એકમ-16 સુરેખ આયોજનની સમસ્યા

: રૂપરેખા :

16.0 ઉદ્દેશો :

વિવિધ ક્ષેત્રે ઉદ્ભવતી જુદી જુદી સમસ્યાઓમાંથી સુરેખ આયોજનની સમસ્યા વિશે જાણી શકશો અને આવી સમસ્યાઓનો ગાણિતિક પદ્ધતિથી ઉકેલ કેવી રીતે મેળવવામાં આવે છે તેની સરળ સમજૂતી આપવામાં આવેલ છે. જેથી આવી સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી શકશો.

16.1 પ્રસ્તાવિક :

આધુનિક સમયમાં ઘણાબધા ક્ષેત્રોમાં મર્યાદિત સાધનોનો કાર્યક્ષમ ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો કે જેથી ઈષ્ટતમ ધ્યેય પ્રાપ્ત કરી શકાય. આવા સાધનોમાં મૂડી, કાચો માલ, માનવ કલાકો, સરકારી નિયંત્રણો, યંત્રોની કાર્યક્ષમતા વગેરે હોઈ શકે છે. આ સાધનો મર્યાદિત હોય છે, તેનો એવો ઉપયોગ કરવો જેથી જે હેતુ હોય તેને ઈષ્ટતમ બનાવે એટલે કે નફો હોય તો મહત્તમ કરવો અને ખર્ચ હોય તો ન્યૂનત્તમ કરવું.

સુરેખ આયોજનનો ઉપયોગ સૌ પ્રથમ વખત 1947માં અમેરિકાના હવાઈ દળ માટે જ્યોર્જ બી. ડાન્ટઝિંગ અને માર્શલ વૂડે કર્યો હતો. આમ બીજા વિશ્વયુદ્ધ દરમિયાન જુદી જુદી વ્યૂહરચનાઓમાં નિર્ણય ઘડતરના સાધન તરીકે આ પદ્ધતિનો બહોળા પ્રમાણમાં ઉપયોગ થયો હતો. આજે તેનો ઉપયોગ ઔદ્યોગિક ક્ષેત્રે, કૃષિ ક્ષેત્રે, વાણિજ્ય ક્ષેત્રે વગેરેમાં વ્યાપક રીતે કરવામાં આવે છે.

16.2 સુરેખ આયોજનનો અર્થ અને વ્યાખ્યા :

સુરેખ શબ્દનો અર્થ બે ચલરાશિઓ વચ્ચેના સુરેખ સંબંધનું સૂચન કરે છે, જ્યારે આયોજન શબ્દનો અર્થ સમસ્યાનો ઉકેલ લાવવા માટે કે ઈચ્છિત ઉદ્દેશ્ય પ્રાપ્ત કરવા માટે વિવિધ વૈકલ્પિક વ્યૂહરચનાઓમાંથી કોઈ ચોક્કસ વ્યૂહરચના પસંદ કરી મર્યાદિત સાધનોનો મહત્તમ ઉપયોગ કરી પદ્ધતિસર નિર્ણય લેવાનું સૂચન કરે છે. સુરેખ આયોજન એ સુરેખ સમસ્યાની ગાણિતિક મોડેલમાં રજૂઆત અને ઉકેલ માટેની એક કાર્યાત્મક પદ્ધતિ છે, જેમાં સુરેખ સમસ્યાઓ મહત્તમ નફો અથવા ન્યૂનતમ ખર્ચના ધ્યેયનું સ્પષ્ટીકરણ કરે છે અને આવો હેતુ કેટલીક મર્યાદાઓને આધીન હોય, આ

મર્યાદાઓ નાણાં, યંત્ર સામગ્રી, માનવ કલાકો, કાચો માલ જેવા મર્યાદિત સાધનો હોય છે. આમ કોઈપણ સમસ્યાના હેતુને સિદ્ધ કરવા માટે ઊભા થતા અવરોધો કે જેને સુરેખ અસમતામાં દર્શાવવામાં આવે તેને ધ્યાનમાં રાખી હેતુલક્ષી વિધેયને મહત્તમ કે ન્યૂનત્તમ કરવા માટે દર્શાવવામાં આવતા ગાણિતીક સ્વરૂપને સુરેખ આયોજન કરે છે.

ફરગ્યુસન અને સાર્જન્ટના મત અનુસાર

''મર્યાદિત સાધનોનો અનેક રીતે ઉપયોગ થઈ શકતો હોય તેની ઈષ્ટતમ ફાળવણી કરી એકમના કોઈ ચોક્કસ હેતુ જેવાં કે, મહત્તમ નફો અથવા ન્યૂનત્તમ ખર્ચ કે ન્યૂનત્તમ સમય મેળવવાની એક પદ્ધતિ એટલે સુરેખ આયોજન.''

16.3 સુરેખ આયોજનમાં વપરાતા કેટલાંક પદો

સુરેખ આયોજનની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ સમજતાં પહેલા તેનો મૂળભૂત ખ્યાલ અને કેટલાંક પદોની સમજૂતી મેળવી લઈશું જે નીચે મુજબ છે.

(i) હેતુલક્ષી વિધેય Objective Function

ચલ રાશિઓ ધરાવતું સુરેખ વિધેય કે જેને ઈષ્ટત્તમ (એટલે કે મહત્તમ કે ન્યૂનત્તમ) બનાવવાનું હોય તે વિધેયને હેતુલક્ષી વિધેય કહે છે. આવા વિધેયને Z વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે વેચાણ, આવક, નફો વગેરેને મહત્તમ બનાવવાનો હેતુ હોય છે. જ્યારે ખર્ચ, સમય વગેરેને ન્યૂનત્તમ બનાવવાના હેતુ હોય છે. દા.ત. x અને yની એવી કિંમતો મેળવવાની હોય કે જેથી સુરેખ વિધેય $Z = 10x + 20y$ મહત્તમ કે લઘુત્તમ બને.

(ii) પ્રતિબંધો [બાધકો] Constraints

આપેલ સમસ્યાને લગતી મર્યાદાઓ કે જેને સુરેખ અસમતાઓ દ્વારા રજૂ કરી શકાય છે. તેને પ્રતિબંધો કે બાધકો કહે છે. દા.ત. $x + 3y \leq 15$, $2x + 5y \geq 10$ વગેરે. નોંધ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ને અનૃણ અસમતાઓ કહે છે.

(iii) ઉકેલ Solution

આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં સમાવિષ્ટ બધી જ અસમતાઓ (પ્રતિબંધો)નું સમાધાન કરતા ચલ કિંમતોના ગણને તે પ્રશ્નનો ઉકેલ કહે છે.

(iv) પ્રાપ્ય ઉકેલ Feasible Solution

આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલની ચલરાશિઓની કિંમત કદાપિ ઋણ ન થાય તે શરત સંતોષતા ઉકેલને પ્રાપ્ય ઉકેલ કહે છે.

(v) ઈષ્ટ પ્રાપ્ય ઉકેલ Optimum feasible solution

જે પ્રાપ્ય ઉકેલથી આપેલ પ્રશ્નના હેતુલક્ષી વિધેયનું ઈષ્ટત્તમ (મહત્તમ કે ન્યૂનત્તમ) મૂલ્ય મળે તેને પ્રશ્નનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ કહે છે.

16.4 સુરેખ આયોજનની ધારણાઓ (Assumptions of linear programming)

(i) હેતુલક્ષી વિધેય હંમેશા સુરેખ હોય છે.

(ii) ચલરાશિઓની કિંમતો હંમેશા ધન કે શૂન્ય હોય છે. એટલે કે ઋણ હોઈ શકે નહિ.

(iii) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં આવતી અસમતાઓ (પ્રતિબંધો) પણ સુરેખ હોય છે.

(iv) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં અમસતાઓ (પ્રતિબંધો)ની સંખ્યાઓ મર્યાદિત હોય છે.

16.5 સુરેખ આયોજનના ઉપયોગો

આધુનિક યુગમાં નિર્ણય ઘડતરના એક સાધન તરીકે સુરેખ આયોજન ખૂબ જ ઉપયોગી છે. સુરેખ આયોજનનો ઔદ્યોગિક ક્ષેત્રે, ખેતીવાડી ક્ષેત્રે, સંરક્ષણ ક્ષેત્રે તેમજ અન્ય ક્ષેત્રોમાં ખૂબ જ ઉપયોગ થાય છે. તેની ઉપયોગીતા નીચે મુજબ વર્ણવી શકાય.

(1) ઔદ્યોગિક ક્ષેત્રમાં

ઔદ્યોગિક ક્ષેત્રમાં મર્યાદિત સાધનો જેવા કે યંત્રો, માનવ કલાકો, કાચોમાલ વગેરેનો ઉપયોગ કરીને ઈષ્ટ ઉત્પાદન નિતિ નક્કી કરવા માટે, મર્યાદિત મૂડી રોકાણ દ્વારા મહત્તમ આવક મેળવવા માટે, યોગ્ય રોકાણનિતિ નક્કી કરવા માટે, ભવિષ્યમાં થનારી માંગનો અંદાજ મેળવી ખર્ચ ઓછામાં ઓછો આવે તે રીતે જથ્થા નિયંત્રણ નિતિ ઘડવા માટે સુરેખ આયોજનનો ઔદ્યોગિક ક્ષેત્રમાં વ્યાપક ઉપયોગ થાય છે.

