એકમ-17 દ્વંદ્વની સમસ્યા

: રૂપરેખા :

17.0 ઉદ્દેશો :

સુરેખ આયોજનના ઘણા પ્રશ્નો એવા હોય છે કે જેને પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં રૂપાંતર કર્યા પછી તેનો ઉકેલ મેળવવો મુશ્કેલ હોય છે. ત્યારે આ પ્રશ્નને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં રૂપાંતર કરી ઉકેલ મેળવી શકાય છે. તેથી આ પ્રકરણમાં આવા પ્રશ્નોની સમજ મેળવીશું અને તેની વિવિધ ક્ષેત્રોમાં થતો ઉપયોગ સમજીશું.

17.1 પ્રાસ્તાવિક :

સુરેખ આયોજનની સમસ્યા સાથે સંકળાયેલ એક બીજા પ્રશ્નની અહીં ચર્ચા કરીશું. આ પ્રશ્નને અનુરૂપ એક વ્યવહારિક ઉદાહરણ જોઈએ. ધારો કે બે કંપનીઓ એક જ પ્રકારની વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. પરંતુ કંપની નફો કરે છે, જ્યારે કંપની ખોટ કરે છે. નફો કરતી કંપની તેનો નફો મહત્તમ થાય તેવો પ્રયત્ન કરે છે, જ્યારે કંપની ખોટ કરતી કંપની તેની ખોટ ન્યૂનત્તમ થાય તેવો પ્રયત્ન કરે છે. આ બંને કંપનીઓ સમાન પરિબળો હેઠળ કામ કરે છે. તેથી બંને કંપનીઓ માટે પરિસ્થિતિ અને પ્રશ્નો સરખા છે. આમ બંને કંપનીઓ માટે ઈષ્ટતમીકરણનો પ્રશ્ન હંમેશા જોડકામાં જોવા મળે છે, જેમાં એક પ્રશ્ન મહત્તમીકરણનો અને બીજો પ્રશ્ન ન્યૂનત્તમીકરણનો હોય છે. આમાંથી આપણે એક પ્રશ્નને પ્રાથમિક પ્રશ્ન તરીકે લઈએ તો બીજો પ્રશ્ન દ્વંદ્વનો પ્રશ્ન બને છે. દ્વંદ્વના સિદ્ધાંત આ બે જોડિયા પ્રશ્નો વચ્ચે આંતરિક સંબંધ દર્શાવે છે. તેથી સુરેખ આયોજનની સમસ્યામાં પ્રાથમિક પ્રશ્નના ઉકેલ પરથી દ્વંદ્વના પ્રશ્નનો ઉકેલ મળે છે અને દ્વંદ્વના પ્રશ્નના ઉકેલ પરથી પ્રાથમિક પ્રશ્નનો ઉકેલ મળે છે.

17.2 સુરેખ આયોજનમાં દ્વંદ્વ પ્રશ્નનો અર્થ :

સામાન્ય અર્થમાં Dual નો અર્થ બેવડું કે દ્વંદ્વ થાય છે. સુરેખ આયોજનમાં દરેક પ્રશ્નનો ઉકેલ બે રીતે મેળવેલ ઉકેલ સરખો મળે છે. ''સુરેખ આયોજનની સમસ્યાનો તેના મૂળ સ્વરૂપમાં આપેલા પ્રશ્નોનો ઉકેલ તેના અન્ય બીજી સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં તે જ માહિતી માટે બીજી રીતે આપેલા પ્રશ્ન સાથે સંકળાયેલ હોય છે.'' જેને દ્વંદ્વ કહેવામાં આવે છે. દ્વંદ્વનો દ્વંદ્વ મૂળ પ્રશ્ન બને છે. તેથી સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો ઉકેલ એક રીતે મેળવવો તે બીજી રીતે મેળવવા બરાબર

છે. આમ પ્રાથમિક પ્રશ્નનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ જાણતા હોઈએ તો તેના દ્વંદ્વના પ્રશ્નનો ઉકેલ પણ જાણી શકાય છે. તેથી ઉકેલ મેળવવા માટે લાગતો સમય દ્વંદ્વના ઉપયોગથી બચાવી શકાય છે.

