sup>2</sup> f	fuv
10-20									
20-30									
30-40									
fu									
x					= n		vf	Σv <sup>2</sup> f	fuv
u									
ufu							→	ufu	
u <sup>2</sup> f <sub>4</sub>							→	u <sup>2</sup> f	
fuv							→	Σfuv	

નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સહસંબંધાંક r શોધી શકાય.

$$r = \frac{n \Sigma fuv - (\Sigma ufu) (\Sigma vf)}{\sqrt{n \Sigma u^2 fu - (\Sigma ufu)^2} \times \sqrt{n \Sigma v^2 fv - (\Sigma vf)^2}}$$

(C) સ્પિયરમેનની રીત : સ્પિયરમેને આપેલી સહસંબંધાંક શોધવાની રીતને ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે તેની શરૂઆત 1904માં ચાર્લ્સ સ્પિયરમેને કરી. તેમાં કોઈ પણ વ્યક્તિનું કે તેના કાર્યનું મૂલ્યાંકન કરવાનું હોય તો તે તેની પ્રમાણિકતા કે હોંશિયારીને આધારે કરવું પડે છે. પરંતુ તેને આંકડાકીય ગ્રેડ આપવો કઠિન છે. તેથી તેનું મૂલ્યાંકન ગુણ આપી તેને આધારે તેનો ક્રમ નક્કી કરી બે ચલો વચ્ચેના ક્રમોને આધારે સહસંબંધક શોધવામાં આવે છે. તેથી તેને સ્પિયરમેનની ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

જ્યારે ગુણાત્મક માહિતીને ચલ સ્વરૂપે રજૂ કરવી સરળ ન હોય પરંતુ તેને તેના ગુણધર્મો અનુસાર ક્રમ આપી શકાય તેમ હોય તો આ રીતનો ઉપયોગ ખૂબ જ મહત્વનો ગણાય છે.

આ રીતમાં આપેલ ચલના પ્રત્યેક અવલોકનોને તેમની ક્રિંમત ઉપરથી ક્રમ આપવામાં આવે છે. સૌથી મોટા અવલોકનને પ્રથમ ક્રમ, તેનાથી નાના અવલોકનને દ્વિતીય ક્રમ, તેનાથી નાના અવલોકનને તૃતીય ક્રમ .....

આ પ્રમાણે બધા જ અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં આવે છે. જો આપેલા અવલોકનોની કિંમત એકસરખી હોય તો તે અવલોકનો ઉપર આવતા ક્રમની સરેરાશ શોધી તે દરેકને તે ક્રમ આપવામાં આવે છે અને ત્યાર પછી નાના અવલોકનોને ત્યાર પછીનો ક્રમ આપવામાં આવે છે. દા.ત. ધારોકે BAOUમાં સેમેસ્ટર-5 માં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓના અર્થશાસ્ત્ર વિષયમાં નીચે મુજબ ગુણ આવેલા છે.

18, 15, 17, 18, 19, 14, 15, 18

અહીં સૌથી મોટો અવલોકન 19 ને 1 ક્રમ તેનાથી નાનો અવલોકન 18 છે. જે ત્રણ વખત આવે છે.

તેથી ત્યાર પછીના ત્રણ ક્રમો 2, 3 અને 4 ની સરેરાશ =  $\frac{2+3+4}{3} = \frac{9}{3} = 3$  છે. તેથી નીચે દર્શાવ્યા મુજબ

18ની સામે 3, 3 અને 3 ક્રમ આપવામાં આવશે. હવે 18થી નાનું અવલોકન 17 છે. તેને 2, 3 અને 4 પછીનો

ક્રમ 5 આપવામાં આવશે. ત્યાર બાદ 15 બે વખત છે તેથી તેને 6 અને 7ની સરેરાશ =  $\frac{6+7}{2} = 6.5$  ક્રમ

આપો અને છેલ્લો ક્રમ 14 છે. તેને 6 અને 7 પછીનો ક્રમ 8 આપો. જે નીચે મુજબ મળશે.

ગુણ	ક્રમ
18	3
15	6.5
17	5
18	3
19	1
14	8
15	6.5
18	3

ધારોકે  $x$  અને  $y$  એમ બે શ્રેણીઓ વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવો હોય તો બંને શ્રેણીના અવલોકનોને ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ ક્રમો  $x$  ના ક્રમને  $r_x$  વડે અને  $y$  ના ક્રમને  $r_y$  વડે દર્શાવો. ત્યારબાદ તે બંને વચ્ચેનો તફાવત  $d$  શોધો. ( $d = r_x - r_y$ ), તફાવતનો વર્ગ શોધી તેને  $d^2$  વડે દર્શાવો અને નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

$$\text{ક્રમાંક સહ સંબંધાંક } r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં  $d^2 =$  તફાવતનો વર્ગ

$n =$  જોડકાની સંખ્યા

જ્યારે બે કે વધુ અવલોકનોની કિંમત સમાન હોય ત્યારે નીચેનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

**ક્રમાંક સહસંબંધાંક**

$$r = 1 - \frac{6 \left[ \sum d^2 + \frac{m}{12}(m^2-1) + \frac{m}{12}(m^2-1) + \dots \right]}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં  $m =$  અવલોકનોના પુનરાવર્તનની સંખ્યા

દા.ત.  $r_x$  અને  $r_y$  માં નીચે મુજબ ક્રમ મળ્યા હોય.

$r_x$	$r_y$
1	(2)
(2.5)	4
4	(2)
(2.5)	(2)

અહીં  $r_x$  માં 2.5 બે વખત આવે છે.  $r_y$  માં 2 ત્રણ વખત આવે છે. અને કુલ બે જોડ છે. તેથી સૂત્રમાં  $\Sigma d^2$  ની

કિંમતમાં  $\frac{m}{12} (m^2 - 1)$  બે વખત ઉમેરાશે (કારણ કુલ બે જોડ છે) આમ જેટલી જોડ હોય એટલી વખત આ સૂત્ર ઉમેરવું જે ઉપરના સૂત્ર પરથી સમજી શકાય. હવે બે જોડ પૈકી પ્રથમ જોડમાં બે અવલોકનો (2.5 અને 2.5) નું પુનરાવર્તન છે. તેથી પ્રથમ ઉમેરેલ સૂત્રમાં  $m = 2$  અને બીજી જોડમાં ત્રણ અવલોકનો (2, 2, 2) નું પુનરાવર્તન છે તેથી બીજી વખત ઉમેરેલ સૂત્રમાં  $m = 3$  લેવાય. તેથી ક્રમાંક સહ સંબંધોકનું સૂત્ર

$$r = 1 - \frac{6 \left[ \Sigma d^2 + \frac{m}{12} (m^2 - 1) + \frac{m}{12} (m^2 - 1) \right]}{n(n^2 - 1)}$$

જ્યાં પ્રથમ  $m = 2$ ,  $n = 4$

દ્વિતીય  $m = 3$

$$r = 1 - \frac{6 \left[ \Sigma d^2 + \frac{2}{12} (2^2 - 1) + \frac{3}{12} (3^2 - 1) \right]}{4(4^2 - 1)}$$

સ્પિયરમેન ક્રમાંક સહસંબંધકની કિંમત  $\pm 1$  જેટલી જ હોય છે. એટલે  $-1$  અને  $+1$  ની વચ્ચે જ હોય છે.

### 11.6 કાર્લ પિર્યસનની રીતના ગુણ-દોષ :

ગુણો :

- (1) જ્યારે બે ચલો વચ્ચેનો રૈખિક સહસંબંધ દર્શાવવાનો હોય ત્યારે આ રીત મુજબ સહસંબંધાંક શોધવામાં આવે તો તે શ્રેષ્ઠ માપ છે.
- (2) બે ચલો વચ્ચેના સંબંધની નિકટતા જાણી શકાય છે. એટલે કે બે ચલો એક બીજાથી કેટલા નજીક છે તે જાણી શકાય છે.
- (3) બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધનો પ્રકાર અને દિશા જાણી શકાય છે.

દોષો (મર્યાદા) :

- (1) બે ચલો વચ્ચે રૈખિક સહસંબંધ દર્શાવવા આ રીત શ્રેષ્ઠ માપ છે પરંતુ આ રૈખિક સંબંધ ધારણા ઉપર રચાયેલી છે.
- (2) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત કરતા આ રીતે સહસંબંધાંકની ગણતરી કરવી અઘરી છે.
- (3) જ્યારે પ્રાપ્તોકોના અવલોકનો ખૂબ મોટા કે ખૂબ નાના હોય ત્યારે સહસંબંધાંક ઉપર તેની અસર વધુ પડે છે.

### 11.7 સ્થિયરમેનની રીતના ગુણ-દોષ :

#### ગુણો :

- (1) પ્રમાણિકતા, ગરીબાઈ, સૌંદર્ય, સ્પર્ધા વગેરે જેવી માહિતી માટે સહસંબંધક શોધવો હોય તો આ રીતે સહસંબંધાંક શોધવો વધુ સરળ બને છે.
- (2) જ્યારે અવલોકનો આપેલા ન હોય પરંતુ ફક્ત ક્રમો જ આપેલા હોય ત્યારે આ રીત જ ઉપયોગી બને છે.
- (3) કાર્લપિયસનની રીત કરતા આ રીતે સહસંબંધાંક શોધવો વધુ સરળ છે.
- (4) આ રીતમાં એક સરખા અવલોકનોને એક સરખા ક્રમ આપવામાં આવતા હોવાથી તેની અગત્યતા વધી જાય છે.
- (5) ગુણાત્મક માહિતી માટે સહસંબંધાંક શોધવા આ જ રીત ઉપયોગી છે.

#### દોષો : (મર્યાદાઓ)

- (1) આ રીતે શોધાયેલો સહસંબંધાંક વધુ સરળ હોય છે પરંતુ ચોક્કસ હોતા નથી.
- (2) દ્વિ-ચલ કોષ્ટકમાં માહિતી આપેલી હોય ત્યારે આ રીત ઉપયોગી નીવડતી નથી.
- (3) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે હોય ત્યારે દરેક અવલોકનને ક્રમ આપવો કંટાળાજનક છે.

### 11.8 સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન :

સહસંબંધની મદદથી બે ચલો એકબીજાથી કેટલા નજીક છે. તે જાણી શકાય છે. એ આપણે જોયું, સહસંબંધના સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહે છે. અને તેને 'r' વડે દર્શાવવામાં આવે છે. હવે આ 'r'ની કિંમતનું અર્થઘટન કરતા પહેલા તે બે ચલો વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે કે કેમ તે તપાસી લીધા બાદ જ તેનું અર્થઘટન કરવું જરૂરી છે. જે નીચે મુજબ કરી શકાય.

#### (1) 'r' = ± 1 નું અર્થઘટન :

જો 'r' = 1 હોય તો બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ રૈખિક ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય. અને જો 'r' = - 1 હોય તો બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ રૈખિક ઋણ સહસંબંધ છે.

#### (2) 'r' = ± 0.9 કે તેથી વધુનું અર્થઘટન :

જો 'r' = 0.9 કે તેથી વધુ હોય તો ચલો વચ્ચે ખૂબ ઉચ્ચ ધન સહસંબંધ છે અને જો 'r' = - 0.9 કે તેથી વધુ હોય તો બે ચલો વચ્ચે ખૂબ ઉચ્ચ ઋણ સહસંબંધ છે. ('r'ની કિંમત - 1 કે + 1ની નજીક હોય તો બે ચલો વચ્ચે નિકટ રૈખિક સંબંધ છે.)

#### (3) જો 'r' ની કિંમતની 0 ની નજીક હોય તો બે ચલો વચ્ચે ઓછો સહસંબંધ છે.

#### (4) 'r' = 0 નું અર્થઘટન :

જો 'r' = 0 હોય તો બંને ચલો વચ્ચે રૈખિક સહસંબંધનો અભાવ છે. એટલે કે બંને ચલો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે.

#### (5) બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધાંકની સરખામણી તેની કિંમતોના પ્રમાણમાં હોતો નથી. દા.ત. ધારોકે r = 0.82 હોય અને r = 0.41 હોય તો તેનો અર્થ એવો નથી કે r = 0.82 એ r = 0.41 કરતાં બમણો સહસંબંધ દર્શાવે છે. પરંતુ તેનો અર્થ એ થાય કે r = 0.82 એ r = 0.41 કરતા વધુ નજીકનો સંબંધ ધરાવે છે.

### 11.9 સંભવિત દોષ :

નિદર્શનમાંથી મળેલ સહસંબંધાંક ઉપરથી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકનું અનુમાન કરતી વખતે સહસંબંધાંકના સંભવિત દોષનો ખ્યાલ મેળવવો જરૂરી છે.

