એકમ-5 વિધેય

: રૂપરેખા :

5.0 ઉદ્દેશો
5.1 પ્રસ્તાવના
5.2 વિધેયનો ખ્યાલ
5.3 વિધેયની વ્યાખ્યા
5.4 પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર
5.5 વિધેયના પ્રકારો
 5.5.1 એક એક વિધેય
 5.5.2 અનેક એક વિધેય
 5.5.3 અચળ વિધેય
 5.5.4 સમાન વિધેય
 5.5.5 વાસ્તવિક વિધેય
 5.5.6 યુગ્મ (બેકી) અને અયુગ્મ (એકી) વિધેય
 5.5.7 ઘાતાંકીય વિધેય
5.6 કેટલાંક ઉદાહરણો
 5.5.8 સુરેખ વિધેય
 5.5.9 દ્વિઘાતી વિધેય
5.7 સ્વાધ્યાય

5.0 ઉદ્દેશો

આ એકમના અભ્યાસથી તમે નીચેની બાબતોથી માહિતગાર થશો.

- વિધેયના અર્થ વિશે જાણકારી મળશે.
- વિધેયની ઉપયોગિતા વિશે જાણી શકાશે.

5.1 પ્રસ્તાવના :

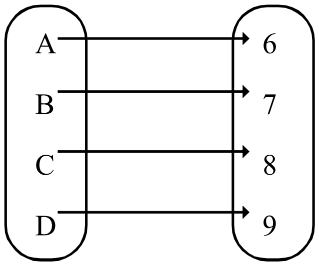
વ્યવહારમાં આર્થિક, સામાજિક, વૈજ્ઞાનિક, રાજકીય ક્ષેત્રે જુદી જુદી ચલરાશીઓ વચ્ચે સંબંધ જોવા મળે છે. વ્યવહારમાં આવક અને ખર્ચ, કિંમત અને માંગ, વેચાણ અને નફો – આમ બે ચલ વચ્ચે સંબંધ હોય છે. આ પ્રકારના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા વિધેય ઉપયોગી છે.

5.2 વિધેયનો ખ્યાલ :

બે ચલરાશી વચ્ચેના ગાણિતિક સંબંધ રજૂ કરવા વિધેય ઉપયોગી છે. નિરપેક્ષ ચલ અને સાપેક્ષ ચલની કિંમતો વચ્ચેનો સંબંધ રજૂ કરતા નિયમ કે સંગતતાને વિધેય તરીકે ઓળખાવાય.

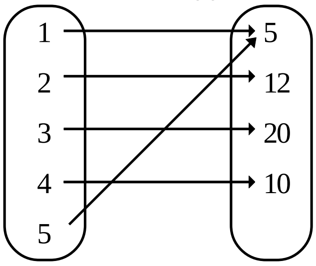
વિધેયનો અર્થ સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

(1) વિદ્યાર્થીના નામ વિદ્યાર્થીના રોલ નંબર



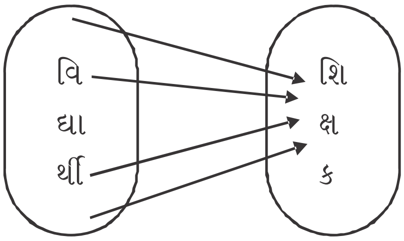
અહીં ગણ A ના દરેક ઘટક ગણ B ના અનન્ય ઘટક સાથે સંકળાયેલ છે. તેથી ગણ A અને Bના ઘટકો વચ્ચેની સંગતતાને વિધેય કહેવાય છે.

(2) **બાળકોની સંખ્યા** **કુટુંબોની સંખ્યા**



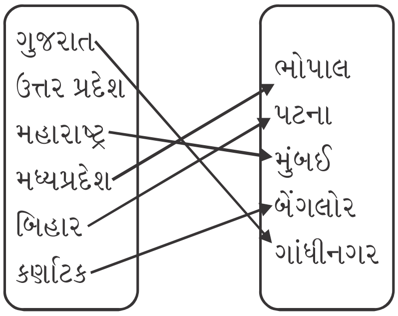
અહીં ગણ A ના દરેક ઘટક ગણ B ના કોઈ એક ઘટક સાથે સંકળાયેલ છે. તેથી આ સંગતતા વિધેય છે.

(3) વિદ્યાર્થી વર્ગ શિક્ષક



અહીં ગણ A ના બધા જ ઘટકો ગણ B ના એક જ ઘટક સાથે સંકળાયેલ છે. માટે A અને B ના ઘટકો વચ્ચેની સંગતતા વિધેય છે.