(2) ખેતીવાડી ક્ષેત્રે

દરેક સિઝનમાં થતા વિવિધ પાકો પૈકી કયા પાકનું કેટલી જમીનમાં વાવેતર કરવું કે જેથી મહત્તમ ફાયદો થઈ શકે, ખેતી વિષયક આયોજનમાં મર્યાદિત સાધનો જેવા કે જમીન, પાણી પુરવઠો, મજૂરી, મૂડી વગેરેની ઈષ્ટતમ ફાળવણી કરવા માટે કે યોગ્ય રસાયણોનું મિશ્રણ નક્કી કરવા, વધુ સારી ગુણવત્તાવાળા ખાતરનું ઉત્પાદન કરવા માટે સુરેખ આયોજન ઉપયોગી છે.

(3) સંરક્ષણ ક્ષેત્રે

હવાઈ શાસ્ત્રોની સંરચના નક્કી કરી હવાઈ બળતરનો વપરાશ ન્યૂનત્તમ બનાવવામાટે અને શક્ય હોય તેટલા ઓછા ખર્ચે કે ઓછા નુકસાને યોગ્ય જરૂરી ધોરણો પ્રમાણે સંરક્ષણ નિતિ નક્કી કરવા માટે સુરેખ આયોજન ઉપયોગી છે.

(4) આહાર વિશેષજ્ઞ માટે

આધુનિક સમયમાં વ્યક્તિઓને તેમની ફિટનેસ અંગેની જાગૃતતા વધવાને કારણે રોજિંદા ખોરાક માટેની ન્યૂનત્તમ જરૂરિયાત પૂર્ણ કરવા માટે સુરેખ આયોજન ઉપયોગી પુરવાર થઈ રહ્યું છે.

(5) અન્ય ક્ષેત્રોમાં

સુરેખ આયોજન અન્ય ક્ષેત્રો જેવાં કે વાહનવ્યવહાર,નિયુક્તિ, શિક્ષણ, મિડિયા રીસર્ચ, વહીવટી સંચાલન, બજેટ નિર્ધારણ, અર્થમિતિ શાસ્ત્ર વગેરેમાં પણ ઉપયોગી છે.

16.6 સુરેખ આયોજનની મર્યાદાઓ (Limitation of linear Programming)

(1) સુરેખ આયોજનની ધારણા એ છે કે હેતુલક્ષી વિધેય અને અસમતાઓ સુરેખ હોય છે. પરંતુ ઉદ્યોગ અને ધંધાકીય એકમોને લગતા પ્રશ્નોમાં ચલરાશિઓ સામાન્ય રીતે સુરેખ સંબંધોથી જોડાયેલી હોતી નથી તેથી તેવા પ્રશ્નો સુરેખ આયોજનથી ઉકેલી શકાતા નથી.

(2) સુરેખ આયોજનનની રીતે પ્રશ્નનો ઉકેલ ફક્ત પૂર્ણાંક કિંમતોમાં જ મળે તેવું બની શકતું નથી એટલે કે કેટલીક વખત ઈષ્ટતમ ઉકેલ અપૂર્ણાંક પણ હોઈ શકે છે.

(3) સુરેખ આયોજનમાં ઉદ્ભવતા પ્રશ્નોમાં વખતો વખત સમયાનુસાર થતા ફેરફારો તથા અનિશ્ચિતતાને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતા નથી.

(4) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને લગતી આંકડાકીય માહિતી અચળ રહે છે, તેમ ધારવામાં આવે છે. પરંતુ વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં આ માહિતી અચળ રહેતી નથી. ઉપરાંત સંપૂર્ણ જ્ઞાત પણ હોતી નથી.

(5) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં એક જ હેતુલક્ષી વિધેય હોય છે, પરંતુ વાસ્તવિક પ્રશ્નમાં એક કરતાં વધુ હેતુઓ હોય, ત્યારે ફક્ત એક હેતુલક્ષી વિધેય બનાવવું ખૂબ જ મુશ્કેલ છે.

16.7 સુરેખ આયોજનની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ (Mathematical formulation of L.P. Problem)

ધારો કે સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં $x_1, x_2, \dots x_n$ આમ કુલ n ચલોની કિંમતો શોધવાની છે કે જે ધન કે શૂન્ય સંખ્યાઓ હોય અને આ પ્રશ્નની મર્યાદાઓને જુદી જુદી સુરેખ અસમતાઓ (પ્રતિબંધો)

m દ્વારા રજૂ કરી શકાતી હોય ત્યારે સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન, જેનું ગાણિતિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ને નીચેની શરતોને આધિન રહી ઈષ્ટતમ બનાવો.

શરતો

(i) $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0 \dots x_n \geq 0$

(ii) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n[\geq, =, \leq]\ b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n[\geq, =, \leq]\ b_2$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n[\geq, =, \leq]\ b_m$

અહીં C_1, C_2 ...... C_n એ ચલોનો એકમદીઠ નફો (અથવા સમય કે ખર્ચ) દર્શાવે છે. (દા.ત. x_1ના એકમના વેચાણ થી રૂા. 50 નફો થતો હોય તો $C_1 = 50$ થશે.) a_{11}, a_{12}, a_{mn} એ અસમતાઓના પ્રાચલો છે. (એટલે કે a_{mn} ના x_n ચલનું ઉત્પાદન કરવાથી કેટલી મૂડી, માનવ કલાકો, યંત્ર કલાક વગેરે વપરાશ દર્શાવે છે.) જ્યારે $b_1, b_2, \dots b_m$ અસમતાઓનો પ્રાપ્ય જથ્થો દર્શાવે છે. (દા.ત. એક ઉદ્યોગ પાસે પહેલી અસમતામાં 1500 માનવ કલાક ઉપલબ્ધ છે : $b_1 = 1500$ થશે.)

16.8 સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલની રીતો

સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલ માટેની બે રીતો છે. (1) આલેખની રીત (2) સિમ્પ્લેક્ષની રીત આપણે અહી આલેખની રીતે પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવીશું.

સુરેખ આયોજનના ઉકેલ માટેની આલેખની રીત જ્યારે સુરેખ આયોજનની સમસ્યામાં ફક્ત બે જ ચલ હોય ત્યારે તેનો ઉકેલ આલેખની રીત દ્વારા મેળવી શકાય છે. આલેખની રીત નીચે મુજબ વર્ણવી શકાય.

પગથિયું-1: આપેલ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના ગાણિતિક સ્વરૂપમાં ફેરવો.

પગથિયું-2: દરેક અસમતાને સમતામાં દર્શાવી પ્રત્યેક સમતા માટે ઓછામાં ઓછા બે બિંદુઓ મેળવો.

પગથિયું-3: આલેખ પેપર પર યોગ્ય સ્કેલ લઈ મેળવેલ બિંદુઓની મદદથી સુરેખાઓ દોરો.

પગથિયું-4: અસમતામાં રહેલી નિશાનીઓ ને ધ્યાનમાં રાખી બધી જ અસમતાઓને સંતોષે તે રીતે પ્રાપ્ય ઉકેલ ગણનો પ્રદેશ (બહિર્મુખ બહુકોણ) મેળવો.

પગથિયું-5: આવા પ્રાપ્ય ઉકેલ ગણના પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ મેળવો.

પગથિયું-6: હેતુલક્ષી વિધેયમાં બધા જ શિરોબિંદુઓના યામ મૂકી હેતુલક્ષી વિધેયની કિંમતો મેળવો. જે શિરોબિંદુના યામ મૂકવાથી હેતુલક્ષી વિધેયની કિંમત ઈષ્ટતમ (મહત્તમ કે ન્યૂનત્તમ) થાય તે શિરોબિંદુના યામને ઈષ્ટપ્રાપ્ય ઉકેલ કહેવાય છે.

16.9 ઉદાહરણો :

ઉદા.1 હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 11x + 9y$ને નીચેની શરતોને આધીન રહીને મહત્તમ બનાવો.

શરતો

$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 20, 3x + 2y \leq 48$

ઉકેલ: અહીં ચાર અસમતાઓ આપેલ છે. જેમાં પ્રથમ બે x અને y ની કિંમતો ઋણ ન હોઈ શકે એ પ્રમાણેની સામાન્ય શરત છે. આ બે શરતોના કારણે આલેખમાં ઉકેલનો પ્રદેશ પહેલા ચરણમાં જ આવશે. તેથી હવે બાકીની બે અસમતાઓને સમતાઓમાં ફેરવી, વિધેય સ્વરૂપે રજૂ કરી x અને y ની કિંમતો નક્કી કરો.

(1) $x + y \le 20$ છે.

$\therefore$ $x + y = 20$ થશે.

વિધેય સ્વરૂપે દર્શાવવા માટે xને જમણી બાજુ લઈ જતાં + છે તે – થશે.

$\therefore$ $y = 20 - x$ થશે.

હવે આ વિધેયમાં $x = 0$ મૂકતાં $y = 20$ થશે.

$x = 10$ મૂકતાં

$y = 20 - 10$

$\therefore$ $y = 10$ થશે.

$x = 20$ મૂકતાં

$y = 20 - 20$

$\therefore$ $y = 0$ થશે.

$\therefore$ આ બિંદુઓ નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

x	0	10	20
y	20	10	0

(2) $3x + 2y \le 48$ છે.

$\therefore$ $3x + 2y = 48$ થશે.

વિધેય સ્વરૂપે દર્શાવવા માટે પ્રથમ $3x$ને જમણી બાજુ લઈ જતાં

$2y = 48 - 3x$ થશે.

હવે y સાથે 2 ગુણાયેલ છે તેને જમણી બાજુ લઈ જતાં ભાગાકાર થશે.

$\therefore$ $y = \frac{48 - 3x}{2}$ વધારે સાદુરૂપ આપતાં $\frac{48}{2}$ અને $\frac{-3x}{2}$ કરતાં.