### સંભવિત દોષનો ખ્યાલ :

કોઈ એક જ સમષ્ટિમાંથી એક સરખા કદના જુદા જુદા નિદર્શો લઈને સહસંબંધનો અભ્યાસ કરવામાં આવે તો જુદા જુદા દરેક નિદર્શ માટે સહસંબંધાંકની કિંમત જુદી જુદી મળે છે અને આ કિંમત સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની કિંમત કરતા જુદી હોય છે. ઉપરાંત નિદર્શના સહસંબંધાંકની કિંમત ઉપરથી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની કિંમતનું જે અનુમાન કરવામાં આવે છે, તેમાં ભૂલ થવાની સંભાવના રહેલી છે. આવી અપેક્ષિત ભૂલને સંભવિત દોષ કહેવાય છે.

### સંભવિત દોષની વ્યાખ્યા :

“સમવિષ્ટના દરેકે દરેક જોડકાની મદદથી મેળવેલ સહસંબંધાંક અને તે જ સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવેલ એક સમાન કદના શક્ય દરેકે દરેક નિદર્શ પરથી મેળવેલ સહસંબંધાંકની કિંમત વચ્ચેના તફાવતોની સરેરાશને સંભવિત દોષ કહે છે.” તેને અંગ્રેજીમાં Probable Error કહેવામાં આવે છે. તેથી તેને સંકેતમાં P.E વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જે નીચેના સૂત્રની મદદથી શોધી શકાય.

$$P.E. = \frac{2/3(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

જ્યાં નિદર્શનો  $r =$  સહસંબંધાંક

$n =$  જોડકાંની સંખ્યા (નિદર્શના અવલોકનો)

અથવા

$$P.E. = \frac{0.6745(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

સંભવિત દોષનો આધાર નિદર્શના કદ પર રહેલો છે. જેમ નિદર્શનું કદ મોટું તેમ સંભવિત દોષ ઓછો.

### સંભવિત દોષનું અર્થઘટન :

- (1) જો  $r < P.E.$  એટલે કે જો સહસંબંધાંક  $r$ ની કિંમત સંભવિત દોષ કરતા ઓછી હોય તો બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સાર્થક છે.
- (2) જો  $r > 6 P.E.$  એટલે કે જો સહસંબંધાંક  $r$ ની કિંમત સંભવિત દોષ ગુણ્યા છ કરતા વધુ હોય તો બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક અસાર્થક છે.

સમષ્ટિના સહસંબંધાંકનો ગાળો  $r \pm P.E.$  એટલે કે  $r - P.E.$  અને  $r + P.E.$

જ્યાં  $r =$  નિદર્શ સહસંબંધાંક અને  $P.E. =$  સંભવિત દોષ

આમ સંભવિત દોષનો ઉપયોગ સમષ્ટિના અવલોકનો વચ્ચેના સહસંબંધાંક સાર્થક છે કે અસાર્થક તે તપાસવા થાય છે.

### 11.10 નિર્ણાયકતાનો આંક :

સહસંબંધની મદદથી બે ચલો વચ્ચેના ગાણિતીય સંબંધ પ્રસ્થાપિત થઈ શકતો નથી. આ પ્રકારનો ગણિતીય સંબંધ નિયત સંબંધની મદદથી પ્રસ્થાપિત થઈ શકે છે. આ નિયત સંબંધનો અભ્યાસ બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધની ધારણા હેઠળ કરવામાં આવે છે. આ ધારણા સાચી હોય તો નિયત સંબંધનો અભ્યાસ અને તેના તારણો સાર્થક (વિશ્વાસનીય) છે કે અસાર્થક તે ચકાસવા માટેનું ઉપયોગી માપ એ નિર્ણાયકતાનો આંક છે. તેને  $R^2$  વડે દર્શાવાય છે.  $R^2$  એ બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધાંકનો વર્ગ ( $r^2$ ) જેટલો જ થાય છે. એમ સાબિત કરી શકાય.

નિર્ણાયકતાના આંકનું સૂત્ર :

$$R^2 = \frac{\Sigma(y^1 - \bar{y})^2}{\Sigma(y - \bar{y})^2} \quad \text{જ્યાં } \Sigma(y^1 - \bar{y})^2 = \text{સકારણ ચલન}$$

$$\Sigma(y - \bar{y})^2 = \text{કુલ ચલન}$$

$R^2$  ની કિંમત 0 અને 1 ની વચ્ચે જ હોય છે.

$R^2$  ની કિંમત 0 થી નજીક હોય તો તે સુરેખ સહસંબંધની ધારણા અસાર્થક છે. એમ માનવામાં આવે છે. પણ જો  $R^2$  ની કિંમત 1 ની નજીક હોય તો સુરેખ સહસંબંધની ધારણા સાર્થક છે એમ કહેવાય.

બે ચલો વચ્ચેના સંબંધનું અર્થઘટન કરવા માટે નિર્ણાયકતાનો આંક યોગ્ય અને ઉપયોગી માપ છે તેની મદદથી આધારિત ચલમાં સ્વતંત્ર ચલને કારણે જે ફેરફાર થાય છે તેનું પ્રમાણ જાણી શકાય છે. આધારિત ચલમાં થતા ફેરફાર કે ચલનને બે વિભાગમાં વહેંચી શકાય.

- (1) સકારણ (સમજી શકાય તેવું) ચલન એટલે કે સ્વતંત્ર ચલને લીધે થતો ફેરફાર
- (2) અકારણ ચલન એટલે કે અન્ય પરિબળોને લીધે થતું ચલન.

નિર્ણાયકતાના આંકનું અર્થઘટન :

નિર્ણાયકતાના આંક  $R^2$  એ સાપેક્ષ ચલમાં નિરપેક્ષ (સ્વતંત્ર) ચલને કારણે થતા ફેરફારનું પ્રમાણ દર્શાવતો આંક છે. તેને 100 વડે ગુણતા નિરપેક્ષ ચલને કારણે થતો ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવી શકાય છે. દા.ત. જો બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક  $r = 0.9$  હોય તો તેનો વર્ગ ( $0.9 \times 0.9$ ) 0.81 મળે છે.

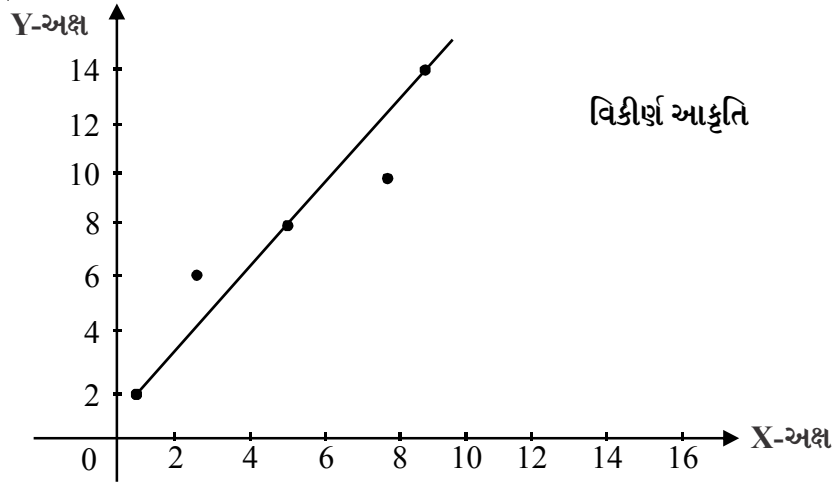
$\therefore$  નિર્ણાયકતાનો આંક  $R^2 = r^2 = 0.81$  થાય છે જેને 100 વડે ગુણતા ( $0.81 \times 100$ ) 81% મળે છે. તેથી એમ કહી શકાય કે સાપેક્ષ ચલમાં થતાં કુલ ફેરફાર પૈકી 81% ચલન એ નિરપેક્ષ ચલને કારણે થાય છે. જેને સકારણ ચલન કહે છે. અને બાકીનું 19% ચલન ( $100 - 81$ ) અન્ય પરિબળોને લીધે થતું ચલન છે. (જેને અકારણ ચલન કહે છે.)

**11.11 વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય (જાતે ગણો) :**

ઉદાહરણ-1 નીચે આપેલ ચલ  $x$  અને  $y$  ની કિંમતો ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થ ઘટન કરો.

$x$	1	3	5	7	8
$y$	2	6	8	9	14

જવાબ :



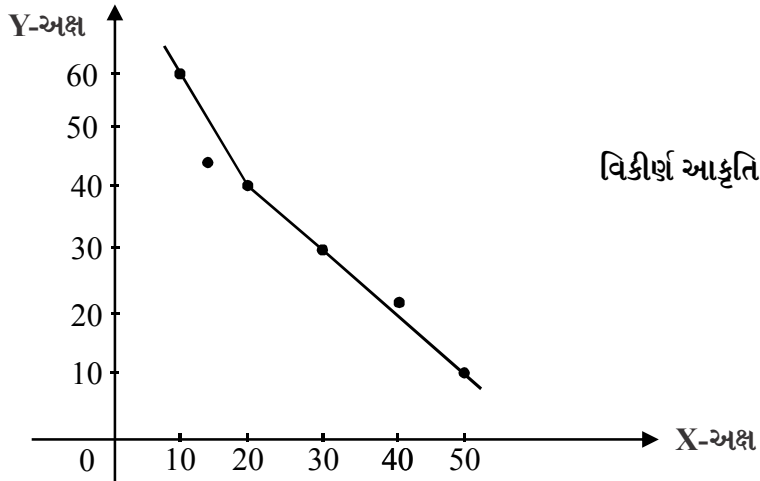
ઉપર દર્શાવેલ આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમાં ચલ  $x$  અને  $y$  ના બિંદુઓને આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવવામાં આવેલ છે અને બિંદુઓની દિશા અને થતો ફેરફાર તપાસવામાં આવે છે.

અર્થઘટન

ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી કહી શકાય કે બે ચલો  $x$  અને  $y$  માં થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં છે પરંતુ પ્રમાણસર નથી અને તેની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેથી ઉપર તરફ જાય છે. પરંતુ એક-બે બિંદુઓ આ રેખાની આજુબાજુ પડેલા છે. જે અપ્રમાણસર વધઘટ બતાવે છે. તેથી બે ચલો  $x$  અને  $y$  વચ્ચે આંશિક રૈખિક ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-2 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

$x$	10	15	20	30	40	50
$y$	60	45	40	30	20	10



ઉપર દર્શાવેલ આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમાં ચલ  $x$  અને  $y$  ના બિંદુઓને આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવવામાં આવેલ છે. અને બિંદુઓની દિશા અને તેમાં થતો ફેરફાર તપાસવામાં આવે છે.

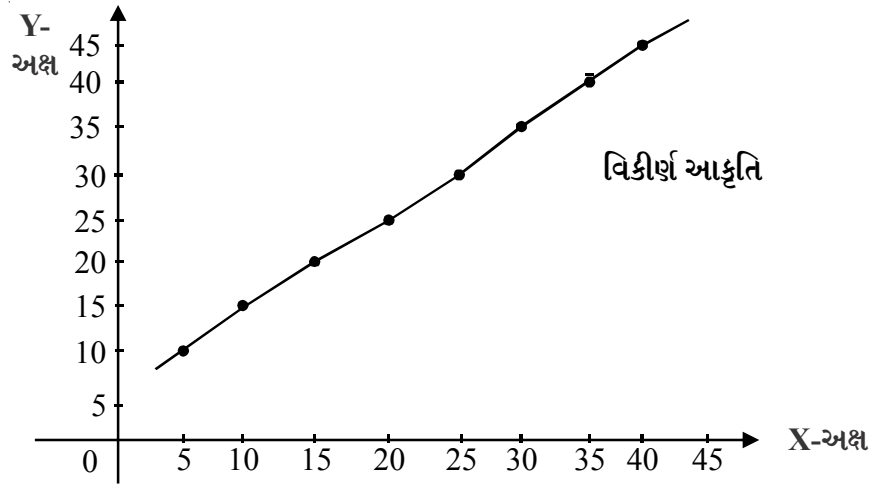
અર્થઘટન :

ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી કહી શકાય કે બે ચલો  $x$  અને  $y$  માં થતો ફેરફાર વિરુદ્ધ દિશામાં અને અપ્રમાણસર છે. તેની રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચેની તરફ જાય છે. (પરંતુ અમુક બિંદુઓ આ રેખાની આજુબાજુ પડે છે જે પ્રમાણસર નથી.) તેથી આ બે ચલો વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ-3 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકર્ણી આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

$x$	5	10	15	20	25	30	35	40
$y$	10	15	20	25	30	35	40	45

જવાબ :