17.3 સુરેખ આયોજનમાં દ્વંદ્વ પ્રશ્નના લક્ષણો અથવા મૂળ સમસ્યા અને દ્વંદ્વ સમસ્યા વચ્ચેના સંબંધનું અર્થઘટન

(1) પ્રાથમિક પ્રશ્નની અસમતાઓની સંખ્યા m ને અનુરૂપ દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં ચલની સંખ્યા બને છે. તેમજ પ્રાથમિક પ્રશ્નના ચલની સંખ્યા $(x_1, x_2 \dots x_n)$ જેટલા દ્વંદ્વના પ્રશ્નની અસમતાઓ હોય છે. આમ આપેલ પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં m પ્રતિબંધો અને n ચલો દ્વંદ્વમાં n પ્રતિબંધો m ચલોનો પ્રશ્ન બને છે.

(2) મૂળ (પ્રાથમિક) પ્રશ્નની પંક્તિ (હાર) એ દ્વંદ્વ પ્રશ્નનો સ્તંભ બને છે.

(3) પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં અસમતાઓની જમણી બાજુના ઘટકો (bj) અનુક્રમે દ્વંદ્વ પ્રશ્નના હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલોના સહગુણકો બને છે. જ્યારે પ્રાથમિક પ્રશ્નના હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલોના સહગુણકો (Cj) દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં અસમતાઓની જમણી બાજુના ઘટકો બને છે.

(4) જો પ્રાથમિક પ્રશ્ન મહત્તમ માટે હોય તો દ્વંદ્વનો પ્રશ્ન ન્યૂનત્તમ માટે બને છે. તે જ રીતે પ્રાથમિક પ્રશ્ન ન્યૂનત્તમીકરણનો હોય તો દ્વંદ્વનો પ્રશ્ન મહત્તમી કરણનો બને છે.

(5) પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં મહત્તમ બનાવવાનો હેતુલક્ષી પ્રશ્ન ≤ ના પ્રતિબંધો ધરાવતો હોય છે. જ્યારે તેનો દ્વંદ્વ ન્યૂનત્તમ બનાવવાના હેતુલક્ષી વાળો ≥ ના પ્રતિબંધો ધરાવતો પ્રશ્ન બને છે. આમ અસમતાની નિશાનીઓ ઉલટાઈ જાય છે.

(6) દ્વંદ્વના પ્રશ્નના સહગુણકનો શ્રેણિક એ પ્રાથમિક પ્રશ્નના સહગુણકોનો પ્રતિ શ્રેણિક બને છે.

(7) પ્રાથમિક અને દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં ચલોની કિંમતો ઋણ થતી નથી.

(8) દ્વંદ્વનો દ્વંદ્વ એ મૂળ પ્રશ્ન બને છે.

(9) બંને પ્રશ્નમાં ચલરાશિઓની સંખ્યા અનૃણ છે. જે પ્રાથમિક અને દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં ચલો અનૃણ પ્રતિબંધોની અસમતાએ ≤ 0 અને $0 \geq$ સ્વરૂપની હોય તેવા પ્રશ્નને સંમિત સુરેખ આયોજન પ્રશ્ન કહે છે.

17.4 સુરેખ આયોજનમાં દ્વંદ્વ પ્રશ્નના ફાયદાઓ કે ઉપયોગીતાઓ

(1) દ્વંદ્વની ગણતરી પ્રાથમિક ઉકેલની ચોકસાઈ તપાસે છે.

(2) અર્થશાસ્ત્રમાં દ્વંદ્વની પદ્ધતિ Input-Output (આવક-જાવક)ની નીતિ ઘડવામાં ઉપયોગી પુરવાર થાય છે.

(3) જો કોઈ સુરેખ આયોજનની સમસ્યામાં ચલોની સંખ્યા ઓછી હોય પરંતુ પ્રતિબંધોની સંખ્યા વધુ હોય તો આ પ્રશ્નનો દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં ચલોની સંખ્યા વધુ પરંતુ પ્રતિબંધોની સંખ્યા ઓછી હોવાને કારણે પ્રાથમિક પ્રશ્નને બદલે દ્વંદ્વ પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવવાનું સરળ બને છે.