(4)



અહીં ગણ A નો એક ઘટક ઉત્તરપ્રદેશ ગણ B ના કોઈ ઘટક સાથે સંકળાયેલ નથી. તેથી A અને B ના ઘટકો વચ્ચેના સંબંધને વિધેય કહેવાય નહી.

૫.૩ વિધેયની વ્યાખ્યા :

જો A અને B બે ખાલી ગણ ન હોય અને કોઈ નિયમ કે સંગતતા દ્વારા ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટકને ગણ B ના એક અને માત્ર એક (અનન્ય) ઘટક સાથે સાંકળી શકાતા હોય તો તે નિયમ કે સંગતતાને A થી B પરનું વિધેય કહેવામાં આવે છે. સંકેતમાં તેને $f : A \to B$ વડે દર્શાવાય.

૫.૪ પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર : Domain, Co-domain, Range

ધારો કે, $f : A \to B$ છે. અહીં ગણ A ને વિધેયનો પ્રદેશ અને ગણ B ને વિધેયનો સહપ્રદેશ કહે છે.

પ્રદેશ એ નિરપેક્ષ ચલ x ની કિંમતોનો ગણ છે. ચલ x ની કિંમતોને અનુરૂપ વિધેયના મૂલ્યના ગણને વિધેયનો વિસ્તાર કહે છે. સંકેતમાં તેને R_f વડે દર્શાવાય. વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશનો ઉપગણ અથવા સહપ્રદેશ પોતે જ હોઈ શકે.

દા.ત. (૧) $f : A \rightarrow B$, $A = \{1,2,5\}$, $B = \{1,4,5,7,25,28\}$ અને $f(x) = x^2 + 3$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર જણાવો.

અહીં પ્રદેશ $D_f = A = \{1, 2, 5\}$

સહપ્રદેશ $B = \{1,4,5,7,25,28\}$

હવે વિસ્તાર શોધવા x ની કિંમતોને અનુરૂપ વિધેયના મૂલ્ય મેળવીએ.

$f(x) = x^2 + 3$

(i) $f(1) = (1)^2 + 3 = 4$

(ii) $f(2) = (2)^2 + 3 = 7$

(iii) $f(5) = (5)^2 + 3 = 28$

$\therefore$ વિસ્તાર $Rf = \{4,7,28\}$

અહીં જોઈ શકાય છે કે વિસ્તાર એ સહપ્રદેશનો ઉપગણ છે.

(૨) $f : A \rightarrow B$, $A = \{2,5,10\}$, $B = \{7,22,47\}$ અને $f(x) = 5x - 3$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર જણાવો.

અહીં પ્રદેશ $A = \{2, 5, 10\}$

સહપ્રદેશ $B = \{7, 22, 47\}$

હવે વિસ્તાર શોધવા ચલ ની કિંમતોને અનુરૂપ વિધેયના મૂલ્ય શોધીએ.

$f(x) = 5x - 3$

(i) $f(2) = 5(2) - 3 = 7$

(ii) $f(5) = 5(5) - 3 = 22$

(iii) $f(10) = 5(10) - 3 = 47$

વિસ્તાર $Rf = \{7, 22, 47\}$

અહીં જોઈ શકાય છે કે વિધેયનો સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર બંને સમાન છે.

5.5 વિધેયના પ્રકાર : વિધેયના મુખ્ય પ્રકારો નીચે મુજબ છે.

5.5.1 એક એક વિધેય :

ધારો કે $f : A \rightarrow B$ છે. જો ગણ Aના બે જુદા જુદા ઘટકો માટે ગણ B માં મળતા સંગત પ્રતિબિંબો પણ જુદા જુદા હોય તો વિધેય f ને એક એક વિધેય કહેવાય. આમ, જો વિધેયમાં ચલ x ની જુદી જુદી કિંમતો માટે વિધેયના મૂલ્ય પણ જુદા જુદા હોય તો તે વિધેયને એક એક વિધેય કહે છે.

દા.ત. જો $f : N \rightarrow Z$ $f(x) = 5x - 3$ છે. તો

$f(1) = 5(1) - 3 = 2$

$f(2) = 5(2) - 3 = 7$

$f(3) = 5(3) - 3 = 12$

આમ x ની જુદી જુદી કિંમતો માટે વિધેયના મૂલ્ય પણ અલગ અલગ મળે છે. તેથી f એ એક-એક વિધેય છે.