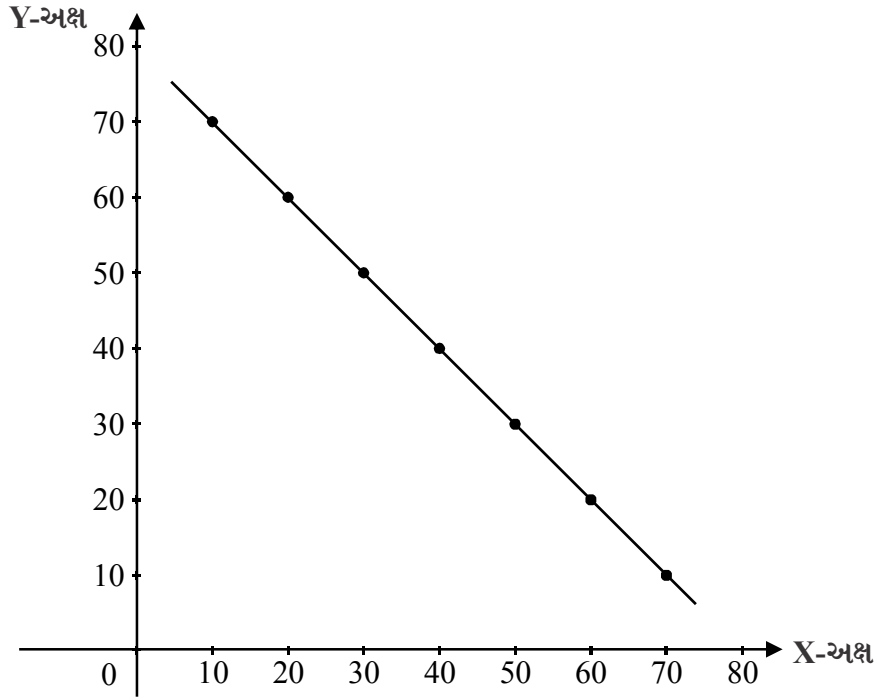
ઉપર દર્શાવેલ આકૃતિને વિકર્ણી આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમાં ચલ  $x$  અને  $y$  ના બિંદુઓને આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવવામાં આવેલ છે અને તે ઉપરથી બિંદુઓની દિશા અને થતો ફેરફાર તપાસવામાં આવે છે.

અર્થઘટન :

ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી કહી શકાય છે કે બે ચલો  $x$  અને  $y$  વચ્ચે થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં અને પ્રમાણસર છે અને આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેથી ઉપર તરફ જાય છે. તેથી બે ચલો  $x$  અને  $y$  વચ્ચે સંપૂર્ણ રેખિક ધન સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ : 4 નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકર્ણી આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

$x$	10	20	30	40	50	60	70
$y$	70	60	50	40	30	20	10



ઉપર દર્શાવેલ આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમાં યલ  $x$  અને  $y$ ના બિંદુઓને ઓળખવામાં આવે છે તેમાં યલ  $x$  અને  $y$ ના બિંદુઓને આલેખપત્ર ઉપર દર્શાવેલ છે અને તે ઉપરથી બિંદુઓની દિશા અને થતો ફેરફાર તપાસવામાં આવે છે.

**અર્થઘટન :**

ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી કહી શકાય કે બે યલો  $x$  અને  $y$  વચ્ચે થતી વધઘટ વિરુદ્ધ દિશામાં અને પ્રમાણસર છે અને આલેખમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરથી નીચેની તરફ જાય છે. તેથી એમ કહી શકાય કે બંને યલો  $x$  અને  $y$  વચ્ચે સંપૂર્ણ રૈખિક ઋણ સહસંબંધ છે.

**સ્વાધ્યાય**

- વિકીર્ણ આકૃતિ એટલે શું ?
- વિકીર્ણ આકૃતિ સવિસ્તાર સમજાવો.
- વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના પ્રકારો આકૃતિ સહિત સમજાવો.
- ટૂંકનોંધ લખો : (1) વિકીર્ણ આકૃતિ અને તેના પ્રકારો  
(2) સંપૂર્ણ ધન અને ઋણ સહસંબંધ દર્શાવતી વિકીર્ણ આકૃતિ સમજાવો.
- નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

$x$	1	4	5	7	8
$y$	3	6	8	9	12

- નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

$x$	10	16	20	30	40	60
$y$	60	46	45	30	20	10

(જવાબ : આંશિક ઋણ સહ સંબંધ)

(7) નીચે આપેલ આકૃતિ ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

$x$	6	10	14	18	22	26	30
$y$	30	26	22	18	14	10	6

(જવાબ : સંપૂર્ણ રેખિક ઋણ સહસંબંધ)

(8) નીચે આપેલ આકૃતિ ઉપરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

$x$	7	10	13	16	19	22	25
$y$	10	13	16	19	22	25	28

(જવાબ : સંપૂર્ણ રેખિક ધન સહસંબંધ)

### 11.12 કાર્લ પિર્યસનની રીતના ઉદાહરણો અને સ્વાધ્યાય

ઉદાહરણ-1 નીચે આપેલ માહિતી માટે કાર્લ પિર્યસનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

ઊંચાઈ	5	6	8	11	15
વજન	12	13	17	18	20

જવાબ : ધારોકે ઊંચાઈ =  $x$  અને વજન =  $y$

	ઊંચાઈ $x$	વજન $y$	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	5	12	-4	-4	16	16	16
	6	13	-3	-3	9	9	9
	8	17	-1	1	1	1	-1
	11	18	2	2	4	4	4
	15	20	6	4	36	16	24
કુલ	45	80	+8 -8 0	7 -7 0	66	46	53 - 1 = 52

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{x\text{ના પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો}}{x\text{ના પ્રાપ્તાંકોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$= \frac{45}{5} = 9$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{y\text{ના પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો}}{y\text{ના પ્રાપ્તાંકોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$= \frac{80}{5} = 16$$

અહીં  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  ની કિંમત પૂર્ણાંક સંખ્યામાં આવે છે તેથી નીચેનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો વધુ હિતાવહ છે.

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \times \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$(x-\bar{x}) \Rightarrow x = 5, 6, 8, 11, 15$  દરેકમાંથી  $\bar{x} = 9$  બાદ કરતા  $(5 - 9 = -4)$  .....

$(y-\bar{y}) \Rightarrow y = 12, 13, 17, 18, 20$  દરેકમાંથી  $\bar{y} = 16$  બાદ કરતા  $(12 - 16 = -4)$  .....

$(x-\bar{x})^2 \Rightarrow (x-\bar{x}) = -4, -3, -1, 2, 6$  દરેકનો વર્ગ કરતા  $(-4 \times -4 = 16, \dots\dots\dots)$

$(y-\bar{y})^2 \Rightarrow (y-\bar{y}) = -4, -3, -1, 2, 4$  દરેકનો વર્ગ કરતા  $(-4 \times -4 = 16, \dots\dots\dots)$

$(x-\bar{x})(y-\bar{y}) \Rightarrow (x-\bar{x})$  ના દરેક ઘટકો સાથે ગુણાકાર કરો.  $(-4 \times -4 = 16, \dots\dots\dots)$   
દરેક સ્તંભનો સરવાળો કરતા નીચે પ્રમાણના પરિણામો મળશે.

$$n = 5, \Sigma x = 45, \Sigma y = 80, \Sigma(x-\bar{x}) = 0, \Sigma(y-\bar{y}) = 0, \Sigma(x-\bar{x})^2 = 66, \Sigma(y-\bar{y})^2 = 46,$$

$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 52$  આ કિંમતો ઉપર દર્શાવેલ સહસંબંધાંકના સૂત્રમાં મુકતા

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{52}{\sqrt{66} \sqrt{46}}$$

$$= \frac{52}{8.12 \times 6.78} = \frac{52}{55.05} = 0.94$$

ઉદાહરણ-2 નીચેના કોષ્ટકમાં પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર અંગેની માહિતી આપવામાં આવેલ છે. તો તે ઉપરથી સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

પતિની ઉંમર (વર્ષમાં)	26	27	29	32	47
પત્નીની ઉંમર (વર્ષમાં)	18	22	26	30	44

જવાબ :

ધારોકે પતિની ઉંમર =  $x$  અને પત્નીની ઉંમર =  $y$

	પતિની ઉંમર $x$	પત્નીની ઉંમર $y$	$u = x - A$ $= x - 32$	$v = Y - B$ $= y - 28$	$u^2$	$v^2$	$u.v$
	26	18	-6	-10	36	100	60
	27	22	-5	-6	25	36	30
	29	26	-3	-2	9	4	6
	32	30	0	2	0	4	0
	47	44	15	16	225	256	240
કુલ	161	140	-14 + 15 01	-18 + 18 0	295	400	336

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{161}{5} = 32.2 \quad \text{જ્યાં } n = 5$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{140}{5} = 28$$

અહીં  $\bar{x} = 32.2$  છે જે અપૂર્ણાંક છે તેથી ધારેલો મધ્યક  $A = 32$  ધારીશું અને  $\bar{y} = 28$  છે. તેથી ધારેલો મધ્યક  $B = 28$  જ ધારીશું અને નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સહસંબંધાંક શોધીશું.

(નોંધ : આ સૂત્ર જ્યારે  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  ની કિંમત અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે ઉપયોગ કરવો યોગ્ય છે.)

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u) \cdot (\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$\text{અહીં } u = x - A \quad \text{અને } v = Y - B$$

$$x : x \text{ ના પ્રાપ્તિકોમાંથી} \quad y : y \text{ ના પ્રાપ્તિકોમાંથી}$$

$$A = 32 \text{ બાદ કરો.} \quad B = 28 \text{ બાદ કરો.}$$

$$u : x \text{ ના દરેક પ્રાપ્તિકોમાંથી } 32 \text{ બાદ કરો.}$$

$$v : y \text{ ના દરેક પ્રાપ્તિકોમાંથી } 28 \text{ બાદ કરો.}$$

$$u^2 \Rightarrow u \text{ ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરો.}$$

$$v^2 \Rightarrow v \text{ ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરો.}$$

$$uv \Rightarrow u \text{ ના દરેક ઘટકોને } v \text{ ના દરેક ઘટકો સાથે ગુણાકાર કરો.}$$

દરેક સ્તંભોનો સરવાળો કરતા નીચેના પરિણામો મળશે.

$$\Sigma u = 1, \Sigma v = 0, \Sigma u^2 = 295, \Sigma v^2 = 400, \Sigma uv = 336$$

હવે મળેલ કિંમતો ઉપર દર્શાવેલ સહસંબંધકના સૂત્રમાં મુકી કિંમત શોધો.

$$r = \frac{5(336) - (1)(0)}{\sqrt{5(295) - (1)^2} \times \sqrt{5(400) - (0)^2}}$$

$$= \frac{1680}{\sqrt{1475 - 1} \times \sqrt{2000}}$$

$$= \frac{1680}{\sqrt{1474} \times \sqrt{2000}}$$

$$= \frac{1680}{38.39 \times 44.72}$$

$$= \frac{1680}{1716.97}$$

$$= 0.98$$

ઉદાહરણ-3 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$x$	45	46	52	55	70	73	75	82
$y$	42	44	50	53	70	73	72	78

જવાબ :

	$x$	$y$	$u = x - A$	$v = y - B$	$u^2$	$v^2$	$uv$
	45	42	- 17	- 18	289	324	306
	46	44	- 16	- 16	256	256	256
	52	50	- 10	- 10	100	100	100
	55	53	- 7	- 7	49	49	49
	70	70	8	10	64	100	80
	73	73	11	13	121	169	143
	75	72	13	12	169	144	156
	82	78	20	18	400	324	360
કુલ	498	482	- 50 + 52 = 2	- 51 + 53 = 2	1448	1466	1450

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{498}{8} = 62.25 \quad n = 8,$$

$$\therefore A = 62$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{482}{8} = 60.25 \quad \therefore B = 60$$

$\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  બંનેની કિંમત અપૂર્ણક છે તેથી નીચેનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u) \cdot (\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

અહીં  $\Sigma u = 2$ ,  $\Sigma v = 2$ ,  $\Sigma u^2 = 1448$ ,  $\Sigma v^2 = 1466$ ,  $\Sigma uv = 1450$  નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{8(1450) - (2)(2)}{\sqrt{8(1448) - (2)^2} \times \sqrt{8(1466) - (2)^2}}$$

$$= \frac{11,600 - 4}{\sqrt{11,584 - 4} \times \sqrt{11,728 - 4}}$$

$$= \frac{11,596}{\sqrt{11,580} \times \sqrt{11724}}$$

$$= \frac{11,596}{107.61 \times 108.30}$$

$$= \frac{11,596}{11,654.163}$$

$$= 0.995$$

ઉદાહરણ - 4 જો  $x$  અને  $y$ નું સહવિચરણ = 1780,  $x$ નું પ્રમાણિત વિચલન = 45 અને  $y$ નું પ્રમાણિત વિચલન = 40 હોય તો સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