$y = 24 - \frac{3x}{2}$ થશે.

હવે $x = 0$ મૂકતાં $y = 24 - \frac{3(0)}{2}$ $\therefore y = 24$

નોંધ : શૂન્યને કોઈપણ સંખ્યા સાથે ગુણતાં સંખ્યા શૂન્ય થાય છે.

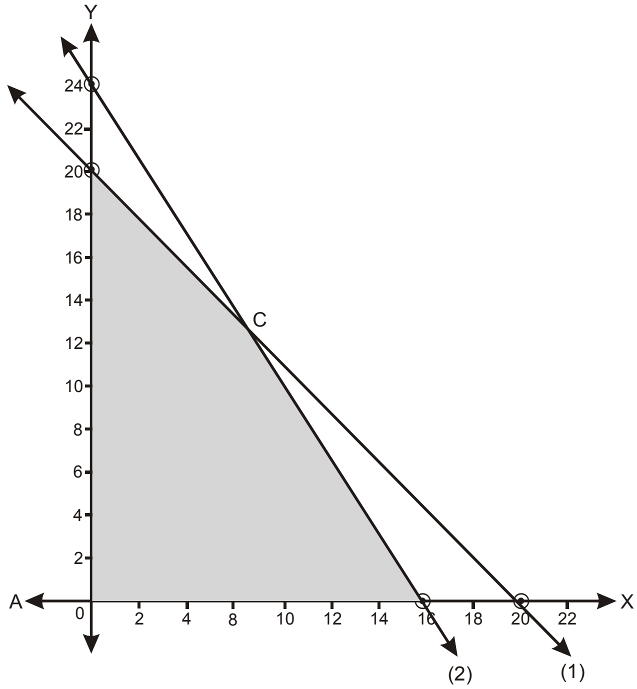
$x = 16$ મૂકતાં $y = 24 - \frac{3(16)}{2}$ $\therefore y = 0$

x	0	16
y	24	0

નોંધ : હજુ પણ તેને વિધેયોમાં x ની જુદી જુદી કિંમતો લઈશું તો y ની જુદી જુદી કિંમતો મળશે. પરંતુ આવી અપૂર્ણાંક કે ઋણ ન હોય તે પ્રમાણે ગણતરી કરવી.

આ બિંદુઓને આલેખ પર દર્શાવીશું અહીં x અને yની નાનામાં નાની કિંમત 0 છે અને મોટામાં મોટી કિંમત 24 છે. તે મુજબ આપણે 1 સે.મી. = 2 એકમ સ્કેલ પસંદ કરીશું.

નોંધ : સ્કેલ એ રીતે પસંદ કરો કે જેથી આલેખ પેપરની બહાર પણ ન જાય તેની કાળજી રાખવી.



સમજૂતીઃ પ્રથમ અસમતા $x + y \le 20$ને આલેખ પર દર્શાવાય. જે સુરેખા મળે છે તેને (1) નંબર આપેલ છે. હવે આ સુરેખા આલેખના પ્રથમ ચરણના બે ભાગ કરે છે. તેથી પ્રશ્ન એ થાય કે આલેખનો પ્રદેશ કયો છે તે નક્કી કરવા માટે કોઈપણ એક જાળ બિંદુ લઈ અસમતામાં મૂકી સમીકરણ ચકાસવામાં આવે છે. આપણે અહીં જાળબિંદુ (0, 0) એટલે કે ઉદ્‌ગમબિંદુ લઈશું જેથી ગણતરી સરળ બને. બિંદુ (0, 0) નો અર્થ $x = 0$ અને $y = 0$ છે. આ કિંમતો અસમતાંમાં મૂકતાં $0 + 0 \le 20 \therefore 0 < 20$ થાય તેથી 20 કરતાં 0 નાના છે એમ કહેવાય જે સાચું છે. તેથી આ અસમતાનો પ્રદેશ ઉદ્‌ગમબિંદુ એટલે કે O તરફ છે. જે રેખા પર શૂન્ય તરફ તીર વડે દર્શાવેલ છે. તે જ પ્રમાણે બીજી અસમતામાં $x = O$ અને $y = 0$ મૂકતાં $3x + 2y < 48 \therefore 3(0) + 2(0) < 48 \therefore 0 < 48$ તેથી 48 કરતાં 0 નાનું છે એમ કહેવાય માટે આ સમીકરણ સાચું છે. તેથી તેનો પ્રદેશ પણ શૂન્ય તરફ છે. આ ઉપરાંત પ્રથમ બે અસમતાઓમાં x અને yની કિંમતો શૂન્યથી વધારે છે. તેને ધ્યાને લઈ પ્રદેશ દર્શાવેલ છે.

આ ઉકેલના પ્રદેશમાં 4 ખૂણા બને છે. જેના શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D વડે દર્શાવેલ છે. આ શિરો બિંદુઓની કિંમતો લખી હેતુલક્ષી વિધેયમાં મૂકી કિંમતો મેળવીશું.

શિરોબિંદુઓ	$Z = 11x + 9y$			
A(0, 0)	$= 11(0) + 9(0)$	$= 0 + 0$	$= Z_A$	$= 0$
B(16, 0)	$= 11(16) + 9(0)$	$= 176 + 0$	$= Z_B$	$= 176$
C(8, 12)	$= 11(8) + 9(12)$	$= 88 + 108$	$= Z_C$	$= 196$
D(0, 20)	$= 11(0) + 9(20)$	$= 0 + 180$	$= Z_D$	$= 180$

અહીં બિંદુ C(8, 12) આગળ Zની કિંમત 196 મળે છે જે બધી જ કિંમતો કરતાં વધારે (મોટી) છે. તેથી $x = 8$ અને $y = 12$ હોય ત્યારે $Z = 196$ મહત્તમ થશે.

ઉદા.2 હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 20x + 25y$ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતો

$$x, y \ge 0, x + y \le 7, 2x + 3y \le 18\ y \ge 2$$

ઉકેલ : અહીં ચાર અસમતાઓ આપેલ છે. તેમાંથી પ્રથમ સામાન્ય છે એટલે કે x અને y ની કિંમત 0 કે તેથી વધુ છે એમ દર્શાવે છે. માટે બાકીની ત્રણે અસમતાઓને સમતાઓમાં ફેરવી વિધેય તરીકે દર્શાવી x અને y ની કિંમતો શોધીશું.

(1) $x + y \le 7$

$\therefore \quad x + y = 7$

$\therefore \quad y = 7 - x$

(2) $2x + 3y = 18$

$\therefore \quad 3y = 18 - 2x$

$\therefore \quad y = \frac{18}{3} - \frac{2}{3}x$

$\therefore \quad y = 6 - \frac{2}{3}x$

(3) $y \ge 2$

$\therefore \quad y = 2$

અહીં અચલ વિધેય છે. xની કોઈપણ કિંમત

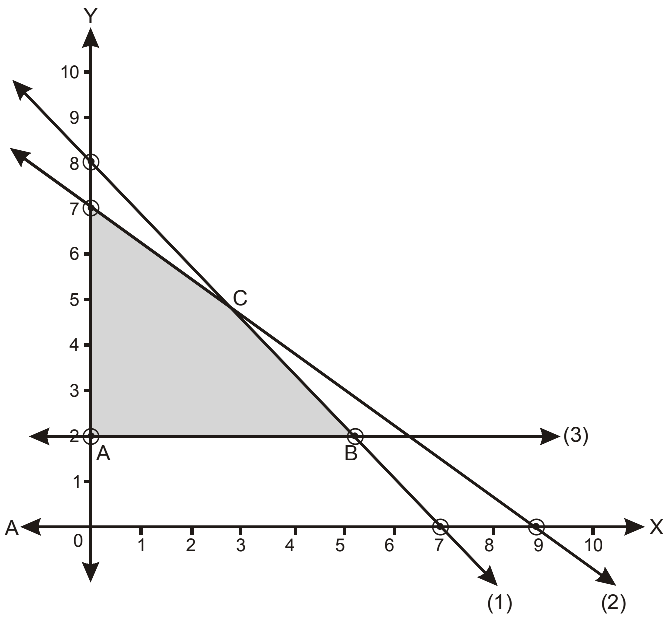
$y = 2$ થશે.

x:	0	3	7
y:	7	4	0

x:	0	3	9
y:	6	4	0

x:	0	5
y:	2	2

અહીં x અને yની નાનામાં નાની કિંમત 0 અને મોટામાં મોટી કિંમત 9 છે. તેથી આલેખ માટે સ્કેલ 1 સે.મી. = 1 એકમ લઈશું.



સમજૂતી :- સમીકરણ એક માટે આપણે ત્રણ બિંદુઓ (0, 7) (3, 4) અને (7, 0) લીધા છે. આલેખમાં $x = 0$ હોય ત્યારે $y = 7$ છે. તેથી y અક્ષ પર 7 આગળ પ્રથમ બિંદુ ⊙ કરેલ છે. તે જ પ્રમાણે $x = 3$ હોય ત્યારે $y = 4$ છે તેથી આલેખ પર બિંદુ (3,4) પર કરેલ ⊙ છે તેજ પ્રમાણે $x = 7$ હોય ત્યારે $y = 0$ છે તેથી x અક્ષ પર બિંદુ ⊙ કરેલ છે. આ ત્રણેય બિંદુને જોડવાથી રેખા (1) મળે છે. તે જ રીતે બીજી અને ત્રીજી રેખા દોરેલ છે.

હવે પ્રદેશ નક્કી કરવા માટે ઉદ્‌ગમ બિંદુ (0, 0) દરેક અસમતામાં મૂકતાં

(1) $x + y < 7$

$\therefore \quad 0 + 0 < 7$

$\therefore \quad 0 < 7$

7 કરતાં શૂન્ય નાના છે. તેથી વિધાન સાચું છે.