(4) દ્વંદ્વનો પ્રશ્ન આર્થિક અર્થઘટન કે ભવિષ્યના નિર્ણય લેવામાં મેનેજમેન્ટને ખૂબ જ મદદરૂપ થાય છે.

(5) ભૌતિક શાસ્ત્ર, ઈજનેરી શાસ્ત્ર અને ગણિતમાં દ્વંદ્વ ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

(6) લાંબા ગાળાના આયોજનમાં તેની આર્થિક અગત્યતા વધી જાય છે.

(7) જ્યારે સુરેખ આયોજનની સમસ્યામાં પ્રારંભિક પ્રશ્ન દ્વારા ઉકેલ અશક્ય હોય ત્યારે દ્વંદ્વના પ્રશ્નનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

17.5 દ્વંદ્વ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નની રચના

(1) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને તેના પ્રમાણિત (ગાણિતીક) સ્વરૂપમાં ફેરવો.

(2) પ્રાથમિક પ્રશ્નની દરેક અસમતાઓ (પ્રતિબંધો) દીઠ એક દ્વંદ્વ ચલ વ્યાખ્યાયિત કરો કે જે ઋણ ન હોય.

(3) પ્રાથમિક પ્રશ્નના હેતુલક્ષી વિધેયના ચલના અચળ સહગુણકો (Cj)ને દ્વંદ્વના પ્રશ્નના પ્રતિબંધો (અસમતા)ની જમણી બાજુ આવતા અચળો તરીકે દર્શાવો.

(4) પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં પ્રતિબંધો (અસમતાઓ)માં જમણી બાજુએ આવતા ઘટકો (bj)ને દ્વંદ્વના હેતુલક્ષી વિધેયના અચળ કિંમતોના સદિશ તરીકે દર્શાવો.

(5) પ્રાથમિક પ્રશ્નના પ્રતિબંધોમાં ડાબી તરફના સુરેખ સંબંધોના એટલે કે ચલના સહગુણકોથી બનતા શ્રેણિકનો પ્રતિ શ્રેણિકના ઘટકોનો ઉપયોગ કરી દ્વંદ્વ પ્રશ્નના પ્રતિબંધોની જમણી તરફ સુરેખ સંબંધો મેળવો.

(6) પ્રાથમિક પ્રશ્નના અને તેને અનુરૂપ દ્વંદ્વ પ્રશ્નના પ્રતિબંધોમાં આવતા અસમતાના ચિન્હો ઉલટાવવા.

(7) હેતુલક્ષી વિધેયના ઈષ્ટમીકરણમાં જો પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં મહત્તમ બનાવવું હોય તો દ્વંદ્વમાં તેને લઘુતમ બનાવો અને જો લઘુત્તમ બનાવવું હોય તો દ્વંદ્વમાં તેને મહત્તમ બનાવવું.

17.6 સુરેખ આયોજનમાં દ્વંદ્વ પ્રશ્ન માટેનું વિસ્તૃત સ્વરૂપ

ધારો કે પ્રાથમિક પ્રશ્ન નીચે મુજબ છે. પ્રાથમિક પ્રશ્ન (P)

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતો :

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2\\
&\quad\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \text{ અને}\\
&x_1, x_2 \dots x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

આ પ્રશ્નના દ્વંદ્વ પ્રશ્નનું નિરૂપણ નીચે મુજબ થશે.

સૌપ્રથમ m અસમતાઓ આપેલ છે. તેથી તેટલા જ દ્વંદ્વ ચલો $y_1, y_2 \dots y_m$ વ્યાખ્યાયિત કરીશું. તેથી $b_1, b_2 \dots b_m$ એ હેતુલક્ષી વિધેયના સહગુણકો થશે.