5.5.2 અનેક-એક વિધેય :

ધારો કે $f : A \rightarrow B$ છે. જો ગણ Aના બે જુદા જુદા ઘટકો માટે ગણ B માં મળતું પ્રતિબિંબ સમાન હોય તો વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહેવાય. આમ જો નિરપેક્ષ ચલ x

ની બે કે તેથી વધુ કિંમતો માટે વિધેયનું મૂલ્ય એક સરખું મળતું હોય તો તે વિધેયને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

દા.ત. $f : Z \rightarrow Z$ $f(x) = x^2 + 5$ છે.

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ Z હોવાથી xની કિંમત ધન કે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા લઈ શકાય.

$f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

$f(-1) = (-1)^2 + 5 = 6$

$f(0) = (0)^2 + 5 = 5$

$f(1) = (1)^2 + 5 = 6$

આમ, x ની બે અલગ અલગ કિંમત માટે વિધેયનું મૂલ્ય સમાન મળે છે. તેથી વિધેય f અનેક એક વિધેય છે.

5.5.3 અચળ વિધેય :

ધારો કે $f : A \rightarrow B$ છે. જો ગણ Aના બધા જ ઘટકો માટે ગણ B માં મળતું પ્રતિબિંબ એક જ હોય તો વિધેય f ને અચળ વિધેય કહેવાય. આમ, જો નિરપેક્ષ ચલ x ની દરેક કિંમતો માટે વિધેયનું મૂલ્ય અચળ રહેતું હોય તો તે વિધેયને અચળ વિધેય કહે છે. અચળ વિધેયના વિસ્તારમાં માત્ર એક જ ઘટક આવેલો હોય છે.

દા.ત.$f : A \rightarrow B$ $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{4, 5, 8\}$ અને $f(x) = 5$ છે.

અહીં વિધેયમાં xની કિંમત 1, 2 અને 6 મૂકતાં વિધેયનું મૂલ્ય 5 જ મળશે. આમ x ની બધી જ કિંમતો માટે વિધેયનું મૂલ્ય સમાન રહે છે. તેથી વિધેય f અચળ વિધેય છે.

5.5.4 સમાન વિધેય :

જો (i) બે વિધેય f અને g સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત થયેલાં હોય અને (ii) નિરપેક્ષ ચલ x ની પ્રત્યેક કિંમત માટે બંને વિધેયનાં મૂલ્ય પણ સમાન હોય એટલે કે $x \in A$ માટે $f(a) = g(a)$ થાય તો f અને g ને સમાન વિધેય કહેવાય.

5.5.5 વાસ્તવિક વિધેય :

જે વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર બંને વાસ્તવિક ગણ અથવા તેનો કોઈપણ ઉપગણ હોય તો તે વિધેયને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

વ્યવહારમાં બે ચલરાશી વચ્ચે જોવા મળતા વાસ્તવિક સંબંધને રજૂ કરતા વિધેયને વાસ્તવિક વિધેય કહેવાય. દા.ત. (1) માંગનું વિધેય $D = f(p)$ એ કિંમત અને માંગ વચ્ચેનો સંબંધ રજૂ કરતું વાસ્તવિક વિધેય છે.

(2) $c = f(x)$ એ ઉત્પાદનના એકમો(x) અને ઉત્પાદન ખર્ચ વચ્ચેનો સંબંધ રજૂ કરતું વાસ્તવિક વિધેય છે.

5.5.6 યુગ્મ (બેકી) અને અયુગ્મ (એકી) વિધેય :

જો વિધેય $f(x)$ માટે xની દરેક કિંમત માટે $f(-x) = f(x)$ થાય તો તેવા વિધેયને યુગ્મ વિધેય કહે છે. અને જો $f(-x) = -f(x)$ થાય તો તે વિધેયને અયુગ્મ વિધેય કહેવાય.

5.5.7 ઘાતાંકીય વિધેય :

જો $y = a^x$, જ્યાં $x \neq 0$ હોય તો y ને a આધારવાળું ઘાતાંકીય વિધેય કહેવાય. દા.ત.

$y = 3^x$; $y = e^x$

5.5.8 સુરેખ વિધેય :

જો બહુપદી વિધેયમાં ચલ xનો ઘાત 1 હોય તો તેવા વિધેયને સુરેખ વિધેય કહેવાય, સુરેખ વિધેયનું સામાન્ય સ્વરૂપ $y = ax + b$ છે. સુરેખ વિધેયના આલેખમાં બધા જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં હોય છે.