$\therefore$ શૂન્ય (0) તરફ પ્રદેશ છે.

(2) $2x + 3y < 18$

$\therefore \quad 2(0) + 3(0) < 18$

$\therefore \quad 0 < 18$

18 કરતાં શૂન્ય નાના છે. સાચું છે. તેથી પ્રદેશ નીચે તરફ એટલે કે શૂન્ય તરફ છે.

(3) $y > 2$

$\therefore \quad y = 2$

અહીં 2 કરતાં 0 મોટા છે. એમ બતાવે છે જે ખોટું છે. તેથી પ્રદેશ શૂન્યથી વિરુદ્ધ એટલે કે ઉપર તરફનો છે.

હવે પ્રદેશમાં ચાર ખૂણા બને છે. જેને A, B, C અને D નંબર આપેલ છે. જે શિરોબિંદુઓ લખી હેતુલક્ષી વિધેયમાં x અને y ની કિંમતો મેળવીશું.

શિરોબિંદુઓ	$Z = 20x + 25y$			
A(0, 2)	= 20(0) + 25(2)	= 0 + 50	= Z_A	= 50
B(5, 2)	= 20(5) + 25(2)	= 100 + 150	= Z_B	= 150
C(3, 4)	= 20(3) + 25(4)	= 60 + 100	= Z_C	= 160
D(0, 6)	= 20(0) + 25(6)	= 0 + 150	= Z_D	= 150

અહીં બિંદુ (3, 4) આગળ Zની કિંમત 160 મળે છે. જે બધી જ કિંમતો કરતા મોટી છે તેથી $x = 3$ અને $y = 4$ હોય ત્યારે $z = 160$ મહત્તમ થશે.

ઉદા.3 હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 4x + 8y$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનતમ બનાવો.

શરતો

$x_1 y \geq 0, \quad 6x + y \geq 18$

$x + 4y \geq 12, 2x + y \geq 10$

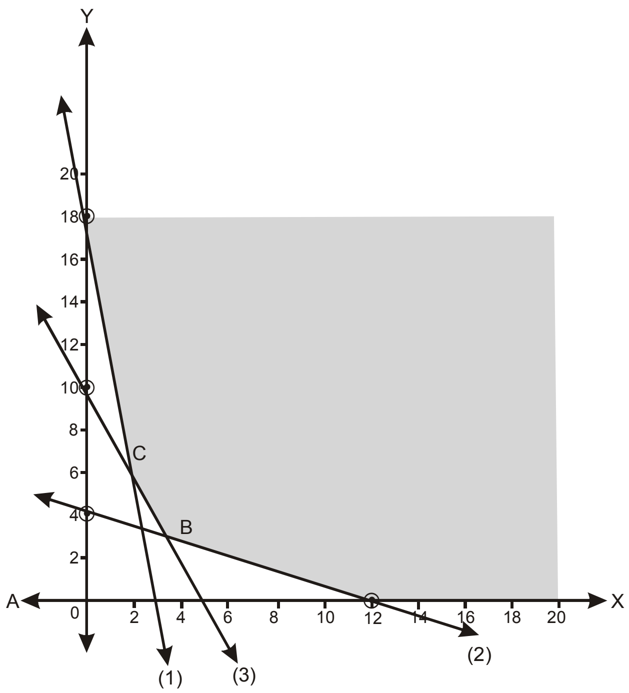
ઉકેલ: અહીં ચાર અસમતાઓમાં પ્રથમ સામાન્ય છે તેથી બાકીની ત્રણ અસમતાઓને સમતાઓમાં ફેરવી x અને y ની કિંમતો મેળવીશું.

(1) $6x + y = 18$
$\therefore \quad y = 18 - 6x$

(2) $x + 4y = 12$
$\therefore \quad 4y = 12 - x$
$\therefore \quad y = 3 - \frac{x}{4}$

(3) $2x + y = 10$
$\therefore \quad y = 10 - 2x$

અહીં નાની કિંમત 0 અને મોટી કિંમત 18 છે. તેથી 1 સે.મી. = 2 એકમ સ્કેલ લઈ આલેખ દોરીશું.



અહીં દરેક સમીકરણનો આલેખ દોર્યા બાદ પ્રદેશ નક્કી કરવા માટે ઉદ્‌ગમબિંદુ (0, 0) માં x, yની કિંમતો મૂકી પ્રદેશ નક્કી કરેલ છે.

(1) $6x + y > 18$
$\therefore \quad 6(0) + 0 > 18$
$\therefore \quad 0 > 18$

(2) $x + 4y = 12$
$\therefore \quad 0 + 4(0) > 12$
$\therefore \quad 0 > 12$

(3) $2x + y > 10$
$\therefore \quad 2(0) + 0 > 10$
$\therefore \quad 0 > 12$

અહીં બધા જ સમીકરણોમાં ઉદ્ગમબિંદુ (0, 0) મૂકતાં ખોટા છે. તેથી ઉદ્ગમબિંદુથી વિરુદ્ધ દિશામાં એટલે કે ઉપર તરફનો પ્રદેશ મળે છે. જેની ઉપરની મર્યાદા નથી તેથી ઉપર તરફ અમર્યાદિત પ્રદેશ જોવા મળે છે, પરંતુ ન્યૂનતમ કિંમતો લઈ શકાય છે તેથી ઓછામાં ઓછી કિંમતોવાળા ચાર બિંદુઓ A, B, C અને D વડે દર્શાવેલ છે. આ જાળ બિંદુઓ હેતુલક્ષી વિધેયમાં કિંમતો મૂકતાં, ન્યૂનત્તમ કિંમત મળશે.

શિરોબિંદુઓ	$Z = 4x + 8y$			
A(12, 0)	= 4(12) + 8(0)	= 48	$= Z_A$	= 48
B(4, 2)	= 4(4) + 8(2)	= 16 + 16	$= Z_B$	= 32
C(2, 6)	= 4(2) + 8(6)	= 8 + 48	$= Z_C$	= 56
D(0, 18)	= 4(0) + 8(18)	= 0 + 144	$= Z_D$	= 144

અહીં Zની સૌથી નાની કિંમત 32 છે જે બિંદુ B(4, 2) આગળ મળે છે. તેથી $x = 4$ અને $y = 2$ હોય.

ઉદા.4 હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 20x + 10y$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતો

$x + 2y \le 40$, $3x + y \ge 30$

$4x + 3y \ge 60$ અને $x, y \ge 0$

ઉકેલ : અહીં આપેલ સમીકરણોની અસમતાઓને સમતાઓ દર્શાવી x અને y ની કિંમતો મેળવીશું.

(1) $x + 2y \le 40$

$x + 2y = 40$

$\therefore 2y = 40 - x$

$\therefore y = 20 - \frac{x}{2}$

(2) $3x + y \ge 30$

$3x + y = 30$

$\therefore y = 30 - 3x$

(3) $4x + 3y \ge 60$

$4x + 3y = 60$

$\therefore 3y = 60 - 4x$

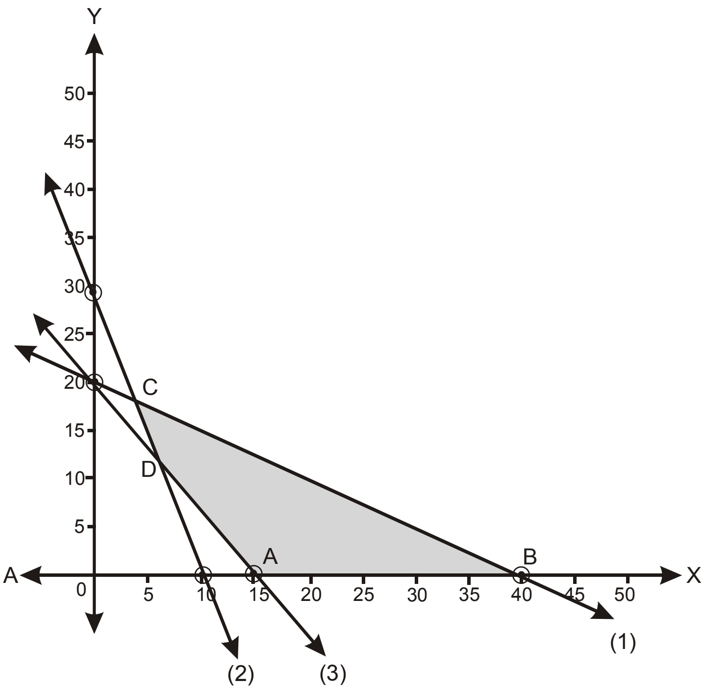
$y = 20 - \frac{4}{3}x$

x:	0	40
y:	20	0

x:	0	10
y:	30	0

x:	0	15
y:	20	0

અહીં સૌથી નાની કિંમત 0 અને મોટી કિંમત 40 છે. તેથી અહીં આપણે 1 સેમી = 5 એકમ સ્કેલ લઈ આલેખ દોરીશું.



પ્રદેશ નક્કી કરવા માટે ઉદ્‌ગમ બિંદુ (0, 0) દરેક સમીકરણમાં મૂકતાં

(1)	$0 + 2(0) < 40$	(2)	$3(0) + 0 > 30$	(3)	$4(0) + 3(0) > 60$
$\therefore$	$0 < 40$	$\therefore$	$0 > 30$	$\therefore$	$0 > 60$
	સાચું છે.		ખોટું છે.		ખોટું છે.