જવાબ : સહસંબંધાંક  $r = \frac{Cov.(x,y)}{S_x S_y}$

$x$  અને  $y$  વચ્ચેનું સહવિચરણ =  $Cov(x, y) = 1780$   $x$ નું પ્ર. વિ. =  $S_x = 45$ ,  $y$ નું પ્ર. વિ. = 40

$$r = \frac{1780}{45 \times 40}$$

$$= \frac{1780}{1800}$$

$$= 0.99$$

ઉદાહરણ-5 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો અને તે ઉપરથી નિર્ણાયકતાનો આંક શોધો.

$$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 150, n = 5, S_x = 5.45 \text{ અને } S_y = 5.8$$

જવાબ :

$$\text{સહસંબંધાંક } r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n.S_x.S_y}$$

$$= \frac{150}{5 \times 5.45 \times 5.8}$$

$$= \frac{150}{158.05}$$

$$= 0.95$$

$$\text{નિર્ણાયકતાનો આંક} = R^2 = r^2 = (0.95)^2 = 0.9025$$

ઉદાહરણ-6 નીચે આપેલા પરિણામોની મદદથી સહસંબંધાંક શોધો.

$$\text{શ્રેણી } x \text{ નો મધ્યક} = 9.5$$

$$\text{શ્રેણી } y \text{ નો મધ્યક} = 13.8$$

$$\text{શ્રેણી } x \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન} = 4.5$$

$$\text{શ્રેણી } y \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન} = 3.5$$

$$n = 10 \quad \Sigma xy = 1450$$

જવાબ :  $\bar{x} = 9.5, \bar{y} = 13.8, S_x = 4.5, S_y = 3.5, n = 10$  અને  $\Sigma xy = 1450$

$$\begin{aligned}
\text{સહસંબંધાંક } r &= \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}}{n.Sx.Sy} \\
&= \frac{(1450) - (10 \times 9.5 \times 13.8)}{10 \times 4.5 \times 3.5} \\
&= \frac{1450 - 1311}{157.5} \\
&= \frac{139}{157.5} \\
&= 0.88
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ-7 નીચે આપેલી મહિતી ઉપરથી  $x$  અને  $y$  વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y$	3	4	6	2	4	3	2	1

જવાબ : નોંધ : અહીં  $x$  અને  $y$  ની કિંમત ખૂબ નાની છે. તેથી ગુણાકાર સરળતાથી કરી શકાય તેથી નીચેનું સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સહસંબંધાંક શોધીશું.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \times \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

	$x$	$y$	$x^2$	$y^2$	$xy$
	1	3	1	9	3
	2	4	4	16	8
	3	6	9	36	18
	4	2	16	4	8
	5	4	25	16	20
	6	3	36	9	18
	7	2	49	4	14
	8	1	64	1	8
કુલ	36	25	204	95	97

$$n = 8, \Sigma x = 36, \Sigma y = 25, \Sigma x^2 = 204, \Sigma y^2 = 95, \Sigma xy = 97$$

$$\begin{aligned}
\text{સહ સંબંધાંક} &= \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \times \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}} \\
&= \frac{8(97) - (36)(25)}{\sqrt{8(204) - (36)^2} \times \sqrt{8(95) - (25)^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{776-900}{\sqrt{1632-1296} \times \sqrt{760-625}} \\
&= \frac{-124}{\sqrt{336} \times \sqrt{135}} \\
&= \frac{124}{18.33 \times 11.62} \\
&= \frac{124}{213} \\
&= -0.58
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ - 8 નીચે આપેલ મહિતી ઉપરથી અવલોકનોના જોડકાંઓની સંખ્યા શોધો.

$$\text{સહસંબંધાંક} = 0.5$$

$$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 135$$

$$x\text{નું પ્ર. વિ.} = 9$$

$$\Sigma(y-\bar{y})^2 = 90$$

$$\text{જવાબ : સહ સંબંધાંક } r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n.Sx.Sy}$$

$$0.5 = \frac{135}{n.9.Sy}$$

$$n.Sy = \frac{135}{0.5 \times 9}$$

$$n.Sy = \frac{135}{4.5}$$

$$n.Sy = 30 \dots\dots (I)$$

$$Sy = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}} \text{ જે સમીકરણ (I) માં મુક્ત}$$

$$n = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}} = 30$$

બંને બાજુ વર્ગ કરતા

$$n^2 = \sqrt{\frac{(\Sigma(y-\bar{y})^2)^2}{n}} = (30)^2$$

$$n^2 \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n} = 900$$

$$n \Sigma(y-\bar{y})^2 = 900$$

$$n (90) = 900$$

$$n = \frac{900}{90} = 10$$

ઉદાહરણ-9 બે ચલો  $x$  અને  $y$  વચ્ચેનો સહસંબંધાંક = 0.6 છે. અને તેમની વચ્ચેનું સહ વિચરણ = 140 છે જો  $y$  નું પ્ર. વિ = 18 હોયતો  $x$ નું પ્ર.વિ. શોધો.

જવાબ :  $r = 0.6$   $Cov(x, y) = 140$   $S_y = 18$   $S_x =$  શોધવાનું છે.

$$\text{સહસંબંધક } r = \frac{Cov.(x,y)}{S_x S_y}$$

$$0.6 = \frac{140}{S_x \times 18}$$

$$S_x = \frac{140}{0.6 \times 18}$$

$$= \frac{140}{10.8}$$

$$= 12.96$$

ઉદાહરણ - 10 એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે નીચેની માહિતી મળે છે. તે ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

$$n = 10, x \text{નો ધારેલો મધ્યક} = 40,$$

$$y \text{નો ધારેલો મધ્યક} = 30$$

$$x \text{ ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો} = -168$$

$$y \text{ ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોનો સરવાળો} = -19$$

$$x \text{ ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો} = 8200$$

$$y \text{ ના ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો} = 2300$$

$$x \text{ અને } y \text{ ના ધારેલાં મધ્યકોમાંથી લીધેલાં વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો} = 3420$$

જવાબ :

$$n = 10, A = 40, B = 30, \Sigma u = \Sigma(x - A) = -168$$

$$\Sigma v = \Sigma(y - B) = -19, \Sigma u^2 = \Sigma(x - A)^2 = 8200$$

$$\Sigma v^2 = \Sigma(y - B)^2 = 2300 \quad \Sigma uv = \Sigma(x - A)(y - B) = 3420$$

$$\begin{aligned}
\text{સહસંબંધાંક } r &= \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \cdot \Sigma v}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}} \\
&= \frac{10(3420) - (-168)(-19)}{\sqrt{10(8200) - (-168)^2} \times \sqrt{10(2300) - (-19)^2}} \\
&= \frac{34200 - 3192}{\sqrt{82,000 - 28,224} \times \sqrt{23,000 - 361}} \\
&= \frac{31,008}{\sqrt{53,776} \times \sqrt{22,639}} \\
&= \frac{31,008}{34,891.67} \\
&= 0.89
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ-11 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$$\Sigma x = 150 \quad \Sigma y = 140, \quad \Sigma (x - 15)^2 = 180 \quad \Sigma (y - 10)^2 = 215, \quad \Sigma (x - 15)(y - 10) = 60, \quad n = 10$$

જવાબ :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{150}{10} = 15$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{140}{10} = 14$$

અહીં  $\Sigma (x - 15)^2 = 180$  અને  $\Sigma (y - 10)^2 = 215$  છે.

પરંતુ  $\bar{y} = 14$  છે. જ્યારે  $\Sigma (y - 10)^2 = 215$  છે. એટલે કે અહીં  $(y - B)^2 = 215$  આપેલ છે. તેથી  $B =$  ધારેલો મધ્યક  $= 10$  છે.

$$\text{હવે } \bar{y} = B + \frac{\Sigma v}{n}$$

$$14 = 10 + \frac{\Sigma v}{10}$$

$$14 - 10 = \frac{\Sigma v}{10}$$

$$4 \times 10 = \Sigma v$$

$$\therefore \Sigma v = 40 \text{ હોય તો } \Sigma u = 0 \text{ થાય } \Sigma u^2 = 180, \Sigma v^2 = 215, \Sigma uv = 60, n = 10$$

$$\begin{aligned}
\text{સહસંબંધાંક } r &= \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}} \\
&= \frac{10(60) - (0)(40)}{\sqrt{10(180) - (0)^2} \times \sqrt{10(215) - (40)^2}} \\
&= \frac{600}{\sqrt{1800} \times \sqrt{2150 - 1600}} \\
&= \frac{600}{42.43 \times 23.45} \\
&= \frac{600}{994.98} \\
&= 0.60
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ - 12 બે સંબંધિત ચલ  $x$  અને  $y$  માટે નીચેના પરિણામો મળ્યા હતા.

$$n = 20, \Sigma x = 100, \Sigma y = 80, \Sigma x^2 = 600$$

$\Sigma y^2 = 550$   $\Sigma xy = 500$  પાછળથી એવું જાણવા મળ્યું કે માહિતીમાં બે જોડકાં (6, 8) અને (8, 12) ને બદલે (8, 6) અને (6, 14) લેવાય ગયા છે. તો સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત શોધો.

જવાબ : અહીં માહિતીમાં ભૂલ છે તેથી બે જોડકાં (6, 8) અને (8, 12) ને બદલે (8, 6) અને (6, 14)

લેવાય ગયા છે. તેથી સાચા જોડકાં ઉમેરાશે જે  $\begin{pmatrix} x & y \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$  અને  $\begin{pmatrix} x & y \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$  છે, ખોટા જોડકાં બાદ થશે જે  $\begin{pmatrix} x & y \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

અને  $\begin{pmatrix} x & y \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$  છે. તેથી દબલામાં આપેલ તમામ પરિણામો સુધારી નવા સુધારેલ પરિણામોને આધારે સહસંબંધાંક

શોધીશું

સુધારેલ  $\Sigma x =$  ખોટો  $\Sigma x +$  સાચી  $x$  ની કિંમતો  $- x$  ની ખોટી કિંમતો

$$= 100 + \begin{pmatrix} x & x \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & x \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 100 + 14 - 14$$

$$= 100$$

સુધારેલ  $\Sigma y =$  ખોટો  $\Sigma y + y$  ની સાચી કિંમતો  $- y$  ની ખોટી કિંમતો

$$= 80 + (8 + 12) - (6 + 14)$$

$$= 80 + 20 - 20$$

$$= 80$$

સુધારેલ  $\Sigma x^2 =$  ખોટો  $\Sigma x^2 + x^2$  ની સાચી કિંમતો  $- x^2$  ની ખોટી કિંમતો

$$= 600 + (6^2 + 8^2) - (8^2 + 6^2)$$

$$= 600 + (36 + 64) - (64 + 36)$$

$$= 600 + 100 - 100$$

$$= 600$$

સુધારેલ  $\Sigma y^2 =$  ખોટો  $\Sigma y^2 + y^2$ ની સાચી કિંમત  $- y^2$ ની ખોટી કિંમત

$$= 550 + (8^2 + 12^2) - (6^2 + 14^2)$$

$$= 550 + (64 + 144) - (36 + 196)$$

$$= 550 + 208 - 232$$

$$= 526$$

સુધારેલ  $\Sigma xy =$  ખોટો  $\Sigma xy + xy$ ની સાચી કિંમત  $- xy$ ની ખોટી કિંમતો

$$= 500 + [(6 \times 8) + (8 \times 12)] - [(8 \times 6) + (6 \times 14)]$$

$$= 500 + [48 + 96] - [48 + 84]$$

$$= 500 + 144 - 132$$

$$= 512$$

$$\begin{aligned} \text{સહ સંબંધાંક } r &= \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \times \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}} \\ &= \frac{20(512) - (100)(80)}{\sqrt{20(600) - (100)^2} \times \sqrt{20(526) - (80)^2}} \\ &= \frac{10,240 - 8000}{\sqrt{12,000 - 10,000} \times \sqrt{10520 - 6400}} \\ &= \frac{2240}{\sqrt{2000} \times \sqrt{4120}} \\ &= \frac{2240}{44.72 \times 64.19} \\ &= \frac{2240}{2871} \\ &= 0.78 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ-13** જો  $x$  અને  $y$  મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનો હોય તો નીચેની માહિતી પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$$n = 10, Sx = 20, Sy = 2.6, \Sigma xy = 400$$

**જવાબ :** અહીં  $x$  અને  $y$  મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનો છે તેથી  $x = x - \bar{x}$  અને  $y = y - \bar{y}$  થશે

$$\text{તેથી } \Sigma xy (x - \bar{x}) (y - \bar{y}) = 400$$

$$\begin{aligned}
\text{જવાબ : સહ સંબંધાંક } r &= \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{nS_x.S_y} \\
&= \frac{400}{10 \times 20 \times 2.6} \\
&= \frac{400}{520} \\
&= 0.77
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ : 14** એક સમજિમાંથી લેવામાં આવેલાં 25 અવલોકનોની જોડ માટે સહસંબંધાંક 0.8 મળે છે. તો સંભવિત દોષ શોધી તેનું અર્થઘટન કરી સમજિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ શોધો.

$$\text{જવાબ : } n = 25 \quad r = 0.8$$

$$\begin{aligned}
\text{સંભવિત દોષ (P.E)} &= \frac{0.6745(1-r^2)}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{0.6745[1-(0.8)^2]}{\sqrt{25}} \\
&= \frac{0.6745 [1 - 0.64]}{5} \\
&= \frac{0.6745(0.36)}{5} \\
&= \frac{0.24282}{5} \\
&= 0.049
\end{aligned}$$

સમજિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ

$$= r \pm \text{P.E.}$$

$$r - \text{P.E} = 0.8 - 0.049 = 0.751$$

$$r + \text{P.E} = 0.8 + 0.049 = 0.849$$

આ સમજિના સહસંબંધાંકની સીમા 0.751થી 0.849 વચ્ચે હોવી જોઈએ.