5.5.9 દ્વિઘાતી વિધેય :

જો n ઘાતી બહુપદી વિધેયમાં $n = 2$ હોય એટલે કે ચલ x નો ઘાત 2 હોય તેવા વિધેયને દ્વિઘાત વિધેય કહેવાય. તેનું સામાન્ય સ્વરૂપ $y = ax^2 + bx + c$ છે. દ્વિઘાત વિધેયનો આલેખ પરવલય વક્ર સ્વરૂપનો હોય છે.

5.6 ઉદાહરણ :

1. જો $f : A \rightarrow B$ $f(x) = x + 3$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

જવાબ: ગણ A = પ્રદેશ = $\{0, 1, 2\}$

ગણ B = સહપ્રદેશ = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

હવે $f(x) = x + 3$

ગણ Aમાં આપેલી xની કિંમતોને અનુરૂપ વિધેયનાં મૂલ્ય શોધીએ.

$f(0) = 0 + 3 = 3$

$f(1) = 1 + 3 = 4$

$f(2) = 2 + 3 = 5$

વિસ્તાર $Rf = \{3, 4, 5\}$

2. જો $f : N \rightarrow Z$ $f(x) = x^2 - 2x + 1$ હોય $f(2), f(3), f(0)$ અને $f(-1)$ માંથી જે શક્ય હોય તે મેળવો.

જવાબ: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$f(2) = (2)^2 - 2(2) + 1$

$= 4 - 4 + 1$

$f(2) = 1$

(ii) $f(3) = (3)^2 - 2(3) + 1$

$= 9 - 6 + 1$

$f(3) = 4$

હવે, આ વિધેયનો પ્રદેશ N હોવાથી $x = 0$ અને $x = -1$ લઈ શકાય નહીં. તેથી $x = 0$ અને -1 ને અનુરૂપ વિધેય $f(x)$ ના મૂલ્ય શોધી શકાય નહીં.

3. જો $f(x) = 2x^2 + x - 1$ હોય તો (i) $f(1) - f(-1)$ અને (ii) $f(2) - f(1/2)$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = 2x^2 + x - 1$

(i) $f(1) = 2(1)^2 + 1 - 1$

$= 2 + 1 - 1$

$f(1) = 2$

હવે, $f(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1$

$= 2 - 1 - 1$

$f(-1) = 0$

$\therefore \quad f(1) - f(-1) = 2 - 0$

$= 2$

(ii) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

$f(2) = 2(2)^2 + 2 - 1$

$= 8 + 2 - 1$

$f(2) = 9$

$f(1/2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1$

$= 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$

$= \frac{1+1-2}{2}$

$f(1/2) = 0$

$\therefore \quad f(1) - f(-1) = 9 - 0$

$= 9$

4. જો $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ અને $g(x) = 2^x + x - 1$ હોય તો $2f(3) - 3g(0)$ નું મૂલ્ય શોધો.

જવાબ: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ $\qquad g(x) = 2^x + x - 1$

$\therefore \quad f(3) = (3)^2 + \frac{1}{3}$ $\qquad \therefore \quad g(0) = 2^0 + 0 - 1$

$= 9 + \frac{1}{3}$ $\qquad = 1 + 0 - 1$

$= \frac{28}{3}$ $\qquad g(0) = 0$

હવે, $2f(3) - 3g(0) = 2\left(\frac{28}{3}\right) - 3(0)$

$= \frac{56}{3}$

5. જો $f : A \rightarrow B$ $f(x) = 2x^2 - 3$ અને $A = \{1, 3, 5\}$ હોય તો વિસ્તાર શોધો.

જવાબ : અહીં પ્રદેશ $A = \{1, 3, 5\}$ આપેલ છે. તેથી આપેલા વિધેયમાં $x = 1, 3$ અને 5 મૂકી વિધેયના મૂલ્ય શોધીએ.

(i) $f(x) = 2x^2 - 3$

$\therefore \quad f(1) = 2(x)^2 - 3$

$= 2 - 3$

$f(1) = -1$

(ii) $f(3) = 2(3)^2 - 3$

$= 18 - 3$

$f(3) = 15$

(iii) $f(5) = 2(5)^2 - 3$

$= 50 - 3$

$f(3) = 47$

વિસ્તાર $Rf = \{-1, 15, 47\}$

6. $f : A \rightarrow B$ $f(x) = 5x - 1$ અને $Rf = \{4, 9, 19\}$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ A શોધો.