અહીં પ્રથમ સમીકરણ સાચું છે. તેથી તેનો પ્રદેશ શૂન્ય તરફ ચાલશે જ્યારે બીજુ અને ત્રીજુ સમીકરણ ખોટું છે. તેથી તેનો પ્રદેશ શૂન્ય (ઉદ્‌ગમબિંદુ)થી વિરુદ્ધ એટલે કે ઉપર તરફ આવશે.

આ ઉકેલના પ્રદેશો માટે 4 ખૂણાઓ બને છે. તેને A, B, C, D વડે દર્શાવેલ છે. આ જાળ બિંદુઓની કિંમતો લખી હેતુલક્ષી વિધેયમાં મૂકીશું.

જાળ બિંદુઓ	$Z = 20x + 10y$			
A(15, 0)	$= 20(15) + 10(0)$	$= 300 + 0$	$= Z_A$	$= 300$
B(40, 0)	$= 20(40) + 10(0)$	$= 800 + 0$	$= Z_B$	$= 800$
C(4, 18)	$= 20(4) + 10(18)$	$= 80 + 180$	$= Z_C$	$= 260$
D(6, 12)	$= 20(6) + 10(12)$	$= 120 + 120$	$= Z_D$	$= 240$

અહીં બિંદુ D(6, 12) આગળ Zની સૌથી નાની કિંમત 240 આવે છે તેથી $x = 6$ અને $y = 12$ હોય ત્યારે $Z = 240$ ન્યૂનતમ થશે.

ઉદા.5 રમકડાં બનાવતી એક કંપની રોબોટ અને બલૂન એમ બે જાતનાં રમકડાં બનાવે છે. કંપની રોજના 60 થી વધુ રમકડાં બનાવી શકતી નથી. રોબોટ બનાવવામાં 1 કલાક અને બલૂન બનાવવામાં 2 કલાક સમય લાગે છે. કંપની દરરોજ વધુમાં વધુ 100 કલાક સમય ફાળવી શકે તેમ છે. રોબોટના વેચાણમાં 45 અને બલૂનના વેચાણમાં 75 નફો મળે છે. વધુમાં વધુ નફો મેળવવા કયા પ્રકારના કેટલા રમકડાં બનાવવા જોઈએ ? મહત્તમ નફો કેટલો થશે ?

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આ સમસ્યાને ગાણિતિક સ્વરૂપે દર્શાવવી પડશે.

ધારો કે રમકડાં બનાવતી કંપની રોબોટના x એકમો અને બલૂનના y એકમો બનાવે છે. x અને y વસ્તુઓની સંખ્યા દર્શાવતા હોવાથી બંને ચલો ઋણ હોઈ શકે નહિ દા.ત. રોબોટનું ઉત્પાદન બંધ કરે તો $x = 0$ થાય પણ ઋણ થઈ શકે નહિ.

(*i*) $x \geq 0, y \geq 0$ થશે.

કંપની રોજના 60 થી વધુ રમકડાં બનાવી શકતી નથી.

$\therefore$ x અને y મળીને 60 કે તેથી ઓછા થઈ શકે.

(*ii*) $x + y \leq 60$

રોબોટનો એક એકમ બનાવવા માટે 1 કલાક અને બલૂનનો એક એકમ બનાવવા માટે 2 કલાક સમય લાગે છે. આ બંનેના અનુક્રમે x અને y એકમો બનાવે છે. તેથી $(1x + 2y)$ થશે. હવે વધુમાં વધુ 100 કલાકનો સમય છે. તેથી સમીકરણ નીચે મુજબ થશે.

(*iii*) $x + 2y \leq 100$

રોબોટના એક એકમના વેચાણ પર 45 નફો મળે છે. જ્યારે બલૂનના એક એકમના વેચાણ પર 75 નફો મળે છે અને નફો મેળવવો એ કંપનીનો હેતુ છે. તેથી હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 45x + 75y$ ને મહત્તમ બનાવવાનો હેતુ થશે.

ગાણિતિક સ્વરૂપ

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 45x + 75y$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતોઃ

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

$x + y \leq 60,$ $\quad x + 2y \leq 100$ થશે.

પ્રથમ બે અસમતાઓ સામાન્ય છે. તેથી બાકીની બે અસમતાઓને સમતાઓમાં ફેરવી x અને yની કિંમતો મેળવી આલેખ પર દર્શાવીશું.

(1) $x + y \leq 60$

$\therefore \quad x + y = 60$

$\therefore \quad y = 60 - x$

(2) $x + 2y \leq 100$

$\therefore \quad x + 2y = 100$

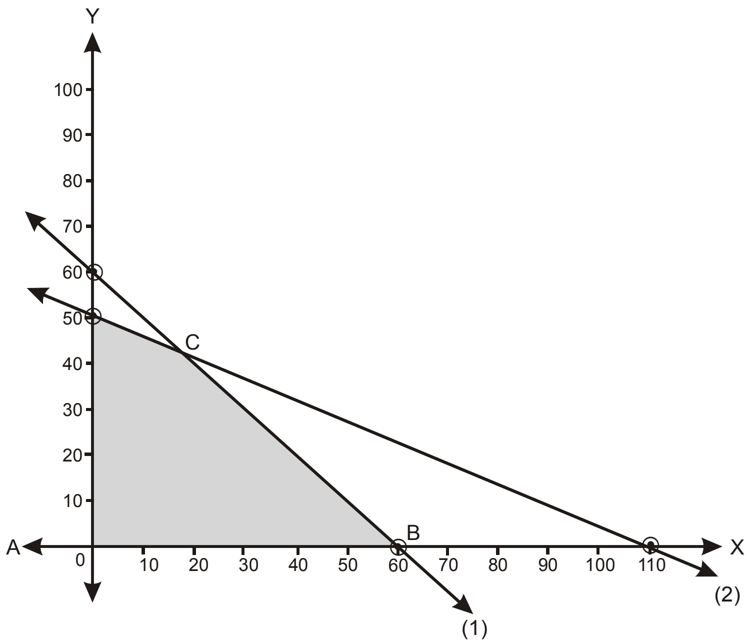
$\therefore \quad 2y = 100 - x$

$\therefore \quad y = 50 - \dfrac{x}{2}$

x	0	60
y	60	0

x	0	100
y	50	0

અહીં નાની કિંમત 0 અને મોટી કિંમત 100 છે. તેથી 1 સેમી = 10 એકમ સ્કેલ લઈ આલેખ દોરીશું.



બંને અસમતાઓને ઉદ્‌ગમબિંદુ (0, 0) મૂક્તાં (1) $0 < 60$ અને (2) $0 < 100$ બંને સાચાં છે તેથી 0 તરફ બંનેનો પ્રદેશ છે.

જાળ બિંદુઓ $Z = 45x + 75y$

A(0, 0)	$= 45(0) + 75(0)$	$= 0 + 0$	$= Z_A$	$= 0$
B(60, 0)	$= 45(60) + 75(0)$	$= 2700 + 0$	$= Z_B$	$= 2700$
C(20, 40)	$= 45(20) + 75(40)$	$= 900 + 3000$	$= Z_C$	$= 3900$
D(0, 50)	$= 45(0) + 75(50)$	$= 0 + 3750$	$= Z_D$	$= 3750$

અહીં C(20, 40) બિંદુ પર Zની કિંમત સૌથી વધુ થાય છે. તેથી કંપનીએ 20 રોબોટ અને 40 બલૂન રમકડા બનાવવાં જોઈએ કે જેથી મહત્તમ નફો 3900 થશે.

ઉદા.6 મોહનભાઈ પોતાના ખેતરમાં અમુક ભાગમાં મરચાના અને અમુક ભાગમાં રીંગણાનાં એમ બે જાતના છોડનું વાવેતર કરવા વિચારે છે. મરચાનાં પાક માટે હેક્ટર દીઠ રોજના સરેરાશ 4 મજૂર રોકવા પડે છે અને દૈનિક ખાતર પાણીનો ખર્ચ રૂા. 80 થાય છે. રીંગણના પાક હેક્ટરદીઠ રોજના સરેરાશ 2 મજદૂર રોકવા પડે છે અને દૈનિક ખાતર-પાણીનો ખર્ચ રૂા. 60 થાય છે. મોહનભાઈ વધુમાં વધુ રોજના સરેરાશ 20 મજૂરો રોકી શકે અને દૈનિક ખાતર પાણીનો સરેરાશ ખર્ચ વધુમાં વધુ 480 કરી શકે તેમ છે. મરચાની ખેતી માટે હેક્ટરદીઠ

250 અને રીંગણની ખેતી માટે હેક્ટરદીઠ 150 નફો મળી શકે તેમ છે. મોહનભાઈએ મહત્તમ નફા માટે કેટકેટલા હેક્ટરમાં મરચાં અને રીંગણના છોડનું વાવેતર કરવું જોઈએ ?

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આ સમસ્યાને ગાણિતીક સ્વરૂપમાં દર્શાવતા.

ધારો કે મોહનભાઈ x હેક્ટરમાં મરચાં અને y હેક્ટરમાં રીંગણાના છોડનું વાવેતર કરે છે.

મહત્તમ નફો મેળવવો તેનો હેતુ છે. તેથી મરચાં માટે હેક્ટરદીઠ 250 અને રીંગણ માટે હેક્ટરદીઠ 150 નફો મળે છે. તેથી હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 250x + 150y$ થશે.

હવે જો મોહનભાઈ મરચાંની ખેતી નહિ કરે તો $x = 0$ થાય તેથી x ની કિંમત શૂન્યથી ઓછી થઈ શકે નહિ તેથી $x \geq 0$ શરત થશે તે જ રીતે $y \geq 0$ થશે.

મજૂરીની મર્યાદા લઈએ.