દ્વંદ્વ પ્રશ્ન : (D)

હેતુલક્ષી વિધેય $= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતો :

$$
\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \le c_1\\
&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \le c_2\\
&\quad\vdots\\
&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \le c_n \text{ અને}\\
&y_1, y_2 \dots y_m \ge 0
\end{aligned}
$$

સમજૂતી :

આપણે અહીં $y_1, y_2 \dots y_m$ ચલો વ્યાખ્યાયિત કર્યા છે. હેતુલક્ષી વિધેયના સહગુણકો $b_1, b_2 \dots b_m$ છે. તેમજ પ્રાથમિક પ્રશ્ન મહત્તમીકરણનો છે. તેથી દ્વંદ્વનો પ્રશ્ન ન્યૂનત્તમીકરણનો થશે માટે હેતુલક્ષી વિધેય W ને ન્યૂનત્તમ બનાવવાનું છે.

શરતો : ડાબી બાજુ ચલના સહગુણકો પ્રાથમિક પ્રશ્નના શ્રેણિકના પ્રતિ શ્રેણિક એટલે કે હારમાં સહગુણકો તે સ્તંભમાં લખેલ છે. દા.ત. પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં પ્રથમ હાર ચલના સહગુણકો $a_{11}, a_{12} \dots a_{1n}$ છે. જે દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં પ્રથમ સ્તંભના ચલના સહગુણકો તરીકે દર્શાવ્યા છે.

જમણી બાજુના અચળાંકો પ્રાથમિક પ્રશ્નના હેતુલક્ષી વિધેયના સહગુણકો લીધા છે જે $c_1, c_2 \dots c_n$ છે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં અસમતાઓ $\leq$ છે જે દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં $\geq$ થાય છે.

17.7 ઉદાહરણો

ઉદા.1 નીચેના પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં દર્શાવો. પ્રાથમિક પ્રશ્ન (P)

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 30x_1 + 40x_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $x_1 + 2x_2 \leq 20$

$4x_1 + 9x_2 \leq 360$

$2x_1 + x_2 \leq 60$ અને

$x_1, x_2 \geq 0$

ઉકેલ : સૌપ્રથમ પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં ત્રણ અસમતાઓ છે. માટે દ્વંદ્વમા પ્રશ્નમાં ત્રણ ચલો y_1 y_2 અને y_3 વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

હેતુલક્ષી વિધેય Z મહત્તમ છે. તેથી દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં ન્યૂનત્તમ બનાવીશું.

ત્રણેય અસમતાઓના જમણી બાજુના અચળાંકો અનુક્રમે 20, 360 અને 60 છે. જે દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેયના સહગુણકો થશે. તેમજ પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલના સહગુણકો અને છે જે દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં શરતો (અસમતાઓ) ની જમણીબાજુના અચળાંકો બનશે.

અસમતાઓમાં પ્રથમ હારની ચલના સહગુણકો 1 અને 2 છે જે દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં સ્તંભ બનશે. તે જ રીતે બીજી અસમતા (Q12) ની ચલના સહગુણકો 4 અને 9 છે જે બીજા સ્તંભમાં આવશે. તે જ રીતે ત્રીજી હાર પણ સ્તંભ બનશે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં અસમતાનું ચિહ્ન $\leq$ છે જે દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં $\geq$ થશે.

દ્વંદ્વ પ્રશ્ન (D)

હેતુલક્ષી વિધેય $w = 20y_1 + 360y_2 + 60y_3$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનતમ બનાવો.

શરતોઃ $y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 30$

$2y_1 + 9y_3 + y_3 \geq 40$ અને

$y_1, y_2 \geq 0$

ઉદા.2 નીચેના પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં ફેરવો. પ્રાથમિક પ્રશ્ન (P)

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_3$ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20$ અને

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

ઉકેલ : દ્વંદ્વના પ્રશ્નના સામાન્ય નિયમોનો ઉપયોગ કરી દ્વંદ્વ પ્રશ્ન નીચે મુજબ મેળવી શકાય. પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં બે પ્રતિબંધો છે. તેથી દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં બે ચલો y_1 અને y_2 વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

હેતુલક્ષી વિધેય $w = 20y_1 + 20y_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનતમ બનાવો.