**અર્થઘટન :**

$$r = 0.8$$

$$6. \text{ P. E.} = 6 (0.049) = 0.291$$

$\therefore r > 6. \text{ P. E}$  થાય છે તેથી બે ચલ વચ્ચે સાર્થક સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

**ઉદાહરણ : 15** જો એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે સહસંબંધાંક 0.8 હોય અને સંભવિત દોષ 0.04 હોય તો  $n$  ની કિંમત શોધો.

$$\text{જવાબ : } r = 0.8, \text{ P.E} = 0.04$$

$$P.E = \frac{0.6745(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{0.6745(1-0.8^2)}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{0.6745(1-0.64)}{0.04}$$

$$\sqrt{n} = \frac{0.6745(0.36)}{0.04}$$

$$\sqrt{n} = \frac{0.24}{0.04}$$

$$\sqrt{n} = 6$$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં

$$n = 36$$

ઉદાહરણ : 16 એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે  $r = 0.8$  અને સંભવિત દોષ = 0.06 હોય તો તે બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સાર્થક છે કે અસાર્થક તે જણાવી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ શોધો.

$$\text{જવાબ : } r = 0.8 \quad P.E = 0.06$$

$$\therefore 6 \text{ PE} \quad 6 (0.06) = 0.36$$

$\therefore r > 6 \text{ PE}$  થાય છે તેથી બે ચલ વચ્ચે સાર્થક સહસંબંધ છે એમ કહેવાય.

સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ

$$r - P.E = 0.8 - 0.06 = 0.74$$

$$r + P.E = 0.8 + 0.06 = 0.86$$

સીમાઓ : 0.74 થી 0.86ની વચ્ચે છે.

(17) BAOU યુનિવર્સિટીના 25 વિદ્યાર્થીઓએ અર્થશાસ્ત્ર અને આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલા ગુણોના આવૃત્તિ વિતરણ માટે સહસંબંધક (સહસંબંધ ગુણક) શોધો.

અર્થશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ	આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ		
	5-15	15-25	25-35
0-10	2	-	6
10-20	8	-	4
20-30	-	-	-
30-40	-	3	-
40-50	-	2	-

જવાબ : ધારો કે આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ =  $x$  અને અર્થશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ =  $y$

$x \rightarrow$ $y \downarrow$	5-15	15-25	25-35	કુલ $fv$	મ.કિં $y$	$v$	$vf_v$	$v^2fv$	$fuv$
0-10	④ 2	—	① - 12 6	8	5	- 2	- 16	32	- 8
10-20	⑧ 8	—	① - 4 4	12	15	- 1	- 12	12	4
20-30	— —	—	—	0	25 B	0	0	0	0
30-40	—	① 0 3	—	3	35	1	3	3	0
40-50	—	① 0 2	—	2	45	2	4	8	0
કુલ = $fu$	10	5	10	25 = $n$	—	—	- 21	55	- 4
મ.કિ. $x$	10	20 = A	30	—					
$u$	- 1	0	1	—					
$ufu$	- 10	0	10	0					
$u^2fu$	10	0	10	20					
$fuv$	12	0	- 16	- 4					

સમજૂતી :

(1)  $x$  અને  $y$ ની આપેલી આવૃત્તિઓનો સરવાળો કરો.

(આડા સરવાળાને  $f_v$  ઊભા સરવાળાને  $f_u$  કરો)

(2)  $x$  ની મૂ. કિ. શોધો.  $\left(\frac{5+15}{2}=10, \frac{15+25}{2}=20, \frac{25+35}{2}=30\right)$

(3) આડા અને ઊભા સરવાળાના સરવાળાને  $n$  કહો. ( $n = 25$ )

(4)  $y$  ની મ.કિ. શોધો.  $\left(\frac{0+10}{2}=5, \frac{10+20}{2}=15, \dots$  તેવી જ રીતે 25, 35 અને 45)

(5)  $x$ ની મ. કિ. માંથી વચ્ચેની કિંમત (જે 20 છે.) તેને A ધારો એટલે કે  $A = 20$

(6)  $y$ ની મ. કિ. માંથી વચ્ચેની કિંમત (જે 25 છે.) તેને B ધારો એટલે કે  $B = 25$

(7)  $y = \frac{x-A}{i_x}$  શોધો. જ્યાં  $i_x = x$  ની વર્ગ લંબાઈ

(જે  $15 - 5 = 10, 25 - 15 = 10, \dots$ )  $\therefore i_x = 10$  અને

$$u = \frac{10-20}{10} = \frac{-10}{10} = -1, \frac{20-20}{10} = 0, \frac{30-20}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

(8)  $v = \frac{y-B}{i_y}$  શોધો. જ્યાં  $i_y = y$ ની વર્ગ લંબાઈ

(જે  $10 - 0, 10, 20 - 10, \dots$ )  $\therefore i_y = 10$  અને

$$v = \frac{5-25}{10} = \frac{-20}{10} = -2, \frac{15-25}{10} = \frac{-10}{10}, \frac{25-25}{10} = 0$$
 તેવી જ રીતે 1, 2 શોધો)

(9)  $u$  અને  $fu$ નો ગુણાકાર કરો.

$$(-1 \times 10 = -10, 0 \times 5 = 0, 1 \times 10 = 10)$$

(10)  $v$  અને  $fv$ નો ગુણાકાર કરો.

$$(-2 \times 8 = 16, -1 \times 12 = -12, 0 \times 0 = 0, 1 \times 3 = 3, 2 \times 2 = 4)$$

(11)  $u^2fu = u \times ufu$

$$(-1 \times 10 = -10, 0 \times 0 = 0, 1 \times 10 = 10)$$

(12)  $v^2fv = v \times vfv$

$$[-2 \times (-16)] = 32, [-1 \times (-12)] = 12 \text{ તેવી જ રીતે } 0, 3, 8 \text{ મેળવો.}$$

(13)  $f \times u \times v$  નો ગુણાકાર કરો.

$f =$  દાખલામાં આપેલી આવૃત્તિઓ પ્રથમ આવૃત્તિ 2 છે તેની ઊભી અને આડી બાજુ  $u$ ના ખાનામાં  $-1$  અને  $v$  ના ખાનામાં  $-2$  છે. તેથી  $2 \times (-1) \times (-2) = 4$  જે 2ની બાજુમાં રઉન્ડ કરી લખો. (○)

તેવી જ રીતે આવૃત્તિ ( $f$ )  $\times u \times v$

$$6 \times 1 \times (-2) = -12$$

$$8 \times (-1) \times (-1) = 8$$

$$4 \times 1 \times (-1) = -4$$

$$3 \times 0 \times 1 = 0$$

$$2 \times 0 \times 2 = 0$$

(14) રાઉન્ડમાં શોધેલ સંખ્યાઓનો આડો અને ઊભો સરવાળો કરો અને તેને  $fu$ ના ખાનામાં જે તે જગ્યાએ લખો.

$$\text{આડો સરવાળો } 4 - 12 = -8, 8 - 4 = 4, 0, 0, 0$$

$$\text{ઊભો સરવાળો : } 4 + 8 = 12, 0, -12 - 4 = -16$$

(15) શોધેલ સરવાળાનો આડો અને ઊભો સરવાળો કરી તેને  $\Sigma fu$  કરો. ( $\Sigma fu = -4$ )

(16)  $ufu, u^2fu$ નો પણ સરવાળો કરી તેને અનુક્રમે  $\Sigma ufu$  અને  $\Sigma u^2fu$  કહો. ( $\Sigma ufu = 0$  અને  $\Sigma u^2fu = 20$ )

(17)  $vfv, v^2fv$  નો પણ સરવાળો કરી તેને અનુક્રમે  $\Sigma vfv$  અને  $\Sigma v^2fv$  કહો.

$$(\Sigma vfu = -21, \Sigma v^2fv = 55)$$

(18) નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સહસંબંધાંક શોધો.

$$\begin{aligned} r &= \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{\sqrt{n\Sigma u^2fv - (\Sigma ufu)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2fv - (\Sigma vfv)^2}} \\ &= \frac{25(-4) - (0)(-21)}{\sqrt{25(20) - (0)^2} \times \sqrt{25(55) - (-21)^2}} \\ &= \frac{-100}{\sqrt{500} \times \sqrt{1375 - 441}} \end{aligned}$$

$$= \frac{-100}{\sqrt{500} \times \sqrt{934}}$$

$$= \frac{-100}{22.36 \times 30.56}$$

$$= \frac{-100}{683.32}$$

$$= -0.146$$

ઉદાહરણ : 18 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

y	x		
	0-10	10-20	20-30
5	2	6	—
15	9	4	5
25	—	—	4

જવાબ :

y	x			fv	y	v	vfv	v <sup>2</sup> fv	fuv
	0-10	10-20	20-30						
5	② 2	⑥ 6	—	8	5	— 1	— 8	8	2
15	⑨ 9	④ 4	⑤ 5	18	15 B	0	0	0	0
25	—	—	④ 4	4	25	1	4	4	4
કુલ fu	11	10	9	30 = n	—	—	— 4	12	6
મ.કિ. x	5	15 A	25	—					
fu	— 1	0	1	—					
ufu	— 11	0	9	— 2					
u <sup>2</sup> fu	11	0	9	20					
fuv	2	0	4	6					

નોંધ : u ની મ. કિ.  $\frac{0+10}{2} = 5$ , તેવીજ રીતે 15, 25

v ની મ.કિ. એની એજ કિંમતો લખશે. 5, 15, 25

$$i_x = 10 \quad i_y = 10$$

$$u = \frac{x-A}{i_x}, \quad v = \frac{y-B}{i_y}$$

$$n = 30$$

$$\Sigma ufu = -2$$

$$\Sigma u^2 fu = 20$$

$$\Sigma vfv = -4$$

$$\Sigma v^2 fv = 12$$

$$\Sigma fuv = 6$$

$$\begin{aligned} \text{સહસંબંધક } r &= \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{\sqrt{n\Sigma u^2 fv - (\Sigma ufu)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 fv - (\Sigma vfv)^2}} \\ &= \frac{30(6) - (-2)(-4)}{\sqrt{30(20) - (-2)^2} \times \sqrt{30(12) - (-4)^2}} \\ &= \frac{180 - 8}{\sqrt{600 - 4} \times \sqrt{360 - 16}} \\ &= \frac{172}{\sqrt{596} \times \sqrt{344}} \\ &= \frac{172}{24.41 \times 18.55} \\ &= \frac{172}{452.80} = -0.38 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ : 19 નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધક શોધો.