મરચાં માટે 4 મજૂર, રીંગણા માટે 2 મજૂર તેમજ વધુમાં વધુ 20 મજૂર ઉપલબ્ધ છે. તેથી સમીકરણ $4x + 2y \leq 20$ થશે.

ખર્ચની મર્યાદા લઈએ.

મરચાં માટે ખાતર પાણીનો ખર્ચ રૂા. 80 અને રીંગણ માટે ખર્ચ રૂ. 60 છે. તેમજ વધુમાં વધુ રૂ. 480 ખર્ચ કરી શકે છે. સમીકરણ $80x + 60y \leq 480$ થશે.

ગાણિતિક સ્વરૂપ

હેતુલક્ષી વિધેય ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.

શરતો

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $4x + 2y \leq 20$ અને $80x + 60y \leq 480$

આ અસમતાંઓમાં પ્રથમ બે અસમતાઓ સામાન્ય છે. તેથી ત્યાર બાદની બે અસમતાઓના યામ મેળવીશું.

(1) $4x + 2y \leq 20$

$\therefore \quad 4x + 2y = 20$

$\therefore \quad 2y = 20 - 4x$

$\therefore \quad y = 10 - 2x$

x	0	5
y	10	0

(2) $80x + 60y \leq 480$

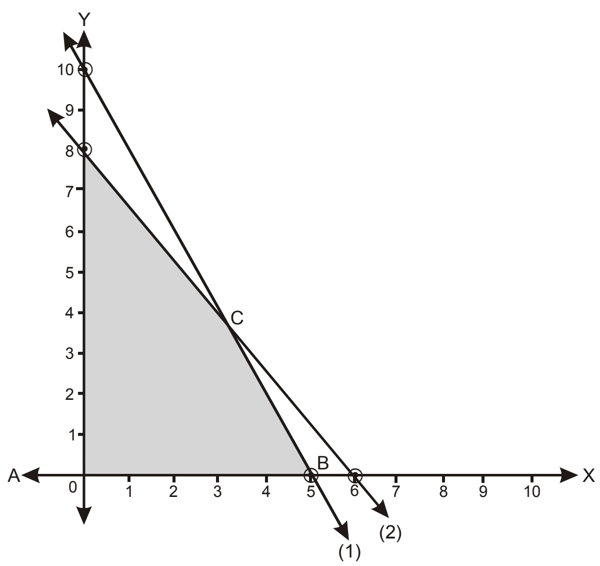
$\therefore \quad 80x + 60y = 480$

$\therefore \quad 60y = 480 - 80x$

$\therefore \quad y = 8 - \frac{4}{3}x$

x	0	3	6
y	8	4	0

અહીં સૌથી નાની કિંમત 0 અને મોટી કિંમત 10 છે તેથી 1 સેમી = 1 એકમ લઈ આલેખ દોરીશું.



ઉકેલના પ્રદેશના જાળબિંદુઓની કિંમત હેતુલક્ષી વિધેયમાં મૂકી ઉકેલ મેળવીશું.

જાળ બિંદુઓ $Z = 250x + 150y$

A(0, 0)	= 250(0) + 150(0)	= 0 + 0	= Z_A	= 0
B(5, 0)	= 250(5) + 150(0)	= 1250 + 0	= Z_B	= 1250
C(3, 4)	= 250(3) + 150(4)	= 750 + 600	= Z_C	= 1350
D(0, 8)	= 250(0) + 150(8)	= 0 + 1200	= Z_D	= 1200

અહીં બિંદુ C(3, 4) આગળ હેતુલક્ષી વિધેય Zની કિંમત સૌથી વધુ 1350 છે. તેથી મોહનભાઈ 3 હેક્ટરમાં મરચાં અને 4 હેક્ટરમાં રીંગણાના છોડનું વાવેતર કરવું જોઈએ કે જેથી તેને મહત્તમ 1350 નફો મળશે.

ઉદા.7 એક આહાર પ્રત્યે જાગૃત વ્યક્તિ પોતાના કુટુંબ માટે બે પ્રકારના વિટામીન A અને B લેવા માંગે છે. બંને વિટામીનની રોજની ન્યૂનત્તમ જરૂરિયાત અનુક્રમે 50 અને 54 એકમની છે. વિટામીનની પૂર્તિ માટે તે વ્યક્તિ બે પ્રકારના ખોરાક P અને ખોરાક Q પર આધાર રાખે છે. ખોરાક P ના એક એકમમાં વિટામીન A અને Bના અનુક્રમે 10 અને 6 એકમો છે. જ્યારે ખોરાક Qના એક પેકેટમાં વિટામીન A અને Bના અનુક્રમે 5 અને 9 એકમો છે. ખોરાક P નું એક પેકેટ રૂ. 100માં અને ખોરાક Q નું એક પેકેટ રૂ. 140 મળે છે. કુલ ખર્ચ ન્યૂનત્તમ થાય તે રીતે રોજના બંને ખોરાકના કેટકેટલા પેકેટ ખરીદવા જોઈએ ?

ઉકેલ : ધારો કે વ્યક્તિ ખોરાક P ના x અને ખોરાક Q ના y પેકેટ ખરીદે છે. માટે હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 100x + 140y$ ને ન્યૂનત્તમ બનાવો. (ખર્ચ છે માટે)

આ માહિતીને એક ટેબલમાં રજૂ કરતાં

	ખોરાક P	**ખોરાક Q**	**ન્યૂનત્તમ જરૂરિયાત**
વિટામીન A	10	5	50
વિટામીન B	6	9	54
પેકેટની કિંમત	100	140	

હવે ખોરાક Pમાંથી વિટામીન A ના 10 એકમ અને ખોરાક Q માંથી વિટામીન A ના 5 એકમ મળે છે. તેમજ વિટામીન ની ઓછામાં ઓછા 50 એકમ મળવા જરૂરી છે.

$\therefore$ સમીકરણ

$10x + 5y \geq 50$ થશે. (ઓછામાં ઓછા 50 એમ હોવાથી $\geq$ ચિહ્ન આવશે.)

તે જ પ્રમાણે ખોરાક P માંથી વિટામીન B ના 6 એકમ અને ખોરાક Q માંથી વિટામીનB ના 9 એકમ મળે છે. જેની ન્યૂનત્તમ જરૂરીયાત 54 એકમ છે.

$\therefore$ સમીકરણ

$6x + 9y \geq 54$ થશે.

હવે જો ખોરાક P ની ખરીદી ન કરે તો $x = 0$ થાય પણ 0 કરતાં ઓછી x ની કિંમત થઈ શકે નહિ તે જ રીતે ખોરાક Q માટે પણ થશે.

$\therefore$ $x \geq 0$ અને $y \geq 0$ સામાન્ય શરતો છે.

તેથી આ સમસ્યાનું ગાણિતીક સ્વરૂપ

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 100x + 140y$ ને નીચેની શરતોને આધિન ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતો

$x \geq 0, y \geq 0, 10x + 5y \geq 50, 6x + 9y \geq 54$

પ્રથમ બે સામાન્ય શરત છે તેથી બાકીની બે શરતોની કિંમતો મેળવીશું.

(1) $10x + 5y = 50$ (2) $6x + 9y = 54$

$\therefore$	$5y = 50 - 10x$
$\therefore$	$y = 10 - 2x$

x	0	5
y	10	0

$\therefore$	$9y = 54 - 6x$
$\therefore$	$y = 6 - \frac{6}{9}x$

x	0	9
y	6	0

આલેખ માટે 1 સેમી = 1 એકમ લઈશું.

અહીં બંને સમીકરણોમાં ઉદ્‌ગમબિંદુ (0, 0) મૂકતાં

(1) $10(0) + 5(0) > 50$ (2) $6(0) + 9(0) > 54$

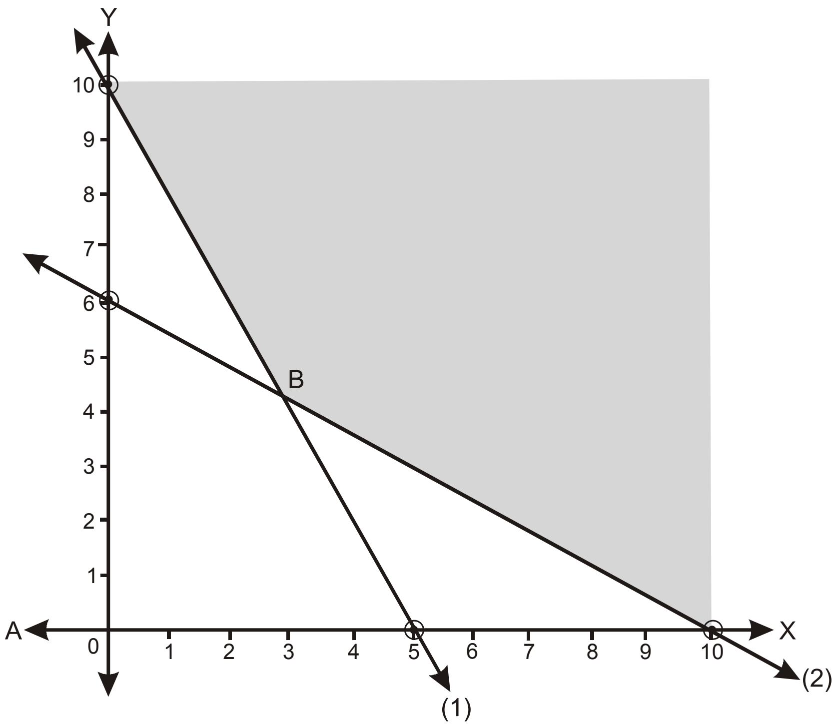
$\therefore$ $0 > 50$ ખોટું છે. $\therefore$ $0 > 54$ ખોટું છે.