શરતો : $y_1 + 2y_2 \geq 1$

$2y_1 + y_2 \geq 2$

$2y_1 + 3y_2 \geq 3$

$3y_1 + 2y_2 \geq 4$ અને

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

સમજૂતી :

અહીં બે અસમતાની જમણીબાજુ કિંમતો 20, 20 છે. જે હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલ y_1 અને y_2ના સહગુણકો બને છે અને પ્રાથમિક પ્રશ્નના હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલ x_1, x_2, x_3, x_4 ના સહગુણકો અનુક્રમે 1, 2, 3 અને 4 છે જે દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં અસમતાની જમણી બાજુના અંકો બને છે. પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં પહેલી અસમતા (હાર)માં x ના સહગુણકો અનુક્રમે 1, 2, 2, 3 છે જે દ્વંદ્વમાં સ્તંભ (Yj) ના સહગુણકો બને છે. તે જ રીતે બીજી હાર બીજો સ્તંભ બને છે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં $\leq$ ની નિશાનીઓ છે જે દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં $\geq$ બને છે.

ઉદા.3 નીચેના પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં ફેરવો. પ્રાથમિક પ્રશ્ન (P)

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 5x_1 + 10x_2 + 8x_3$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતો : $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 60$

$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 72$

$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 100$ અને

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

ઉકેલ : અહીં ત્રણ અસમતાઓ (શરતો) છે તેથી ત્રણ ચલો વ્યાખ્યાયિત કરીશું દ્વંદ્વ પ્રશ્ન (D) પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં ત્રણ પ્રતિબંધો છે. તેથી દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં ત્રણ ચલો y_1, y_2 અને y_3 વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

હેતુલક્ષી વિધેય $w = 60y_1 + 72y_2 + 100y_3$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનતમ બનાવો.

શરતો : $3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 5$

$5y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 10$

$2y_1 + 4y_2 + 5y_2 \geq 8$ અને

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

સમજૂતી :

અહીં ત્રણ અસમતાઓ માટે દ્વંદ્વના ત્રણ ચલો y_1, y_2, y_3 વ્યાખ્યાયિત કર્યા છે. હેતુલક્ષી વિધેય માટે સહગુણકો, પ્રાથમિક પ્રશ્નના અસમતાની જમણી બાજુના અંકો 60, 72 અને 100 લીધા છે. તે જ રીતે પ્રાથમિક પ્રશ્નના હેતુલક્ષી વિધેય Zમાં (x_i) ના સહગુણકો 5, 10 અને 8 દ્વંદ્વની અસમતામાં જમણીબાજુના અંકો તરીકે લીધા છે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં $\le$ ચિહ્ન દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં $\ge$ કરેલ છે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં અસમતામાં ડાબી બાજુ ચલના સહગુણકો હારમાં છે તે દ્વંદ્વમાં સ્તંભના સહગુણકો થાય છે.

ઉદા.4 નીચેના પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં ફેરવો. પ્રાથમિક પ્રશ્ન (P)

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 7x_1 + 3x_2 + 8x_3$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતો : $8x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3$

$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 4$

$4x_1 + x_2 + 5x_3 \le 1$

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 7$ અને

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

ઉકેલ : પ્રાથમિક પ્રશ્ન ન્યૂનત્તમનો છે. તેથી દ્વંદ્વ પ્રશ્ન મહત્તમનનો બનશે. અહીં ચાર અસમતાઓ છે. તેથી દ્વંદ્વના ચાર અસમતાઓ છે. તેથી દ્વંદ્વના ચાર ચલો y_1, y_2, y_3 અને y_4 વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

દ્વંદ્વ પ્રશ્ન (D)

હેતુલક્ષી વિધેય $w = 3y_1 + 4y_2 + y_3 + 7y_4$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતો : $8y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 \le 7$

$2y_1 + 6y_2 + y_3 + 5y_4 \le 3$

$y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 2y_4 \le 8$ અને

$y_1, y_2, y_3, y_4 \le 0$

સમજૂતી :

અહીં ચાર અસમતાઓ આપેલ છે. તેથી દ્વંદ્વ પ્રશ્ન માટે ચાર ચલો y_1, y_2, y_3 અને y_4 વ્યાખ્યાયિત કર્યા છે.