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	10-25	25-40	40-50
20-40	—	4	—
40-60	5	—	1
60-80	3	8	4

જવાબ :

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	10-25	25-40	40-50	કુલ $fu$	મ.કિ. $x$	$u$	$ufu$	$u^2 fu$	$fuv$
20-40	—	④4	—	4	30	-1	-4	4	0
40-60	⑤5	—	①1	6	A 50	0	0	0	0
60-80	③3	⑧8	④4	15	70	1	15	15	1
કુલ $fv$	8	12	5	25 = $n$	—	—	11	19	1
મ.કિ. $y$	17.5	32.5	47.5						
$v$	-1	0	1	—					
$vfv$	8	0	5	13					
$v^2 fv$	-8	0	5	-3					
$fuv$	-3	0	4	1					

$$\begin{aligned}
\text{સહસંબંધાંક } r &= \frac{n\Sigma fuv - (\Sigma ufu)(\Sigma vfv)}{\sqrt{n\Sigma u^2 fv - (\Sigma ufu)^2} \times \sqrt{n\Sigma v^2 fv - (\Sigma vfv)^2}} \\
&= \frac{25(1) - (11)(13)}{\sqrt{25(19) - (11)^2} \times \sqrt{25(-3) - (13)^2}} \\
&= \frac{25 - 143}{\sqrt{475 - 121} \times \sqrt{-75 - 169}} \\
&= \frac{-118}{\sqrt{354} \sqrt{-244}} \\
&= \frac{-118}{(18.81)(-15.62)} \\
&= \frac{118}{293.81} \\
&= 0.40
\end{aligned}$$

### સ્વાધ્યાય

#### (A) પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

1. સહસંબંધાંક એટલે શું ?
2. સહસંબંધાંકના પ્રકારો વિસ્તારપૂર્વક સમજાવો.
3. કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકના સૂત્રો જણાવો.
4. સહસંબંધાંક એટલે શું ?
5. સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન લખો.
6.  $r = 1$ ,  $r = -1$ ,  $r = 0$ નું અર્થઘટન કરો.
7. સહસંબંધકનો અભાવ એટલે શું ?
8. કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધ શોધતી વખતે  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$ ની કિંમત પૂર્ણાંકમાં આવે તો કયુ સૂત્ર વાપરવુ યોગ્ય છે ?
9. કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધ શોધતી વખતે  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$ ની કિંમત અપૂર્ણાંકમાં આવે તો કયુ સૂત્ર વાપરવુ યોગ્ય છે ?
10. દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની રીતે સહસંબંધાંક શોધવાની રીત સમજાવો.

(B) દાખલા ગણો.

(1) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

ભાવ (રૂ. માં)	6	7	9	12	16
માંગ (હજારમાં એકમમાં)	11	12	17	16	19

(જવાબ :  $n = 5$ ,  $\bar{x} = 10$ ,  $\bar{y} = 15$ ,  $r = 0.89$ )

(2) પતિ અને પત્નીની ઉંમર અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે તો તેના ઉપરથી પતિ અને પત્ની વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

પતિની ઉંમર	25	26	28	30	45
પત્નીની ઉંમર	19	22	26	28	42

(જવાબ :  $n = 5$ ,  $\bar{x} = 30.8$ ,  $A = 31$ ,  $\bar{y} = 27.4$ ,  $B = 27$  સહસંબંધાંક  $r = 0.98$ )

(3) નીચેની માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$x$	25	30	33	41	67
$y$	20	28	32	40	65

(જવાબ :  $n = 5$ ,  $\bar{x} = 39.2$ ,  $A = 39$ ,  $\bar{y} = 37$ ,  $B = 37$ ,  $r = 0.99$ )

(4) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

$x$	44	45	51	54	69	72	75	80
$y$	40	42	48	51	68	71	70	76

(જવાબ :  $n = 8$ ,  $\bar{x} = 61.25$ ,  $A = 61$ ,  $\bar{y} = 58.25$ ,  $B = 58$ ,  $r = 0.99$ )

(5) નીચેની માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$x$	2	2	3	4	4	5	7	8
$y$	3	2	4	2	4	2	2	2

(જવાબ :  $n = 8$ ,  $\Sigma x = 35$ ,  $\Sigma y = 21$ ,  $\Sigma x^2 = 187$ ,  $\Sigma y^2 = 61$ ,  $\Sigma xy = 86$ ,  $r = -0.41$ )

(6) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો અને તેના ઉપરથી નિર્ણયાક્રતાનો આંક શોધો.

$$n = 10, \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 155 \quad S_x = 4.4 \quad S_y = 5.2$$

(જવાબ :  $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n S_x S_y}$  નો ઉપયોગ કરતા  $r = 0.67$ )  $R^2 = 0.4489$

(7) નીચે આપેલા પરિણામોની મદદથી સહસંબંધાંક શોધો.

$$\text{શ્રેણી } x \text{નો મધ્યક} = 8.2$$

$$\text{શ્રેણી } y \text{નો મધ્યક} = 12.1$$

$$\text{શ્રેણી } x \text{નું પ્રમાણિત વિચલન} = 4.5$$

$$\text{શ્રેણી } y \text{નું પ્રમાણિત વિચલન} = 3.5$$

$$n = 10 \quad \Sigma xy = 980$$

(જવાબ :  $r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}}{nS_xS_y}$ ,  $r = 0.61$ )

(8) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી અવલોકનોના જોડકાની સંખ્યા શોધો.

$r = 0.5$ ,  $\Sigma xy = 120$ ,  $\Sigma x^2 = 90$ ,  $S_y = 8$  જ્યાં  $x$  અને  $y$ ના મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનો છે.

**જવાબ :** અહીં  $x$  અને  $y$  મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનો છે. તેથી  $\Sigma xy = \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$  એટલે

$x = (x-\bar{x})$ ,  $y = (y-\bar{y})$  થશે. હવે

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n S_x S_y} \text{ નો ઉપયોગ કરતા } n = 10$$

(9) બે ચલો  $x$  અને  $y$  વચ્ચેનો સહસંબંધક  $= 0.7$  છે અને તેમની વચ્ચેનું સહવિચરણ  $= 120$  છે. જો  $y$ નું પ્ર.વિ.  $= 20$  હોય તો  $x$ નું પ્ર.વિ. શોધો.

(જવાબ :  $S_x = 12.96$ )

(10) એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે નીચેની માહિતી મળે છે તે ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનો સહસંબંધક શોધો.

	$x$	$y$
ધારેલો મધ્યક	40	30
ધારેલા મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો	170	20
ધારેલ મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	8100	2280
$x$ અને $y$ ના ધારેલા મધ્યકોમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારનો સરવાળો	3400	
જોડકાની સંખ્યા $= 8$		

(જવાબ :  $r = 0.94$ )

(11) દશ જોડકાં માટે નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધક શોધો.

$$\Sigma x = 140 \quad \Sigma y = 150$$

$$\Sigma (x - 10)^2 = 180, \quad \Sigma (y - 15)^2 = 215$$

$$\Sigma (x - 10)(y - 15) = 60$$

(જવાબ :  $r = 0.91$ )

(12) 15 જોડકાં માટે નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી સહસંબંધક શોધો.

$$\bar{x} = 25 \quad \bar{y} = 18$$

$$\Sigma (x - 25) = 136, \quad \Sigma (y - 18) = 138 \quad \Sigma (x - 25) \Sigma (y - 18) = 112$$

(જવાબ :  $r = 0.8$ )

(13) બે સંબંધિત ચલ  $x$  અને  $y$  માટે નીચેના પરિણામો મળ્યાં હતાં.

$n = 25$ ,  $\Sigma x = 110$ ,  $\Sigma y = 95$ ,  $x^2 = 650$ ,  $\Sigma y^2 = 460$ ,  $\Sigma xy = 508$  પરંતુ પાછળથી એવું જાણવા મળ્યું કે માહિતીમાં બે જોડકાં (8, 12) અને (6, 8) ને બદલે ભુલથી (6, 14) અને (8, 6) લેવામાં આવ્યાં હતાં તો સહસંબંધકની સાચી કિંમત મેળવો.

(જવાબ :  $r = 0.67$ )

(14) બે સંબંધિત ચલ  $x$  અને  $y$  માટે નીચેનાં પરિણામો મળ્યા છે તો તે ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

	$x$	$y$
પ્રાપ્તકોની સંખ્યા	8	8
મધ્યકો	51	34
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	42	60
મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના ગુણાકારનો સરવાળો = - 16		

(જવાબ :  $r = - 0.32$ )

(15) એક સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવેલા 16 અવલોકનોની જોડ માટે સહસંબંધક 0.72 મળે છે. તો તેનો સંભવિત દોષ શોધી તેનું અર્થઘટન કરો. ઉપરાંત સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ શોધો.

(જવાબ : P.E. = 0.081, સીમાઓ 0.639 થી 0.801, અર્થઘટન :  $r > 6$  P.E. સાર્થક)

(16) જો એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે સહસંબંધાંક = 0.8 હોય અને સંભવિત દોષ 0.06 હોય તો  $n$  ની કિંમત શોધો. (જવાબ :  $n = 4$ )

(17) જો એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે સહ સંબંધાંક = 0.5 હોય અને સંભવિત દોષ 0.125 હોય તો  $n$  ની કિંમત શોધો. (જવાબ :  $n = 9$ )

(18) એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે  $r = 0.6$  અને સંભવિત દોષ = 0.05 હોયતો બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સાર્થક છે કે અસાર્થક તે જણાવી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમાઓ શોધો.

(જવાબ : 6.P.E. = 0.3,  $r > 6$  P.E., સાર્થક 0.55 થી 0.65)

(19) એક દ્વિચલ નિદર્શ માટે  $r = 0.8$ , P.E. = 0.06 હોય તો  $n$  ની કિંમત શોધો.

(જવાબ :  $n = 16$ )

(20) નીચે આપેલ દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની મદદથી સહસંબંધાંક શોધો.

ગણિતના ગુણ $y$	ગુજરાતીના ગુણ		
	20-25	25-30	30-35
4	22	—	—
8	16	12	4
12	—	10	6
16	—	6	4

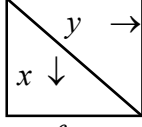
(જવાબ :  $r = 0.69$ )

(21) નીચે આપેલ દ્વિ-ચલ કોષ્ટકની મદદથી સહસંબંધાંક શોધો.

પત્નીની ઉંમર ( $x$ )	પતિની ઉંમર ( $y$ )		
	25-30	30-35	35-40
20-24	18	28	—
24-28	12	22	6
28-32	—	—	14

[ Hint (જવાબ :  $r = 0.58$ )

આડી હારમાં  $x$  છે તેથી  $f_u, x, u, ufu, u^2fu, fuv$  આડા આવશે ઊભી સંખ્યામાં  $y$  છે તેથી  $f_u, x, u, ufu, u^2fu, fuv$



$fv$   
 $v$   
 $vf$   
 $v^2f$   
 $fuv$

ઊભી આવશે.

### 11.13 સ્પિયરમેન ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીતના દાખલા :

(1) નીચે આપેલ માહિતી માટે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

$x$	38	58	22	67	44	35	46	52	17	62
$y$	5.2	37	72	27	60	77	62	47	82	30

જવાબ :

$x$	$y$	$r_x$ = $x$ નો ક્રમ	$r_y$ = $y$ નો ક્રમ	તફાવત $d = r_x - r_y$	$d^2$
38	52	7	6	1	1
58	37	3	8	- 5	25
22	72	9	3	6	36
67	27	1	10	- 9	81
44	60	6	5	1	1
35	77	8	2	6	36
46	62	5	4	1	1
52	47	4	7	- 3	9
17	82	10	1	9	81
62	30	2	9	- 7	49
				કુલ	$320 = \Sigma d^2$

સમજૂતી :  $r_x \Rightarrow x$  માં સૌથી મોટી રકમ 67 ને 1 નંબર, તેથી નાની 62 ને 2 નંબર, તેથી નાની 58 ને 3 નંબર તેથી નાની 52 ને 4 તેવી જ રીતે 1 થી 10 સુધી નંબર લખો.

$r_y \Rightarrow y$  માં સૌથી મોટી રકમ 82 ને 1 નંબર, તેથી નાની 77ને 2 નંબર, તેથી નાની 72 ને 3 નંબર, તેથી નાની 62 ને 4 નંબર તેવી જ રીતે 1 થી 10 સુધી નંબર લખો.

તફાવત =  $d \Rightarrow$  હવે  $d = r_x - r_y$  શોધો એટલે કે  $r_x$ ની કિંમતમાંથી  $r_y$ ની કિંમત બાદ કરી  $d$  વાળો સ્તંભ તૈયાર કરો.

$d^2 \Rightarrow$  હવે  $d^2$  ની દરેક કિંમતનો વર્ગ કરો.