તેથી બંનેનો પ્રદેશ શૂન્યથી ઉપર (વિરુદ્ધ દિશામાં) થશે.

$\therefore$ ત્રણ શિરોબિંદુઓ મળશે. જે બિંદુઓ હેતુલક્ષી વિધેયમાં મૂકી Zની કિંમત મેળવીશું.

શિરોબિંદુઓ	$Z = 100x + 140y$			
A(9, 0)	$= 100(9) + 140(0)$	$= 900 + 0$	$= Z_A$	$= 900$
B(3, 4)	$= 100(3) + 140(4)$	$= 300 + 560$	$= Z_B$	$= 860$
C(0, 10)	$= 100(0) + 140(10)$	$= 0 + 1400$	$= Z_C$	$= 1400$

અહીં B(3,4) બિંદુ માટે Z વિધેયની ઓછામાં ઓછી કિંમત મળે છે. તેથીવ્યક્તિએ ખોરાક P ના 3 પેકેટ અને ખોરાક Q ના 4 પેકેટ ખરીદવા જોઈએ જેથી વિટામીનની ન્યૂનત્તમ જરૂરીયાત પણ સંતોષાશે છે અને ન્યૂનત્તમ ખર્ચ પણ 860 આવશે.



16.10 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

16.10.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબો આપો.

(A) ટૂંકા પ્રશ્નો

1. સુરેખ આયોજન એટલે શું ?
2. હેતુલક્ષી વિધેયનો અર્થ સમજાવો.
3. પ્રતિબંધો (અસમતાઓ) એટલે શું ?

4. ઈષ્ટ પ્રાપ્ય ઉકેલનો અર્થ સમજાવો.
5. ઉકેલ એટલે શું ?
6. પ્રાપ્ય ઉકેલ એટલે શું ?

(B) લાંબા પ્રશ્નો

7. સુરેખ આયોજનની વ્યાખ્યા આપી તેની ઉપયોગીતાઓ સમજાવો.
8. સુરેખ આયોજનની ધારણાઓ અને મર્યાદાઓ જણાવો.
9. સુરેખ આયોજનનું ગાણિતીક સ્વરૂપ જણાવો.
10. સુરેખ આયોજનના ઉકેલ માટેની આલેખની રીત સમજાવો.
11. $Z = 20x + 30y$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.
    $x + 2y \leq 60$
    $3x + 2y \leq 120$
    $x, y \geq 0$
12. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 10x + 15y$ ને નીચેના પ્રતિબંધોને આધીન મહત્તમ બનાવો.
    $x \geq 2, y \geq 2$
    $15x + 25y \leq 250$
13. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 4x + 5y$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.
    $x \geq 0, y \geq 0$
    $3x + 6y \leq 2100$
    $6x + 5y \leq 2100$
14. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 30x + 20y$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.
    $x, y \geq 0$ $\quad x + y \leq 7$
    $x \leq 4$ $\quad 200x + 400y \geq 600$
15. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 50x + 40y$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.
    $x + y \leq 120,\ 2x + 5y \leq 480$
    $5x + 2y \leq 540,\quad x \geq 0, y \geq 0$
16. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = x + 2y$ ને નીચેની શરતોને આધીન મહત્તમ બનાવો.
    શરતો $x + y \leq 4,\quad 3x + 2y \geq 30$
    $2x + y \leq 18,\ x , y \geq 0$
17. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 40x_1 + 24x_2$ ને નીચેની શરતોને આધીન લઘુત્તમ બનાવો.
    શરતો $20x_1 + 50x_2 \geq 4800$
    $8x_1 + 50x_2 \geq 720,\ x_1, x_2 \geq 0$
18. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 2x + 3y$ ન્યૂનત્તમ થાય તે રીતે x અને yની કિંમત એવી શોધો કે જેથી $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 20$ અને $3x + 5y \geq 60$ થાય.
19. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 200x + 160y$ ને નીચેની શરતોને આધીન ન્યૂત્તમ બનાવો.
    શરતો $x, y \geq 4,\quad 3x + y \geq 6$
    $x + y \geq 4,\quad x + 3y \geq 6$
20. નીચેના હેતુલક્ષી વિધેય માટે x અને yની એવી કિંમતો મેળવો કે જેથી ખર્ચ ન્યૂનત્તમ થાય. ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.
    હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 250x + 300y$
    મર્યાદાઓ : $x \geq 30, y \geq 20$ અને
    $x + y \geq 60$
21. સામાન્ય જ્ઞાનની પરીક્ષામાં એક પ્રશ્નપત્ર વિભાગ A અને વિભાગ B એમ બે વિભાગોમાં વહેંચાયેલું છે. વિભાગ A ના દરેક પ્રશ્નના 5 ગુણ છે અને તે દરેકને

ઉકેલતાં 4 મિનિટ લાગે છે. વિભાગ B ના દરેક પ્રશ્નના 10 ગુણ છે અને તે દરેકને ઉકેલતાં 6 મિનિટ લાગે છે. બંને વિભાગમાંથી વધુમાં વધુ 12 પ્રશ્નોના જવાબ આપવાના છે. પરીક્ષાની સમય મર્યાદા એક કલાક છે. દીપલે વધુમાં વધુ ગુણ મેળવવા દરેક વિભાગમાંથી કેટલા પ્રશ્નો લખવા જોઈએ અને તેમ કરવાથી કેટલા ગુણ મળશે ?

22. એક લઘુઉદ્યોગમાં ઉત્પાદક ખુરશી અને ટેબલ બનાવે છે. તે માટે તેની પાસે કારીગર A અને કારીગર B એમ બે કારીગરો છે. એક ખુરશી તૈયાર કરવા માટે કારીગર A ને ત્રણ કલાક અને કારીગર B ને 2 કલાક સમય આપવો પડે છે. એક ટેબલ તૈયાર કરવા માટે કારીગર A ને 3 કલાક અને કારીગર B ને પણ ત્રણ કલાક સમય આપવો પડે છે. કારીગર A વધુમાં વધુ 18 કલાક અને કારીગર B વધુમાં વધુ 24 કલાક સમય આપી શકે તેમ છે. દરેક ખુરશી માટે રૂ. 400 અને દરેક કબાટ માટે રૂ. 300 નફો મળતો હોય તો વધુમાં વધુ નફો મેળવવા ઉત્પાદકે કેટલી ખુરશીઓ અને કેટલા કબાટો બનાવવા જોઈએ ?

23. એક પશુપાલક ગાયો અને ભેંસો પાળે છે. તે ઓછામાં ઓછી 3 ભેંસો રાખવા માંગે છે. દરેક ગાય રોજનું સરેરાશ 10 લિટર દૂધ આપે છે અને દરેક ભેંસ રોજનું સરેરાશ 8 લિટર દૂધ આપે છે. ગાય માટે ખાણ અને ઘાસ ચારોના દૈનિક ખર્ચ રૂ. 80 અને ભેંસ માટે ખાણ અને ઘાસચારાનો દૈનિક ખર્ચ રૂ. 120 કરવો પડે છે. પશુપાલક 10 થી વધારે ગાયો ભેંસોને રાખી શકે એમ નથી, અને દૈનિક ખર્ચ રૂ. 960 થી વધારે કરી શકે એમ નથી તો એણે મહત્તમ દૂધ મેળવવા કેટલી ગાયો ભેંસો રાખવી જોઈએ.

24. એક વ્યક્તિને પોતાના બગીચા માટે A, B અને C પ્રકારના ખાતરની અનુક્રમે ન્યૂનત્તમ જરૂરિયાત 10, 12 અને 12 એકમોની છે. બજારમાં ખાતર પાવડર સ્વરૂપે ડબ્બામાં અને પ્રવાહી સ્વરૂપે બોટલમાં એમ બે રીતે મળે છે. પાવડર સ્વરૂપે મળતા પ્રત્યેક ડબ્બામાં ખાતર A, B અને C ના અનુક્રમે 1, 2 અને 4 એકમો હોય છે. જ્યારે પ્રવાહી સ્વરૂપે મળતા ખાતરની પ્રત્યેક બોટલમાં A, B અને Cના અનુક્રમે 5, 2 અને 1 એકમો હોય છે. જો પ્રત્યેક ડબ્બો 200 માં અને પ્રત્યેક બોટલ 300 માં મળતી હોય તો ખર્ચ ન્યૂનત્તમ થાય તે રીતે ખાતર બંને સ્વરૂપમાં કેટકેટલું ખરીદવું જોઈએ ?

25. એક બીમાર વ્યક્તિના ખોરાકમાં વિટામીનના 8000 એકમો ક્ષારના 100 એકમો અને કેલરીના 2800 એકમોની ન્યૂનતમ જરૂરિયાત છે. આ માટે બે પ્રકારના ખોરાક P અને ખોરાક Q એકમદીઠ ₹ 100 અને ₹ 75 ના ભાવે મળે છે. ખોરાક P ના પ્રત્યેક એકમમાં 400 એકમો વિટામીન ક્ષારના 2 એકમો અને 80 એકમ કેલરી હોય છે, જ્યારે ખોરાક Q ના પ્રત્યેક એકમમાં 200 એકમો વિટામીન, ક્ષારના 4 એકમ અને 80 એકમ કેલરી હોય છે. આ વ્યક્તિએ કેટકેટલા એકમો ખોરાક P અને Q ના ખરીદવા જોઈએ કે જેથી તેને ખર્ચ ન્યૂનતમ આવે અને જરૂરિયાતો પણ પૂર્ણ થાય ?

16.10.2 યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરી નીચેના પ્રશ્ના જવાબ આપો.