પ્રાથમિક પ્રશ્ન ન્યૂનત્તમનો છે તેથી દ્વંદ્વનો પ્રશ્ન મહત્તમ થશે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં ચલો x_1, x_2, x_3 એમ ત્રણ છે તેથી દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં ચાર અસમતાઓ થશે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં અસમતાઓ $\ge$ સ્વરૂપની છે. તેથી દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં $\le$ થાય છે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં અસમતાઓની જમણી બાજુના અંકો 3, 4, 1 અને 7 છે. જે દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલના સહગુણકો બને છે.

પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેય ચલના સહગુણકો (7, 3, 8) દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં અસમતાઓની જમણી બાજુની કિંમતો બને છે.

ઉદા.5 નીચેના પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં રજૂ કરો.

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 20x_1 + 40x_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતો : $4x_1 + 3x_2 \ge 60$

$4x_1 + 5x_2 \ge 40$

$x_1 + 4x_2 \ge 20$

$x_1 + 2x_2 \ge 16$ અને

$x_1, x_2 \ge 0$

ઉકેલ : અહીં ચાર અસમતાઓ છે માટે દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં ચાર ચલો y_1, y_2, y_3, y_4 વ્યાખ્યાયિત કરીશું. તેમજ પ્રાથમિક પ્રશ્ન ન્યૂનત્તમ સ્વરૂપનો છે. તેથી દ્વંદ્વ પ્રશ્ન મહત્તમનો થશે. દ્વંદ્વની

શરતો મુજબ દ્વંદ્વ પ્રશ્ન નીચે મુજબ લખી શકાય.

હેતુલક્ષી વિધેય $w = 60y_1 + 40y_2 + 20y_3 + 16y_3$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતો : $4y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 \le 20$

$3y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 2y_4 \le 40$ અને

$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$

ઉદા.6 એક ઉત્પાદક કંપની A અને B પ્રકારની વસ્તુઓનું ઉત્પાદન I અને II મશીનો પર કરે છે. આ અંગેની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

મશીનો	વસ્તુઓ		ઉપલબ્ધ
	A	B	કલાક
I	30	20	300
II	5	10	110
નફો (દર યુનિટે)	6	8	

મહત્તમ નફો થાય તે રીતે વસ્તુઓ A અને B નો ઉત્પાદન એકમો નક્કી કરવા માટે આ પ્રશ્નને પ્રાથમિક પ્રશ્ન તથા દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : પ્રાથમિક પ્રશ્ન (P)

ધારો કે ઉત્પાદક A પ્રકારની x_1 અને B પ્રકારની x_2 વસ્તુઓ બનાવે છે.

$\therefore$ હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 6x_1 + 8x_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $30x_1 + 20x_2 \le 300$

$5x_1 + 10x_2 \le 110$ અને

$x_1, x_2 \ge 0$

દ્વંદ્વ પ્રશ્ન (D)

ધારો કે મશીન I પર, y_1 કિંમત છે અને મશીન II પર દર કલાકે y_2 કિંમત છે.

$\therefore$ હેતુલક્ષી વિધેય $w = 300y_1 + 110y_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $30y_1 + 5y_2 \ge 6$

$20y_1 + 10y_2 \ge 8$ અને

$y_1, y_2 \ge 0$

ઉદા.7 એક ઉત્પાદક A અને B એમ બે પ્રકારની વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. વસ્તુ A ના એક એકમ દીઠ ₹ 10 અને વસ્તુ A ના એકમ એકમદીઠ ₹ 35 નફો મળે છે. તેમજ આ વસ્તુઓ બનાવવા માટે જરૂરી કાચોમાલ અને મશીનના કલાકોનો કોષ્ટક નીચે મુજબ છે.

વસ્તુઓ			
	A	B	દર અઠવાડિયે ઉપલબ્ધ
કાચો માલ	2 કિગ્રા	3 કિગ્રા	60 કિગ્રા
મશીનના કલાકો	4 કલાક	3 કલાક	96 કલાક

આ પ્રશ્નને પ્રાથમિક પ્રશ્ન અને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં દર્શાવો.