$\Sigma d^2 \Rightarrow d^2$ ની દરેક કિંમતનો સરવાળો કરો.  $n = 10$  જોડકાની સંખ્યા

$$\begin{aligned}
\text{ક્રમાંક સહસંબંધાંક } r &= 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)} \\
&= 1 - \frac{6(320)}{10(10^2 - 1)} \\
&= 1 - \frac{1920}{10(100 - 1)} \\
&= 1 - \frac{1920}{10 \times 99} \\
&= 1 - \frac{1920}{990} \\
&= 1 - 1.94 \\
&= -0.94
\end{aligned}$$

- (2) BAOU યુનિ.ના Semester-6માં ભણતા વિદ્યાર્થીઓ એ આંકડાશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણોના ક્રમ નીચે કૌંસમાં આપવામાં આવેલ છે તો તે ઉપરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.  
(1, 4), (8, 9), (6, 5), (7, 6), (5, 8), (9, 1), (10, 3), (4, 2), (3, 7),  
(2, 10)

જવાબ: (અહીં ક્રમ નંબર આપેલા છે તેથી ક્રમ આપવાની જરૂર નથી. આંકડાશાસ્ત્રના ક્રમ નંબરને  $r_x$  અને અર્થશાસ્ત્રના ક્રમ નંબર ને  $r_y$  ધારીશું. ( $n = 10$ ))

$r_x$ xના ક્રમ	$r_y$ yના ક્રમ	તફાવત $d = r_x - r_y$	$d^2$
1	4	-3	9
8	9	-1	1
6	5	1	1
7	6	1	1
5	8	-3	9
9	1	8	64
10	3	7	49
4	2	2	4
3	7	-4	16
2	10	-8	64
			218

$$\begin{aligned}
\text{ક્રમાંક સહસંબંધાંક } r &= 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)} \\
&= 1 - \frac{6(218)}{10(10^2-1)} \\
&= 1 - \frac{1308}{10(10^2-1)} \\
&= 1 - \frac{1308}{10(99)} \\
&= 1 - \frac{1308}{990} \\
&= 1 - 1.32 \\
&= -0.32
\end{aligned}$$

(3) નીચે આપેલી માહિતી ઉપરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

$x$	32	-40	-20	0	-24	40	32	36	-24	-4
$y$	12	20	0	4	4	-16	-20	-32	20	4

જવાબ : અહીં અમુક રકમ માર્દનસમાં આપેલી છે તેથી ક્રમ આપતી વખતે નીચે મુજબ ધ્યાન રાખવું.

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---

સમજૂતી : ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ અહીં સૌથી મોટી કિંમત 5 છે અને સૌથી નાની કિંમત -5 છે. એટલે કે જેમ જેમ ડાબી બાજુ જઈશું તેમ તેમ કિંમત નાની થતી જાય છે.

$x$	$y$	$r_x$ $x$ નો ક્રમ	$r_y$ $y$ નો ક્રમ	તફાવત $d = r_x - r_y$	$d^2$
32	12	3.5	3	0.5	0.25
-40	20	10	1.5	8.5	72.25
-20	0	7	7	0	0.00
0	4	5	5	0	0.00
-24	4	8.5	5	3.5	12.25
40	-16	1	8	-7.0	49.00
32	-20	3.5	9	5.5	30.25
36	-30	2	10	-8.0	64.00
-24	20	8.5	1.5	7.0	49.00
-4	4	6	5	1.0	1.00
			કુલ		278 = $\sum d^2$

સમજૂતી :  $r_x$  સૌથી મોટી કિંમત 40 ને 1 નંબર, તેથી નાની રકમ 36 ને 2 નંબર, તેથી નાની રકમ 32 બે વખત છે. તેથી 3 અને 4 નંબરની સરેરાશ  $\frac{3+4}{2} = 3.5$  બંને ને 3.5 નંબર આપો. તેથી નાની 0 ને 5 નંબર તેથી નાની - 4 ને 6 નંબર તેથી નાની - 20 ને 7 નંબર, તેથી નાની - 24 બે વખત છે તેથી 8 અને 9 નંબરની સરેરાશ  $\frac{8+9}{2} = 8.5$  નંબર બંનેને તેથી નાની - 40 ને 10 નંબર આપો.

$r_y$  : સૌથી મોટી કિંમત 20 બે વખત છે. તેથી 1 અને 2 ને સરેરાશ  $\frac{1+2}{2} = 1.5$  નંબર બંનેને આપો તેથી નાની 12 ને 3 નંબર તેથી નાની 4 ત્રણ વખત આવે છે તેથી 4, 5 અને 6 નંબરની સરેરાશ  $\frac{4+5+6}{3} = 5$

નંબર ત્રણેને આપો તેથી નાની રકમ 0 ને 7 નંબર તેથી નાની - 16 ને 8 નંબર તેથી નાની - 20 ને 9 નંબર અને તેથી નાની - 24 ને 10 નંબર આપો.

→  $d = r_x - r_y$  શોધી તેનો વર્ગ  $d^2$  શોધો.

	બેની જોડ	ત્રણની જોડ
$r_x$ માં જોડ	(3.5, 3.5)	—
	(8.5, 8.5)	—
$r_y$ માં જોડ	(1.5, 1.5)	(5, 5, 5)

અહીં કુલ ચાર જોડ છે તેથી સૂત્રમાં  $\frac{m}{12} (m^2 - 1)$  સૂત્ર ચાર વખત ઉમેરાશે અને તેમાં બેની જોડ 3 વખત અને ત્રણની જોડ એક વખત છે. તેથી પ્રથમ ત્રણ સૂત્રમાં  $m = 2$  અને ચોથા સૂત્રમાં  $m = 3$  લેવાશે જે નીચે મુજબ જોઈ શકાશે.

$$r = 1 - \frac{6 \left[ \sum d^2 + \frac{m}{12} (m^2 - 1) + \frac{m}{12} (m^2 - 1) + \frac{m}{12} (m^2 - 1) + \frac{M}{12} (m^2 - 1) \right]}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \left[ 278 + \frac{2}{12} (2^2 - 1) + \frac{2}{12} + (2^2 - 1) + \frac{2}{12} (2^2 - 1) + \frac{3}{12} (3^2 - 1) \right]}{10(10^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \left[ 278 + \frac{2}{12} (3) + \frac{2}{12} + (3) + \frac{2}{12} (3) + \frac{3}{12} (8) \right]}{10(100 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 [278 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 2]}{10(99)}$$

$$= 1 - \frac{6[281.5]}{990}$$

$$= 1 - \frac{1689}{990}$$

$$= 1 - 1.706$$

$$= -0.706$$

(4) નીચે આપેલ માહિતી ઉપરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

$x$	3.0	5.0	1.4	0.3	2.4	6.2
$y$	6.3	0.8	7.2	2.8	4.5	1.3

$x$	$y$	$r_x$ $x$ નો ક્રમ	$r_y$ $y$ નો ક્રમ	તફાવત $d = r_x - r_y$	$d^2$
3.0	6.3	3	2	1	1
5.0	0.8	2	6	-4	16
1.4	7.2	5	1	4	16
0.3	2.8	6	4	2	4
2.4	4.5	4	3	1	1
6.2	1.3	1	5	-4	16
કુલ					54
					$\Sigma d^2$

$$n = 6 \text{ લો}$$

ક્રમાંક સહસંબંધાંક

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(54)}{6(6^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{324}{6(36 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{324}{210}$$

$$= 1 - 1.54$$

$$= -0.54$$

- (5) એક દ્વિચલ નિદર્શમાં બે ચલનાં અવલોકનોના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 66 છે અને તે બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.6 છે તો જોડકાંઓની સંખ્યા શોધો.

જવાબ :

$$\Sigma d^2 = 66, r = 0.4$$

$$\text{ક્રમાંક સહસંબંધાંક} = r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$0.6 = 1 - \frac{6(66)}{n(n^2 - 1)}$$

$$0.6 = 1 - \frac{396}{n(n^2 - 1)}$$

$$\frac{396}{n(n^2 - 1)} = 1 - 0.6$$

$$\frac{396}{0.4} = n(n^2 - 1)$$

$$990 = n(n - 1)(n + 1)$$

$$9 \times 10 \times 11 = (n - 1)n(n + 1)$$

$$\therefore n = 10$$

- (6) દસ વિદ્યાર્થીઓના આંકડાશાસ્ત્ર અને ભૂગોળ વિષયમાં મેળવેલ ગુણ વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.5 મળે છે. પાછળથી માલુમ પડ્યું કે તેમાના એક વિદ્યાર્થીના બે વિષયોના ગુણના ક્રમનો તફાવત ભુલથી સાત ને બદલે ત્રણ લેવાઈ ગયો છે. સુધારેલો સહસંબંધાંક શોધો.

જવાબ :

$$n = 10 \quad r = 0.5 \quad \text{સાચો} \quad \text{ખોટો}$$

$$\text{ક્રમ} \quad \text{ક્રમ}$$

$$7 \quad 3$$

$$\text{તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો} = \Sigma d^2$$

$$\text{સહસંબંધાંક } r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$0.5 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{10(10^2 - 1)}$$

$$= \frac{6\Sigma d^2}{10(99)} = 1 - 0.5$$

$$\Sigma d^2 = \frac{0.5 \times 990}{6}$$

$$\text{ખોટો} = \Sigma d^2 = \frac{495}{6} = 82.5$$

$$\begin{aligned} \text{સુધારેલો } \Sigma d^2 &= \text{ખોટો } \Sigma d^2 + (7)^2 - (3)^2 \\ &= 82.5 + 49 - 9 \\ &= 122.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{સુધારેલો સહસંબંધાંક} &= r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} \\ &= 1 - \frac{6(122.5)}{10(10^2 - 1)} \\ &= 1 - \frac{735}{990} \\ &= 1 - 0.74 \\ &= 0.26 \end{aligned}$$

- (7) BAOUના T.Y. B.A.ના એક વર્ગની વક્તૃત્વ સ્પર્ધામાં ત્રણ નિર્ણાયકો એ 8 સ્પર્ધકોને નિમ્નાનુસાર ક્રમ આપેલ છે. તે પરથી કયા બે નિર્ણાયકોની પસંદગી સૌથી વધારે નજીક છે તે સ્પિયરમેનના સહસંબંધાંક દ્વારા નક્કી કરો.

સ્પર્ધક	1	2	3	4	5	6	7	8
નિર્ણાયક Aનો ક્રમ	1	5	2	6	3	7	4	8
નિર્ણાયક Bનો ક્રમ	3	5	6	7	4	2	8	1
નિર્ણાયક Cનો ક્રમ	2	4	7	5	3	1	8	6

**જવાબ :** ત્રણ નિર્ણાયકો પૈકી કયા બે નિર્ણાયકોની પસંદગી સૌથી વધારે નજીક છે તે તપાસવાનું હોવાથી નિર્ણાયકો A B C પૈકી AB, AC અને BC એમ ત્રણ વચ્ચેનો ક્રમશઃ સહસંબંધાંક શોધીશું.

Aનો ક્રમ $r_A$	Bનો ક્રમ $r_B$	Cનો ક્રમ $r_C$	A અને Bના ક્રમનો તફાવત $d_1 = r_A - r_B$	$\frac{2}{d_1}$	A અને Cના ક્રમનો તફાવત $d_2 = r_A - r_C$	$\frac{2}{d_2}$	B અને Cના ક્રમનો તફાવત $d_3 = r_B - r_C$	$\frac{2}{d_3}$
1	3	2	-2	4	-1	1	1	1
5	5	4	0	0	1	1	1	1
2	6	7	-4	16	-5	25	-1	1
6	7	5	-1	1	1	1	2	4
3	4	3	-1	1	0	0	1	1
7	2	1	5	25	6	36	1	1
4	8	8	-4	16	-4	16	0	0
8	1	6	7	49	2	4	-5	25
			$\Sigma d_1^2 = 112$		$\Sigma d_2^2 = 84$		$\Sigma d_3^2 = 34$	

સમજૂતી : સૌથી પ્રથમ નિર્ણાયક A અને નિર્ણાયક Bના ક્રમો વચ્ચેનો તફાવત  $d_1$  શોધી તેનો વર્ગ  $d_1^2$  શોધો.

– નિર્ણાયક A અને નિર્ણાયક Cના ક્રમો વચ્ચેનો તફાવત  $d_2$  શોધી તેનો વર્ગ  $d_2^2$  શોધીશું.

– નિર્ણાયક B અને Cના ક્રમો વચ્ચેનો તફાવત  $d_3$  શોધી તેનો વર્ગ  $d_3^2$  શોધીશું.

– ત્રણેના સહસંબંધાંક શોધીશું.

નિર્ણાયક A અને નિર્ણાયક B વચ્ચેનો સહસંબંધાંક

$$r_{AB} = 1 - \frac{6\Sigma d_1^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(112)}{8(8^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{672}{504}$$

$$= 1 - 1.33$$

$$= -0.33$$

નિર્ણાયક A અને નિર્ણાયક C વચ્ચેનો

$$\text{સહસંબંધાંક } r_{AC} = 1 - \frac{6\Sigma d_2^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{6(84)}{8(8^2 - 1)} \\
&= 1 - \frac{504}{504} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{નિર્ણાયક B અને નિર્ણાયક C વચ્ચેનો સહસંબંધાંક } r_{BC} &= 1 - \frac{6\Sigma d_3^2}{n(n^2 - 1)} \\
&= 1 - \frac{6(34)}{504} \\
&= 1 - \frac{204}{504} = 1 - 0.40 \\
&= 0.60
\end{aligned}$$

અહીં  $r_{AB} = -0.33 \Rightarrow$  ઋણ સહસંબંધ છે.