જવાબ: અહીં વિધેયનો વિસ્તાર એટલે કે વિધેયના મૂલ્ય આપેલ છે અને પ્રદેશ એટલે કે ચલ xના મૂલ્ય શોધવાના છે.

(i) $f(x) = 4$

$5x - 1 = 4$

$5x = 4 + 1$

$5x = 5$

$x = 1$

(ii) $f(x) = 9$

$5x - 1 = 9$

$5x = 9 + 1$

$5x = 10$

$x = 2$

(iii) $f(x) = 19$

$5x - 1 = 19$

$5x = 19 + 1$

$5x = 20$

$x = 4$

$\therefore$ પ્રદેશ $A = \{1, 2, 4\}$

7. જો $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ જ્યાં $x \in z - \{-2\}$ હોય, તો $\frac{f(1)+f(-1)}{f(3)+f(0)}$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

(i) $f(1) = \frac{2(1)-1}{1+2}$

$= \frac{1}{3}$

(ii) $f(-1) = \frac{2(-1)-1}{-1+2}$

$= \frac{-3}{1}$

$f(-1) = -3$

(iii) $f(3) = \frac{2(3)-1}{3+2}$

$= \frac{5}{5}$

$= 1$

(iv) $f(-1) = \frac{2(0)-1}{0+2}$

$f(-1) = \frac{-1}{2}$

હવે, $\frac{f(1)+f(-1)}{f(3)+f(0)} = \frac{\frac{1}{3}+(-3)}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)}$

$= \frac{-8/3}{1/2}$

$= -\frac{8}{3} \times \frac{2}{1}$

$= -16/3$

8. **$f : N \rightarrow Z$ $f(x) = x^2 + x + 1$ અને $g : Z \rightarrow Z$ $g(x) = 5x - 3$ જ્યાં $x \in \{1, 2, 3\}$ હોય તો વિધેયની સમાનતા તપાસો.**

જવાબ: અહીં વિધેય f નો પ્રદેશ N છે અને વિધેય g નો પ્રદેશ Z છે. આમ બંને વિધેય સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નથી, તેથી f અને g સમાન વિધેય નથી.

9. **$f : N \rightarrow N$ $f(x) = x^3$ અને $g : N \rightarrow Z$ $g(x) = 3x^2 - 2x$; જ્યાં $x \in \{1, 2\}$ હોય તો બંને વિધેયની સમાનતા તપાસો.**

જવાબ: અહીં વિધેય f નો પ્રદેશ N છે અને વિધેય g નો પ્રદેશ પણ N છે. આમ બંને વિધેય સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોવાથી વિધેયની સમાનતા તપાસવા x ની આપેલ કિંમતો આગળ બંને વિધેયના મૂલ્ય શોધીએ.

(i) $x = 1$ આગળ

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $g(x) = 3x^2 - 2x$

$f(1) = (1)^3$ $\qquad$ $g(1) = 3(1)^2 - 2(1)$

$= 1$ $\qquad$ $= 3 - 2$

$= 1$

$\therefore\ f(1) = g(1)$

(ii) $x = 2$ આગળ

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $g(x) = 3x^2 - 2x$

$f(2) = (2)^3$ $\qquad$ $g(2) = 3(2)^2 - 2(2)$

$= 8$ $\qquad$ $= 12 - 4$

$= 8$

$\therefore\ f(2) = g(2)$

આમ, f અને g બંને વિધેય સમાન પ્રદેશ ઉપર વ્યાખ્યાયિત છે અને x ની આપેલી કિંમતો માટે બંને વિધેયના મૂલ્ય પણ સમાન છે. તેથી f અને g સમાન વિધેય છે.

10. **જો $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ હોય તો $f(-2)$, $f(1)$ અને $f(2)$ ની કિંમત શોધો.**

જવાબ: $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

(i) $f(-2) = 1 - \left(\frac{1}{-2} + \frac{1}{(-2)^2}\right)$

$= 1 - \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$= 1 - \left(\frac{-2+1}{4}\right)$

$= 1 - \left(\frac{-1}{4}\right)$

$$= \frac{4+1}{4}$$

$$f(-2) = 5/4$$

(ii) $$f(1) = 1 - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{(1)^2}\right)$$

$$= 1 - (1+1)$$

$$= 1 - 2$$

$$f(1) = -1$$

(iii) $$f(2) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(2)^2}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$f(2) = \frac{1}{4}$$

11. નીચેના વિધેયોના પ્રકાર નક્કી કરો.