1. સુરેખ આયોજનનો સૌપ્રથમ ઉપયોગ કોણે કર્યો હતો ?

   (*a*) કાર્લ પિયર્સન (*b*) સ્પિયરમેન

   (*c*) ન્યૂટન (*d*) જ્યોર્જ બી. ડાન્ટઝિંગ

2. સુરેખ આયોજનમાં મર્યાદિત સાધનોને .... દ્વારા રજૂ કરી શકાય છે.

   (*a*) હેતુલક્ષી વિધેય (*b*) ઈષ્ટ ઉકેલ

   (*c*) સુરેખ અસમતાઓ (*d*) આપેલમાંથી એકપણ નહિ

(3) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોમાં આવતી સુરેખ અસમતાઓથી વ્યાખ્યાયિત થતા સંવૃત બહિર્મુખ બહુકોણને .... કહે છે.

(*a*) જાળબિંદુઓ (*b*) ઉકેલ પ્રદેશ
(*c*) મર્યાદાઓ (*d*) આપેલમાંથી એકપણ નહી

(4) એક બહિર્મુખ બહુકોણીય પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ (3, 0) (4, 2) (4, 3) (1, 2) (3, 6) છે. Z $= 2x - 3y$ વિધેય માટે મહત્તમ કિંમત .... છે.
(*a*) 6 (*b*) –18 (*c*) 24 (*d*) –6

(5) સુરેખ આયોજનની સમસ્યાના ઉકેલ માટેની આલેખની રીત ક્યારે ઉપયોગી બને છે ? જ્યારે ....
(*a*) ફક્ત બે ચલો હોય ત્યારે (*b*) બે થી વધારે ચલો હોય ત્યારે
(*c*) ફક્ત ત્રણ ચલો હોય ત્યારે (*d*) આપેલમાંથી એકપણ નહિ

(6) સુરેખ આયોજનની સમસ્યામાં બે થી વધારે ચલો હોય ત્યારે કઈ રીતનો ઉપયોગ થાય છે ?
(*a*) આલેખની રીત (*b*) સિમ્પ્લેક્ષની રીત
(*c*) વોગેલની રીત (*d*) હંગેરીયન રીત

(7) મોટે ભાગે ઈષ્ટ બિંદુઓ બહુકોણીય પ્રદેશના .... બિંદુઓ હોય છે.
(*a*) ઉદ્‌ગમ બિંદુ (*b*) એકમ બિંદુ
(*c*) શિરો બિંદુ (*d*) આપેલમાંથી એક પણ નહિ

(8) એક બહિર્મુખ પ્રદેશના શિરો બિંદુઓ (6, 0) (3, 1) (1, 3) (0, 6) છે. વિધેય $Z = 200x + 1600y$ માટે ન્યૂનત્તમ મૂલ્ય .... થાય.
(*a*) 6600 (*b*) 7600 (*c*) 8600 (*d*) 6800

(9) $x \geq 4$ નો આલેખ .... રેખા અને તેની .... બાજુ હોય છે.
(*a*) આડી, જમણી (*b*) આડી, ડાબી
(*c*) ઊભી, ડાબી (*d*) ઊભી, જમણી

(10) સુરેખ આયોજનની સમસ્યામાં નિર્ણાયાત્મક ચલોની અસમતાઓને .... કહે છે.
(*a*) હેતુલક્ષી વિધેય (*b*) ઈષ્ટ પ્રાપ્ય ઉકેલ
(*c*) પ્રતિબંધો (*d*) આપેલમાંથી એકપણ નહિ

(11) સુરેખ આયોજનમાં $x \geq 0$ અને $y \geq 0$ ને .... કહે છે.
(*a*) શૂન્ય શરત (*b*) અનૃણ પ્રતિબંધ
(*c*) હેતુલક્ષી વિધેય (*d*) આપેલમાંથી એકપણ નહિ

જવાબો

16.10.1 ના જવાબો

(11) $x = 30$ અને $y = 15$ હોય ત્યારે $Z = 1050$ મહત્તમ થશે.
(12) $x = 5$ અને $y = 3$ માટે $Z = 95$ મહત્તમ થશે.
(13) $x = 100$ અને $y = 300$ માટે $Z = 1900$ મહત્તમ થશે.
(14) $x = 4$ અને $y = 3$ માટે $Z = 180$ મહત્તમ થશે.
(15) $x = 100$ અને $y = 20$ માટે $Z = 5800$ મહત્તમ થશે.
(16) $x = 6$ અને $y = 6$ માટે $Z = 18$ ન્યૂત્તમ થશે.
(17) $x_1 = 0$ અને $x_2 = 144$ માટે $Z = 3456$ લઘુત્તમ થશે.
(18) $x = 0$ અને $y = 12$ માટે $Z = 36$ ન્યૂત્તમ થશે.
(19) $x = 1$ અને $y = 3$ માટે $Z = 6800$ ન્યૂત્તમ થશે.
(20) $x = 40$ અને $y = 20$ માટે $Z = 16000$ ન્યૂત્તમ થશે.

(21) ધારો કે દીપલ વિભાગ A માંથી x અને વિભાગ B માંથી y પ્રશ્નો લખે છે.

$\therefore$ $Z = 5x + 10y$ ને મહત્તમ બનાવો.

શરતો : $x, y \geq 0$, $x + y \leq 12$, $4x + 6y \leq 60$ (એક કલાકની 60 મિનિટ છે.)

$x = 6$ અને $y = 6$ માટે $Z = 90$ ગુણ મહત્તમ થશે.

(22) ધારો કે ઉત્પાદક x ખુરશીઓ અને y કબાટો બનાવે છે.

$\therefore$ $Z = 400x + 300y$ ને મહત્તમ બનાવો.

શરતો : $x, y \geq 0$, $3x + 2y \leq 18$, $3x + 3y \leq 24$

$x = 3$ $y = 4$ માટે $Z = 2600$ મહત્તમ થશે.

(23) ધારો કે પશુપાલક x ગાયો અને y ભેંસો રાખે છે.

$\therefore$ $Z = 10x + 8y$ ને મહત્તમ બનાવો.

શરતો : $x, y \geq 0$, $y \geq 3$, $80x + 120y \leq 960$, $x + y \leq 10$

$x = 7$, $y = 3$ હોય ત્યારે $Z = 94$ મહત્તમ થશે.

(24) ધારો કે વ્યક્તિ x ડબ્બાઓ અને y બોટલો ખરીદે છે.

$\therefore$ $Z = 200x + 300y$ ને ન્યૂનત્તમ બનાવો.

શરતો : $x, y \geq 0$, $x + 5y \geq 10$, $2x + 2y \geq 12$, $4x + y \geq 10$

વ્યક્તિ $x = 5$ ડબ્બાઓ અને $y = 1$ બોટલ ખરીદે તો $Z = 1300$ ન્યૂનતમ ખર્ચ થશે.

(25) ધારો કે વ્યક્તિ ખોરાક P ના x અને ખોરાક Q ના y એકમો ખરીદે છે.

$\therefore$ $Z = 100x + 75y$ ને લઘુત્તમ બનાવો.

શરતો : $400x + 200y \geq 8000$, $2x + 4y \geq 100$, $80x + 80y \geq 2800$

$x = 5$ $y = 30$ માટે $Z = 2750$ ન્યૂનત્તમ થશે.

16.10.2 ના જવાબો

1 (d), 2 (c), 3 (b), 4 (a), 5 (a), 6 (b), 7 (c), 8 (d), 9 (d), 10 (c), 11 (b)

16.11 પારિભાષિક શબ્દો

પ્રતિબંધો : કોઈપણ પ્રશ્નની મર્યાદાઓને ગાણિતીક સ્વરૂપમાં રજૂ કરવામાં આવે તેને પ્રતિબંધો કે બાધકો કહે છે.

ઉકેલ : કોઈપણ પ્રશ્નની મર્યાદાઓના સમીકરણોમાં x અને y ની કિંમતો લેતા સમીકરણોનું સમાધાન થાય તેને ઉકેલ કહે છે.

શિરોબિંદુ : ઉકેલના પ્રદેશના ખૂણાઓ પરના યામને શિરોબિંદુઓ કહે છે.

બર્હિમુખ બહુકોણ પ્રદેશ : ઉકેલનો પ્રદેશ કે જેમાં ઘણા બધા ખૂણાઓ બનતા હોય તે પ્રદેશને બર્હિમુખ બહુકોણ પ્રદેશ કહે છે.

ઈષ્ટતમ ઉકેલ : હેતુલક્ષી વિધેયને મહત્તમ કે ન્યૂનત્તમ બનાવે તેને ઈષ્ટત્તમ ઉકેલ કહે છે.

હેતુલક્ષી વિધેય : ચલ રાશિઓ ધરાવતું સુરેખ વિધેય કે જેને ઇષ્ટત્તમ બનાવવાનું હોય.

16.12 સંદર્ભસૂચિ

1. કાર્યા ત્મક સંશોધનની ઈષ્ટતમ પદ્ધતિઓ
પ્રો. રમેશચંદ્ર એન. દેસાઈ, ડૉ. ભરતભાઈ બી. જાની
યુનિવર્સિટી ગ્રંથનિર્માણ બોર્ડ, ગુજરાત રાજ્ય, અમદાવાદ-૬

2. કાર્યાત્મક સંશોધન
ડૉ. પ્રા. મહેન્દ્ર એચ. મૈસુરીયા અને ડૉ. દિનેશ એમ. પટેલ, પ્રા. ધર્મેન્દ્ર એમ. પ્રજાપતિ
અક્ષર પબ્લિકેશન, અમદાવાદ.

❖