પ્રાથમિક પ્રશ્ન (P)

ધારો કે ઉત્પાદક A પ્રકારની x_1 અને B પ્રકારની x_2 વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે.

$\therefore$ હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 40x_1 + 35x_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતો : $2x_1 + 3x_2 \le 60$

$4x_1 + 3x_2 \le 96$ અને

$x_1, x_2 \ge 0$

\- **દ્વંદ્વ પ્રશ્ન (D)**

ધારો કે ઉત્પાદકને કાચામાલ માટે એક કિલોગ્રામના ₹ y_1 ચૂકવવા પડે છે. અને એક કલાક મશીનના વપરાશ પર ₹ y_2 ખર્ચ થાય છે.

$\therefore$ હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 60y_1 + 96y_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $2y_1 + 4y_2 \ge 40$

$3y_1 + 3y_2 \ge 35$ અને

$y_1, y_2 \ge 0$

17.8 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

17.8.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં દ્વંદ્વનો અર્થ સમજાવી તેના લક્ષણો લખો.
2. સુરેખ આયોજનની સમસ્યામાં દ્વંદ્વના પ્રશ્નની ઉપયોગીતાઓ સમજાવો.
3. સુરેખ આયોજનની સમસ્યાના દ્વંદ્વના પ્રશ્નની રચના વિગતે સમજાવો.
4. સુરેખ આયોજનમાં દ્વંદ્વ પ્રશ્ન માટેનું વિસ્તૃત સ્વરૂપ લખો.
5. સુરેખ આયોજનની સમસ્યામાં પ્રાથમિક પ્રશ્ન અને દ્વંદ્વ પ્રશ્ન વચ્ચેના સંબંધનું અર્થઘટન કરો.
6. નીચેના સુરેખ આયોજનના પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં રજૂ કરો.

   હેતુલક્ષી વિધેયને મહત્તમ બનાવો. $Z = 4x_1 + 6x_2$

શરતો : $x_1 + 2x_2 \le 2$

$x_1 + 3x_2 \le 4$ અને

$x_1, x_2 \ge 0$

7. નીચે આપેલ પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં રજૂ કરો.

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 3x_1 + 2x_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $2x_1 + x_2 \le 5$

$x_1 + x_2 \le 3$ અને $x_1, x_2 \ge 0$

8. નીચે આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં દર્શાવો.

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 250$

$4x_1 + 3x_2 \le 150$

$2x_1 + x_3 \le 50$ અને $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

9. નીચેના પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં રજૂ કરો.

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 12x_1 + 20x_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન રહીને ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $6x_1 + 8x_2 \ge 80$

$7x_1 + 12x_2 \ge 150$ અને $x_1, x_2 \ge 0$

10. **નીચે આપેલ પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં રજૂ કરો.**

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 60x_1 + 72x_2 + 100x_3$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતોઃ $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 5$

$5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 10$

$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 8$ અને $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

11. **નીચે આપેલ પ્રાથમિક પ્રશ્નને દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં રજૂ કરો.**

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$ ને ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતો : $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 7$

$6x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4$

$-7x_1 + 2x_2 + x_3 \geq -10$

$x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3$

$4x_1 + 7x_2 - 2x_3 \geq 2$ અને $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

16.8.2 નીચે આપેલ પ્રશ્નમાં યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી જવાબો આપો.

(1) સુરેખ આયોજનની સમસ્યાના પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં ત્રણ ચલો અને ચાર અસમતાઓ આપેલ હોય તો દ્વંદ્વના પ્રશ્નના ચલોની સંખ્યા કેટલી થશે ?

(*a*) 12 (*b*) 7 (*c*) 3 (*d*) 4

(2) પ્રાથમિક પ્રશ્નના હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલના સહગુણકો (Cj) દ્વંદ્વ પ્રશ્નમાં .... બને છે.