(i) $f : N \to N\ f(x) = x^2 + 5\ ;\ x \in N$

(ii) $g : N \to Z\ g(x) = 2x + x^2\ ;\ x \in N$

(iii) $f : Z \to Z\ f(x) = x^2 - 2x - 3\ ;\ x \in Z$

(iv) $f : R \to R\ f(x) = 5\ ;\ x \in R$

જવાબ : (i) $f : N \to N\ f(x) = x^2 + 5$

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ N હોવાથી $x = 1, 2, 3, \ldots$ આગળ વિધેયના મૂલ્ય શોધીએ.

$f(1) = (1)^2 + 5 = 6$

$f(2) = (2)^2 + 5 = 9$

$f(3) = (3)^2 + 5 = 14$

અહીં xની જુદી જુદી કિંમતો માટે વિધેયના મૂલ્ય પણ જુદા જુદા મળે છે. તેથી આપેલું વિધેય એક-એક વિધેય છે.

(ii) $g : N \to Z\ g(x) = 2x + x^2$

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ N હોવાથી $x = 1, 2, 3, \ldots$ ને અનુરૂપ વિધેયનાં મૂલ્ય શોધીએ.

$g(1) = 2(1) + (1)^2 = 1$

$g(2) = 2(2) + (2)^2 = 0$

$g(3) = 2(3) + (3)^2 = -3$

અહીં xની જુદી જુદી કિંમતો માટે વિધેયના મૂલ્ય પણ જુદા જુદા મળે છે. તેથી આપેલું વિધેય એક-એક વિધેય છે.

(iii) $f : Z \to Z\ f(x) = x^2 - 2x - 3$

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ Z હોવાથી x નાં મૂલ્ય $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ ને અનુરૂપ વિધેયનાં

મૂલ્ય શોધીએ.

(1) $f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3$

$= 4 + 4 - 3$

$f(-2) = 5$

(2) $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3$

$= 1 + 2 - 3$

$f(-1) = 0$

(3) $f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3$

$= 0 - 0 - 3$

$f(0) = -3$

(4) $f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3$

$= 1 - 2 - 3$

$f(1) = -4$

(5) $f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3$

$= 4 - 4 - 3$

$f(2) = -3$

અહીં $x = 0$ અને $x = 2$ માટે વિધેયનું મૂલ્ય –3 છે. આમ x ની બે જુદી જુદી કિંમત માટે વિધેયનાં મૂલ્ય સમાન છે. તેથી આપેલ વિધેય અનેક-એક વિધેય છે.

(iv) $f : R \rightarrow R$ $f(x) = 5$

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ R હોવાથી x ની કિંમત કોઈપણ વાસ્તવિક કિંમત લખી શકાય.

$f(-2) = 5$

$f(-1) = 5$

$f(0) = 5$

$f(1) = 5$

$f(2) = 5$

અહીં x ની દરેક કિંમત માટે વિધેયનું મૂલ્ય સ્થિર (અચળ) રહે છે. તેથી આપેલું વિધેય અચળ વિધેય છે.

12. જો $f(x) = x(x + 1)(2x + 1)$ હોય તો $f(x) - f(x - 1)$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = x(x + 1)(2x + 1)$

$x = x - 1$ મૂકતાં

$f(x - 1) = (x - 1)(x - 1 + 1)\{2(x - 1) + 1\}$

$= (x - 1)(x)(2x - 2 + 1)$

$f(x - 1) = (x - 1)(x)(2x - 1)$

હવે $f(x) - f(x - 1) = x\ (x + 1)\ (2x + 1) - (x - 1)\ (x)\ (2x - 1)$

$= x\ \{(x + 1)\ (2x + 1) - (x - 1)\ (2x - 1)\}$

$= x\ \{2x^2 + x + 2x + 1 - 2x^2 + x + 2x - 1\}$

$= x\ \{6x\}$

$f(x) - f(x - 1) = 6x^2$

13. જો $f(x) = \frac{1}{x}$ હોય તો $2.f(x + a) - f(x - a)$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad f(x + a) = \frac{1}{x+a}$

$2.f(x + a) = \frac{2}{x+a}$

તેમજ $f(x - a) = \frac{1}{x-a}$

હવે, $2.f(x + a) - f(x - a) = \frac{2}{x+a} - \frac{1}{x-a}$

$$= \frac{2x - 2a - x - a}{(x+a)(x-a)}$$

$$= \frac{x - 3a}{x^2 - a^2}$$

14. જો $y = f(x) = \frac{Px + q}{rx - P}$ હોય તો સાબિત કરો કે $x = f(y)$

જવાબ: $y = \frac{Px + q}{rx - P}$

$y(rx - P) = Px + q$
$rxy - Py = Px + q$
$rxy - Px = Py + q$
$x(ry - P) = Py + q$

$x = \frac{Py + q}{ry - P}$

આમ, $x = f(y)$

15. જો $f(x) = 5x^2 + kx + 3$ અને $f(3) = 60$ હોય તો kની કિંમત શોધો.