$r_{AC} = 0 \Rightarrow$  સહસંબંધનો અભાવ

$r_{BC} = 0.60 \Rightarrow$  ધન સહસંબંધ

એટલે કે નિર્ણાયક B અને નિર્ણાયક Cના પરિણામમાં વધુ નિકટતા જોવા મળે છે.

#### સ્વાધ્યાય

- (1) પાંચ કોલેજના યુનિવર્સિટીના પરિણામ અને વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાને આધારે નિમ્ન ક્રમ આપેલ છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા અને યુનિવર્સિટીના પરિણામ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાનો ક્રમ	4	1	3	2	5
યુનિવર્સિટીના પરિણામનો ક્રમ	3	5	2	4	1

(જવાબ :  $\Sigma d^2 = 38$ ,  $r = -0.9$ )

- (2) BAOUમાં અભ્યાસ કરતાં T.Y.B.Aના વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં ગ્રંથલાયનો ઉપયોગ કરનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા અને તે વર્ગના આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણની સરેરાશ નીચે મુજબ છે તે ઉપરથી તે બે વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

ગ્રંથાલયનો ઉપયોગ કરનાર વિદ્યાર્થીઓ	42	40	44	41	43	47
આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણ સરેરાશ	90	84	85	86	87	82

(જવાબ :  $\Sigma d^2 = 44$ ,  $r = -0.26$ )

- (3) નીચેની માહિતી પરથી નિબંધ લેખનમાં અને પત્ર લેખનમાં મેળવેલ ગુણ વચ્ચે સહસંબંધ શોધો.

નિબંધ લેખનના ગુણ	20	19	17	20	21	16	17	20
પત્ર લેખનના ગુણ	13	14	15	14	17	14	12	18

(જવાબ :  $\Sigma d^2 = 48.5, \frac{m}{12} (m^2 - 1)$  સૂત્ર ત્રણ વખત ઉમેરાશે. બે વખત  $m = 3$  અને એક વખત

$$m = 2 \text{ તેથી } 6 (48.5 + 0.5 + 2 + 2) = 318, r = 0.63)$$

- (4) એક દ્વિચલ નિદર્શમાં બે ચલનાં અવલોકનોના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 200 છે અને તે બે ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક  $-0.2121$  છે તો જોડકાઓની સંખ્યા શોધો. ( $n = 10$ )
- (5) અર્થશાસ્ત્ર અને આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક  $0.5$  છે અને તે બે ચલોના અવલોકનોના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 60 છે તો જોડકાઓની સંખ્યા શોધો. ( $n = 9$ )
- (6) બે ચલ  $x$  અને  $y$ ના અવલોકનોના ક્રમોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 30 છે અને તેમની વચ્ચેનો સહસંબંધાંક  $0.75$  હોય તો તે અવલોકનોના જોડકાઓની કિંમત શોધો. [ $(n = 9)$  Hint  $8 \times 9 \times 10$  ]
- (7) ગુજરાતી અને ઈતિહાસના ગુણોના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 126 અને તેમની વચ્ચેનો સહસંબંધાંક  $-0.5$  હોય તો જોડકાઓની સંખ્યા શોધો. [ $(n = 8)$  Hint  $7 \times 8 \times 9$  ]
- (8) એક દ્વિચલ નિદર્શનના અવલોકનોની 10 જોડ માટે ક્રમાંક સહસંબંધાંક  $0.4$  મળે છે. પાછળથી માલુમ પડ્યું કે અવલોકનોની એક જોડ માટે ક્રમનો તફાવત ભૂલથી 7 ને બદલે 3 લેવાય ગયો છે તો સુધારેલ સહસંબંધાંક શોધો.

$$(r = 0.16)$$

- (9) BAOU યુર્નિ.માં અભ્યાસ કરતાં 10 વિદ્યાર્થીઓના તર્કશાસ્ત્ર અને મનોવૈજ્ઞાનિક વિષયમાં મેળવેલ ગુણ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક  $0.3$  છે. પછીથી જાણવા મળ્યું કે તેમાંના એક વિદ્યાર્થીના બે વિષયોના ગુણના ક્રમનો તફાવત ભૂલથી 6 ને બદલે 9 લીધો છે. તો સુધારેલો સહસંબંધાંક શોધો.

$$(જવાબ : r = 0.57)$$

- (10) BAOU યુર્નિમાં યોજાયેલ સંગીત સ્પર્ધામાં ત્રણ નિર્ણાયકો એ દશ સ્પર્ધકોને નીચેના ક્રમ આપેલ છે તો કયા બે નિર્ણાયકો વચ્ચે વધુ નિકટતા છે તે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની મદદથી શોધો.

નિર્ણાયક - X	7	8	1	6	9	5	4	3	10	2
નિર્ણાયક - Y	6	9	3	5	1	8	2	7	4	10
નિર્ણાયક - Z	5	7	6	4	10	9	3	1	8	2

$$(જવાબ : r_{xy} = -0.21, r_{xz} = 0.64, r_{yz} = -0.29)$$

- (11) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીત સમજાવો.
- (12) ક્રમાંક સહસંબંધાંક ને બીજ કયા નામથી ઓળખવામાં આવે છે.
- (13) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીતે સહસંબંધાંક ક્યારે શોધવામાં આવે છે.

#### 11.14 વૈકલ્પિક પ્રશ્નો (MCQ'S)

- (1) ....., ..... અને ..... સહસંબંધના પ્રકારો છે.
- (A) સાદો સહસંબંધ, જટિલ સહસંબંધ, ધન સહસંબંધ
- (B) ધન સહસંબંધ, સહસંબંધ, સ્વતંત્ર સહસંબંધ
- (C) કાર્યો સહસંબંધ, પાકો સહસંબંધ, મધ્યમ સહસંબંધ
- (D) એકપણ નહીં

(2) જો  $\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 30$ ,  $\Sigma (x - \bar{x})^2 = 23$   $\Sigma (y - \bar{y})^2 = 75$  હોય તો સહસંબંધાંક  $r = \dots\dots\dots$

(A) 0.7 (B) - 0.7 (C) 0.07 (D) એકપણ નહીં

(3) જો  $x$  અને  $y$  વચ્ચે  $r = 0.6$  હોય તો,  $(2 - 3x)$  અને  $(4y + 1)$  વચ્ચે  $r = \dots\dots\dots$

(A) - 0.6 (B) 0.6 (C) 0.3 (D) - 0.3

$$\left[ \text{Hint: } \frac{\text{Cor}(u,v)}{\sqrt{v(u)} \times \sqrt{v(v)}} = \frac{\text{Cor}(-3x, 4y)}{\sqrt{-3^2} \times \sqrt{4^2}} = \frac{-12 \text{Cor}(xy)}{12} = \text{Cov}(x,y) = 0.6 \therefore \text{Cov}(x,y) = -0.6 \right]$$

(4) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની રીતમાં  $x$ નો ક્રમ અને  $y$ નો ક્રમ બંને સરખા હોય તો સહસંબંધાંક  $r = \dots\dots\dots$

(A) - 1 (B) 1 (C) 0 (D) એકપણ નહીં

(5) વિકર્ણ ચિત્રમાં બધા જ બિંદુઓ એક જ ત્રાંસી રેખા પર હોય તો સહસંબંધાંક  $r = \dots\dots\dots$

(A) - 1 (B) + 1 (C)  $\pm 1$  (D) 0

(6) સહસંબંધાંક  $r$ ની કિંમત  $\dots\dots\dots$  થી  $\dots\dots\dots$  ની વચ્ચે જ હોય છે.

(A) 0, 1 (B) 0, - 1 (C) - 1, 1 (D) - 1, 0

(7) પાંચ વિદ્યાર્થીઓએ બે વિષયમાં મેળવેલ ગુણોના ક્રમાંકો નીચે મુજબ છે. તો તે ઉપરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક  $r = \dots\dots\dots$

$x$	3	4	5	2	1
$y$	5	3	2	1	4

(A) 0.2 (B) - 0.2 (C) 1.2 (D) - 1.2

(8) સહસંબંધાંક  $r$   $\dots\dots\dots$  અને  $\dots\dots\dots$  પરિવર્તનથી નિરપેક્ષ છે.

(A) ઉગમબિંદુ, સ્કેલ (B) સ્વતંત્ર, આધાર  
(C) ધન, ઋણ (D) એકપણ નહીં

(9) જો  $n = 10$  અને  $\Sigma d^2 = 212$  હોય તો ક્રમાંક સહસંબંધાંક =  $\dots\dots\dots$

(A) 1.285 (B) - 1.285 (C) 0.285 (D) - 0.285

(10)  $r^2$ ની કિંમત  $\dots\dots\dots$  વધુ હોતી નથી.

(A) - 1 (B) 0 (C) + 1 (D) એક પણ નહીં

(11) જો ચલ  $x$  અને  $y$  વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.62 હોય તો ચલ -  $x$  અને -  $y$  વચ્ચેનો સહસંબંધાંક =  $\dots\dots\dots$  જ્યારે ચલ -  $x$  અને  $y$  વચ્ચેનો સહસંબંધાંક =  $\dots\dots\dots$

(A) - 0.62, 0.62 (B) 0.62, - 0.62  
(C) 0.62, 0.62 (D) એક પણ નહીં

(12) એક દ્વિચલ નિદર્શના દશ જોડકાને આધારે નીચે મુજબ પરિણામો મળેલ છે.

$$\Sigma xy = 4800, \bar{x} = 20, \bar{y} = 18, S_x = 9 \text{ અને } S_y = 11 \text{ તો સહસંબંધાંક } r = \dots\dots\dots$$

(A) 0.21 (B) 1.21 (C) - 0.21 (D) - 1.21

(13) એક સમષ્ટિમાંથી લેવામાં આવેલા 25 અવલોકનોની જોડ માટે સહસંબંધાંક 0.6 છે તો સંભવિત દોષ =  $\dots\dots\dots$

(A) 0.086 (B) 0.43 (C) 0.128 (D) એક પણ નહીં

(14)  $x$  અને  $y$  વચ્ચેનું સહવિચરણ = 1700 અને  $S_x = 45$  અને  $S_y$ નું વિચરણ = 1600 હોય તો સહસંબંધાંક  $r = \dots\dots$

(A) 1.94 (B) 0.94 (C) 0.06 (D) એક પણ નહીં

(15)  $(\text{Cov } x; y) = 16$ ,  $S_x = 4$  અને સહસંબંધાંક  $r = 0.8$  હોય તો  $S_y = \dots\dots\dots$

(A) 0.4 (B) 0.2 (C) 5 (D) 4

જવાબ : (1) B (2) A (3) A (4) B (5) C (6) C (7) B (8) A  
(9) D (10) C (11) B (12) B (13) A (14) B (15) C

### 11.15 ચાવીરૂપ શબ્દો :

- સહ સંબંધાંક — બે ચલ વચ્ચેની નિકટતા તપાસતું માપ  
કાર્ય - કરાણ — એક ચલ બીજા ચલ ઉપર આધારિત હોય (એક ચલમાં કંઈક કાર્ય થાય તો તેને કારણે બીજા ચલ ઉપર તેની અસર થાય)  
ઊગમ બિંદુ — મૂળભૂત બિંદુ  
ધન સહસંબંધ — સીધો સંબંધ  
ઋણ સહસંબંધ — વ્યસ્ત સંબંધ  
સ્વતંત્ર સહસંબંધ — નિરપેક્ષ સંબંધ  
પ્રમાણિત વિચલન — વિચરણનું વર્ગમૂળ  
દ્વિ-ચલ કોષ્ટક — બે ચલો વાળું કોષ્ટક

→ સંદર્ભ ગ્રંથ

- “ધંધાકીય સંશોધન પદ્ધતિઓ”, મૈસુરીયા એન્ડ પટેલ અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ-2019
- ‘આંકડાશાસ્ત્ર’ જોષી, પંચોળી, કરકર અને અન્ય સી. જમનાદાસ કંપની, અમદાવાદ 1998-99
- ‘Business Statistics’ Sachdeva Laxminarayan Agrawal, 2005
- આંકડાશાસ્ત્રી વિશ્લેષણ “પટેલ, જોશી, કાસુન્દ્રા અને અન્ય” સી. જમનાદાસ કંપની, અમદાવાદ-2003.
- ‘Statistics’ “Sancheti & Kapoor” Sultan Chand & Sons, New Delhi – 2007.

\* \* \*