(*a*) હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલના સહગુણકો

(*b*) અસમતાઓમાં ડાબી બાજુના સહગુણકો

(*c*) અસમતાઓમાં જમણી બાજુના અંકો

(*d*) આપેલમાંથી એકપણ નહિ

(3) પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં અસમતાઓમાં ડાબી બાજુ ચલના સહગુણકોનો શ્રેણિક દ્વંદ્વના પ્રશ્નના અસમતાઓમાં ડાબી બાજુના સહગુણકો .... બને છે.

(*a*) એકમ શ્રેણિક (*b*) પ્રતિ શ્રેણિક

(*c*) સંમિત શ્રેણિક (*d*) વ્યસ્ત શ્રેણિક

(4) દ્વંદ્વના પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેયમાં ચલના સહગુણકો પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં .... ને લેવામાં આવે છે.

(*a*) b_j (*b*) c_j (*c*) c_{ij} (*d*) આપેલમાંથી એકપણ નહિ.

(5) પ્રાથમિક પ્રશ્નમાં m પ્રતિબંધો અને n ચલો દ્વંદ્વમાં .... પ્રતિબંધો અને .... ચલોનો પ્રશ્ન બને છે.

(*a*) n અને m (*b*) m અને n(*c*) c_j અને b_j (*d*) b_j અને c_j

(6) પ્રાથમિક પ્રશ્નના દરેક અસમતાઓ પ્રતિબંધો દીઠ .... દ્વંદ્વ ચલ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(*a*) બે (*b*) એક (*c*) ત્રણ (*d*) એકપણ નહિ

જવાબો :

17.8.1 ના જવાબો

(6) ન્યૂનત્તમ બનાવો $w = 2y_1 + 4y_2$

શરતો : $y_1 + y_2 \geq 4$

$2y_1 + 3y_2 \geq 6$ અને $y_1, y_2 \geq 0$

(7) ન્યૂનત્તમ બનાવો $w = 5y_1 + 3y_2$

શરતો : $2y_1 + y_2 \geq 3$

$y_1 + y_2 \geq 2$ અને $y_1, y_2 \geq 0$

(8) ન્યૂનત્તમ બનાવો $w = 250y_1 + 150y_2 + 50y_3$

શરતો : $8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 20$

$2y_1 + 3y_2 + 0y_3 \geq 6$

$3y_1 + 0y_2 + y_3 \geq 8$ અને $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

(9) મહત્તમ બનાવો $w = 80y_1 + 150y_2$

શરતો : $6y_1 + 7y_2 \leq 12$

$8y_1 + 12y_2 \leq 20$ અને $y_1, y_2 \geq 0$

(10) મહત્તમ બનાવો $W = 5y_1 + 10y_2 + 8y_3$

શરતો : $3y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 60$

$4y_1 + 4y_2 + 4y_3 \leq 72$

$2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \leq 100$

(11) મહત્તમ બનાવો $w = 7y_1 + 4y_2 - 10y_3 + 3y_4 + 2y_5$

શરતો : $3y_1 + 6y_2 - 7y_3 + y_4 + 4y_5 \leq 3$

$5y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 + 7y_5 \leq -2$

$4y_1 + 3y_2 + y_3 + 5y_4 - 2y_5 \leq 4$ અને $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$

17.8.2 ના જવાબો

1 (d), 2 (c), 3 (b), 4 (a), 5 (a), 6 (b)

17.9 પારિભાષિક શબ્દો

દ્વંદ્વ : બેવડું, સુરેખ આયોજનમાં પ્રાથમિક પ્રશ્નને બીજી રીતે દર્શાવવામાં આવે તેને દ્વંદ્વ કહે છે.

પ્રાથમિક પ્રશ્ન : સુરેખ આયોજનની સમસ્યાને પ્રથમ વખત ગાણિતિક સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે તેને પ્રાથમિક પ્રશ્ન કહે છે.

શ્રેણિક : સંખ્યાઓની લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે.

16.12 સંદર્ભસૂચિ

1. ક્રિયાત્મક સંશોધનની ઈષ્ટતમ પદ્ધતિઓ
   પ્રો. રમેશચંદ્ર એન. દેસાઈ, ડૉ. ભરતભાઈ બી. જાની
   યુનિવર્સિટી ગ્રંથનિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય, અમદાવાદ-૬

❖