જવાબ: $f(x) = 5x^2 + kx + 3$

અહીં, $f(3) = 60$ આપેલ છે.

$\therefore \quad 5(3)^2 + k(3) + 3 = 60$

$45 + 3k + 3 = 60$

$3k = 60 - 48$

$3k = 12$

$k = 4$

16. એક વસ્તુની માંગનો નિયમ $d = f(p) = \sqrt{2500 - 3P^2}$ છે. જ્યારે વસ્તુની કિંમત રૂા. 25 હોય ત્યારે માંગ શોધો. વસ્તુની કઈ કિંમતે માંગ શૂન્ય થશે ?

જવાબ: (i) $d = \sqrt{2500 - 3P^2}$

જ્યારે કિંમત P = 25 હોય ત્યારે માંગ d = ?

$d = \sqrt{2500 - 3(25)^2}$

$= \sqrt{2500 - 1875}$

$= \sqrt{625}$

$d = 25$

આમ જ્યારે કિંમત રૂા. 25 હોય ત્યારે વસ્તુની માંગ 25 એકમ હશે.

(ii) જ્યારે માંગ $d = 0$ હોય ત્યારે કિંમત P = ?

$d = \sqrt{2500 - 3P^2}$

$0 = \sqrt{2500 - 3P^2}$

બંને બાજુ વર્ગ લેતાં,

$0 = 2500 - 3P^2$

$3P^2 = 2500$

$P^2 = 833.33$

$P = \sqrt{833.33}$

$P = 28.87$

આમ જ્યારે વસ્તુની કિંમત 28.87 રૂા. હોય ત્યારે તેની માંગ શૂન્ય થશે.

5.7 સ્વાધ્યાય

1. વ્યાખ્યા આપો : વિધેય, પ્રદેશ, સહપ્રદેશ, વિસ્તાર
2. એક-એક વિધેય અને અનેક-એક વિધેયનો અર્થ સમજાવો.
3. બે વિધેય સમાન વિધેય છે એમ ક્યારે કહેવાય ?

દાખલાઓ :

1. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ હોય તો $f(0), f(1), f(2), f(-1)$ શોધો.

   [જવાબ : 1, 5, 31, 1]

2. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ હોય તો $f(0)$ શોધો. [જવાબ : 1]

3. જો $f(x) = x^3 + 3^x$ હોય તો $f(1) - f(0)$ ની કિંમત શોધો. [જવાબ : 3]

4. જો $f: A \rightarrow B, f(x) = 4x - 1$ અને $R_f = \{3, 11, 19\}$ હોય તો વિધેય fનો પ્રદેશ A શોધો.

5. $f: A \rightarrow B$ અને $f(x) = 2x^2 - x - 1$ તેમજ $A = \{1, -1, 2\}$ હોય તો વિધેયનો વિસ્તાર R_f શોધો.

   [જવાબ : $R_f = \{0, 2, 5\}$]

6. જો $f(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$ અને $g(x) = 5x - 3$ હોય તો $2f(1) - 3g(-1)$ ની કિંમત શોધો.

   [જવાબ: 30]

7. જો $f : Z - \{-2\} \rightarrow Z$ $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x+2}$ અને $g : Z \rightarrow Z$ $g(x) = x^2 - 5$ જ્યાં $x \in \{1, 2, 5\}$ હોય તો વિધેય f અને g સમાન વિધેય છે કે નહીં તે જણાવો.

   [જવાબ: બંને વિધેય જુદા જુદા પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોવાથી સમાન વિધેય નથી.]

8. જો $f : N \to N$ $f(x) = x^2$ અને $g : N \to Z$ $g(x) = 5x - 6$ જ્યાં $x \in \{2, 3\}$ હોય તો વિધેય f અને g ની સમાનતા તપાસો.
[જવાબ: f અને g સમાન વિધેય છે.]

9. જો $f : N \to Z$ $f(x) = x^2 + x - 3$ અને $x < 4$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર જણાવો.
[જવાબ: પ્રદેશ = $\{1, 2, 3\}$, સહપ્રદેશ = Z અને વિસ્તાર $R_f = \{-1, 3, 9\}$]

10. જો $f(x) = x + \frac{1}{x}$ હોય તો $f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$ ની કિંમત શોધો. [જવાબ: 0]

11. નીચેના વિધેયના પ્રકાર નક્કી કરો.
(i) $f : N \to Z$ $f(x) = 9x - 3, x \in N$
(ii) $f : N \to Z$ $f(x) = x^2 + 2x + 1, x \in N$
(iii) $g : N \to Z$ $g(x) = 5x - x^2, x \in N$
(iv) $f : N \to N$ $f(x) = 8, x \in N$
[જવાબ: (i) એક-એક વિધેય (ii) એક-એક વિધેય (iii) અનેક-એક વિધેય (iv) અચળ વિધેય]

12. જો $f(x) = x^2 - x$ હોય તો સાબિત કરો કે $f(x + 1) = f(-x)$

13. જો $f(x) = \frac{x(x+2)}{3}$ હોય તો $f(x + 2) - f(x)$ ની કિંમત શોધો.
[જવાબ: $\frac{4(x+2)}{3}$]

14. વિધેય $f(x) = x^2 + 3x + 1$ હોય તો x ની કઈ કિંમત માટે $f(x) = f(1)$ થાય ?
[જવાબ: $x = -4$ અથવા $x = 1$]

15. જો $f(x) = x^2 + x - 1$ હોય તો $\frac{2f(2) + f(1)}{f(3)}$ ની કિંમત શોધો. [જવાબ: 1]

16. એક વસ્તુની માંગનો નિયમ $x = \frac{100 - 2P}{3}$ છે. જ્યારે વસ્તુની કિંમત રૂા. 35 હોય ત્યારે તેની માંગ શોધો. વસ્તુની કઈ કિંમતે માંગ શૂન્ય થશે ?
[જવાબ: માંગ $x = 10$, $P = 50$]

17. નીચેની ખાલી જગ્યા પૂરો.

1. જો $f(x) = K$ જ્યાં $x \in N$ હોય તો f એ .... વિધેય છે.
2. વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશનો .... ગણ હોય છે.
3. ગણ A = {વિદ્યાર્થીઓના નામ} અને B = {વિદ્યાર્થીઓના રોલ નંબર} હોય તો ગણ A અને B વચ્ચેની સંગતતાને .... પ્રકારનું વિધેય કહેવાય.
4. $f : Z \to Z$ $f(x) = x^2 - x - 3$ એ .... પ્રકારનું વિધેય છે.
5. જો $f(x) = kx + 3$ અને $f(2) = 7$ હોય તો $k =$ ....
6. જો $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ હોય તો $f(0) =$ ....

7. જો વિધેય $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ હોય તો $g(x) + g(-x) =$ ....

8. જો વિધેય $f : A \rightarrow B$ અને $f(x) = 2x^2 - 2x$ તેમજ $A = \{1, 3\}$ હોય તો $R_f =$ ....

9. જો $f : A \rightarrow B$ અને $f(x) = 5x - 1$ જ્યાં $R_f = \{6, 21, 36\}$ હોય તો પ્રદેશ $A =$ ....

10. વિધેય $f(x) = ax + k$ માટે જો $f(2) + f(-2) = 10$ હોય તો $k =$ ....

11. $f : \{1, 3\} \rightarrow Z; f(x) = 5x - 1$ હોય તો વિધેયનો પ્રદેશ = ..., સહપ્રદેશ = ... અને વિસ્તાર = ...

12. $f(x) = x^3 + 1$ હોય તો $f(0) =$ ....

13. જો $f(x) = x^2 - 2x + 1$ હોય તો $f(0) =$ .... અને $f(1) =$ ....

14. જો $f(x) = 5x + 2$ અને $f(x) = 12$ હોય તો $x =$ ....

15. એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $d = \sqrt{3200 - 2P^2}$ છે. જ્યારે વસ્તુની કિંમત રૂ. 15 હોય ત્યારે તેની માંગ .... થાય.

[જવાબ : (1) અચળ (2) ઉપગણ (3) એક-એક વિધેય (4) અનેક-એક વિધેય (5) 2 (6) 1 (7) $4x^2$ (8) {0, 12} (9) {1, 5, 7} (10) 5 (11) પ્રદેશ = {1, 3}, સહપ્રદેશ = Z, વિસ્તાર = {4, 14} (12) 0 (13) 1, 0 (14) 2 (15) 52.44]

❖